§ 3.3 导体系

§3.3 导体系

一、导体系的静电能

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能： $$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \,\mathrm{d}\tau$$

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能： $$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \, \mathrm{d}\tau$$

对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能：
$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$

对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能： $$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f\, \mathrm{d}\tau$$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma_{qi} \mathrm{d}\sigma_i$$ σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能：
$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \,\mathrm{d}\tau$$
对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面
$$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$
σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度
$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能： $W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \,\mathrm{d}\tau$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma_{qi} \mathrm{d}\sigma_i$ σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度

$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_{qi} \mathrm{d}\sigma_i$ 利用了导体是等势体，φ_i 为常数

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能：
$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \,\mathrm{d}\tau$$
对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$
σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$
利用了导体是等势体，φ_i 为常数

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i$$

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能： $$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \,\mathrm{d}\tau$$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$ σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_{qi}\mathrm{d}\sigma_i$$ 利用了导体是等势体，φ_i 为常数

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i$$ Q_i 为导体 i 的电量

§ 3.3 导体系

一、导体系的静电能

静电能：

$$W = \frac{1}{2}\int \varphi\rho_f \, \mathrm{d}\tau$$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{2}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \sigma_{qi} \mathrm{d}\sigma_i$$ σ_{qi} 为导体 i 的面电荷密度

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma_{qi} \mathrm{d}\sigma_i$$ 利用了导体是等势体，φ_i 为常数

$$= \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i$$ Q_i 为导体 i 的电量

导体系的静电能：$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i}$

二、导体系的电势系数

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量有关？无关？

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量有关？无关？ —— 无关！

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？ 无关？ —— 无关！

物理上的理解：

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？ 无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i=\sum_j p_{ij}Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1 p_{11}$ 和 $Q_1 p_{21}$，

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1 p_{11}$ 和 $Q_1 p_{21}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 0。

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1 p_{11}$ 和 $Q_1 p_{21}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 0。

类似地：若导体 2 带单位电量，导体 1 不带电。导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{12}、σ_{22}

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$（n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1 p_{11}$ 和 $Q_1 p_{21}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 0。

类似地：若导体 2 带单位电量，导体 1 不带电。导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{12}、σ_{22}

面电荷分布 σ_{12} 和 σ_{22} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{12} 和 p_{22}

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j = 1, 2, \ldots, n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1 p_{11}$ 和 $Q_1 p_{21}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 0。

类似地：若导体 2 带单位电量，导体 1 不带电。导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{12}、σ_{22}

面电荷分布 σ_{12} 和 σ_{22} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{12} 和 p_{22}

若导体 2 带电 Q_2，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为：$Q_2\sigma_{12}$、$Q_2\sigma_{22}$

二、导体系的电势系数

线性介质中的导体系，若第 j 个导体上的总电量为 Q_j，$j=1,2,\ldots,n$ （n 为导体数目），则第 i 个导体上的电势可表为：

$$\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$$

p_{ij} 称为导体系的电势系数 (coefficients of potential)，只与导体的形状和位置有关，与导体上的电量 有关？ 无关？ —— 无关！

物理上的理解： 假设有两个导体

导体 1 带单位电量，导体 2 不带电。这时导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{11}、σ_{21}

面电荷分布 σ_{11} 和 σ_{21} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{11} 和 p_{21}

若导体 1 带电 Q_1，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为多少？ —— $Q_1\sigma_{11}$、$Q_1\sigma_{21}$

因为这种电荷分布保证了：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 Q_1p_{11} 和 Q_1p_{21}，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 0。

类似地：若导体 2 带单位电量，导体 1 不带电。导体 1、导体 2 的面电荷分布分别为 σ_{12}、σ_{22}

面电荷分布 σ_{12} 和 σ_{22} 在导体 1 和导体 2 上的电势为常数 p_{12} 和 p_{22}

若导体 2 带电 Q_2，那么这时导体 1、导体 2 的面电荷分布为：$Q_2\sigma_{12}$、$Q_2\sigma_{22}$

现让导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2，如何？

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11} + Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21} + Q_2\sigma_{22}$，

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

假设导体系只有第 i 个导体带电 1，这时空间各点的电势为 $p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$，

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

假设导体系只有第 i 个导体带电 1，这时空间各点的电势为 $p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$，$p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

假设导体系只有第 i 个导体带电 1，这时空间各点的电势为 $p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$，$p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 p_{ji}，$j=1,2,3,\ldots$

(2) $\epsilon\oint_{S_j}\frac{\partial p_i(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}-1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时 导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

假设导体系只有第 i 个导体带电 1，这时空间各点的电势为 $p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$，$p_i(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 p_{ji}，$j=1,2,3,\ldots$

(2) $\epsilon\oint_{S_j}\dfrac{\partial p_i(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}-1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

现让第 i 个导体带电 Q_i，这时空间各点电势应该为 $Q_ip_i(\vec{\boldsymbol{r}})$，因为它满足定解条件：

这时导体 1 电荷分布：$Q_1\sigma_{11}+Q_2\sigma_{12}$，导体 2 电荷分布：$Q_1\sigma_{21}+Q_2\sigma_{22}$，

这种电荷分布保证：1. 导体 1 和导体 2 上的电势为常数 $Q_1p_{11}+Q_2p_{12}$ 和 $Q_1p_{21}+Q_2p_{22}$，

2. 导体 1 和导体 2 上的电量分别为：Q_1 和 Q_2。

唯一性定理保证了这是唯一正确的解。因此，导体 1 带电 Q_1 且同时导体 2 带电 Q_2 时，

导体 1 上的电势：$\varphi_1=p_{11}Q_1+p_{12}Q_2$；导体 2 上的电势：$\varphi_2=p_{21}Q_1+p_{22}Q_2$。

电势系数：p_{11}，p_{12}，p_{21}，p_{22} 与导体上的电量 Q_1、Q_2 无关。

p_{ij} 的意义：当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

一般证明：

假设导体系只有第 i 个导体带电 1，这时空间各点的电势为 $p_i(\vec{r})$，$p_i(\vec{r})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 p_{ji}，$j=1,2,3,\ldots$

(2) $\epsilon\oint_{S_j}\dfrac{\partial p_i(\vec{r})}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}-1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

现让第 i 个导体带电 Q_i，这时空间各点电势应该为 $Q_ip_i(\vec{r})$，因为它满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i$，$j=1,2,3,\ldots$

(2) $\epsilon\oint_{S_j}\dfrac{\partial[Q_ip_i(\vec{r})]}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}-Q_i & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases}$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：（叠加原理）

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：　　（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial[Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n} \, \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：　（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \dots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial [Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$

现在，让第 l 个导体带电 $Q_l, l = 1, 2, \dots, n$，这时 $\sum\limits_l Q_l p_l(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $\sum_l p_{jl} Q_l$，$j = 1, 2, \dots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial [\sum_l Q_l p_l(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = -Q_j$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：　　（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial[Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_i p_i(\vec{\boldsymbol{r}}) + Q_k p_k(\vec{\boldsymbol{r}})$

现在，让第 l 个导体带电 $Q_l, l = 1, 2, \ldots, n$，这时 $\displaystyle\sum_l Q_l p_l(\vec{\boldsymbol{r}})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $\sum_l p_{jl} Q_l$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial[\sum_l Q_l p_l(\vec{\boldsymbol{r}})]}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma = -Q_j$

因此第 l 个导体带电 Q_l 时 $(l = 1, 2, \ldots, n)$，空间电势应为：

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_ip_i(\vec{r}) + Q_kp_k(\vec{r})$ 满足定解条件：（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $$\epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[Q_ip_i(\vec{r}) + Q_kp_k(\vec{r})]}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_ip_i(\vec{r}) + Q_kp_k(\vec{r})$

现在，让第 l 个导体带电 $Q_l, l = 1, 2, \ldots, n$，这时 $\sum\limits_l Q_lp_l(\vec{r})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $\sum_l p_{jl}Q_l$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $$\epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[\sum_l Q_lp_l(\vec{r})]}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma = -Q_j$$

因此第 l 个导体带电 Q_l 时 $(l = 1, 2, \ldots, n)$，空间电势应为：$\sum\limits_l Q_lp_l(\vec{r})$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})$ 满足定解条件：（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

$$(2)\ \epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})$

现在，让第 l 个导体带电 $Q_l, l = 1, 2, \ldots, n$，这时 $\sum\limits_l Q_l p_l(\vec{r})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $\sum_l p_{jl} Q_l$，$j = 1, 2, \ldots, n$

$$(2)\ \epsilon \oint_{S_j} \frac{\partial[\sum_l Q_l p_l(\vec{r})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = -Q_j$$

因此第 l 个导体带电 Q_l 时 $(l = 1, 2, \ldots, n)$，空间电势应为：$\sum\limits_l Q_l p_l(\vec{r})$

也即：当导体系中各导体分别带电 Q_l，$l = 1, 2, \ldots, n$ 时，第 i 个导体上的电势为：$\sum\limits_l p_{il} Q_l$

现同时让第 i 个导体带电 Q_i 且第 k 个导体带电 Q_k，其它导体不带电

这时 $Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})$ 满足定解条件：（叠加原理）

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $p_{ji}Q_i + p_{jk}Q_k$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial[Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = \begin{cases} -Q_i & j = i \\ -Q_k & j = k \\ 0 & j \neq i, k \end{cases}$

故第 i 个导体带 Q_i 且第 k 个导体带 Q_k（其余不带电）时，空间电势为：$Q_i p_i(\vec{r}) + Q_k p_k(\vec{r})$

现在，让第 l 个导体带电 $Q_l, l = 1, 2, \ldots, n$，这时 $\displaystyle\sum_l Q_l p_l(\vec{r})$ 满足定解条件：

(1) 在第 j 个导体上电势为常数 $\sum_l p_{jl}Q_l$，$j = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\epsilon \oint_{S_j} \dfrac{\partial[\sum_l Q_l p_l(\vec{r})]}{\partial n} \mathrm{d}\sigma = -Q_j$

因此第 l 个导体带电 Q_l 时 $(l = 1, 2, \ldots, n)$，空间电势应为：$\displaystyle\sum_l Q_l p_l(\vec{r})$

也即：当导体系中各导体分别带电 Q_l，$l = 1, 2, \ldots, n$ 时，第 i 个导体上的电势为：$\displaystyle\sum_l p_{il}Q_l$

p_{ij} **的意义：** 当导体系中仅有第 j 个导体带单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij} Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij} Q_i Q_j$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij}=p_{ji}$, (2) $p_{ij}>0$, (3) $p_{ii}>p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W=\frac{1}{2}\sum_i\varphi_iQ_i=\frac{1}{2}\sum_i\left[\sum_j p_{ij}Q_j\right]Q_i=\frac{1}{2}\sum_{ij}p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij}Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 = \tfrac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij}Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 = \tfrac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij}Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 = \tfrac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij} Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij} Q_i Q_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 = \tfrac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1}) Q_j \mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q_1(\varphi_1 - \varphi_{\text{无穷远}}) = \mathrm{d}Q_1 \varphi_1$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij}=p_{ji}$, (2) $p_{ij}>0$, (3) $p_{ii}>p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W=\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i=\frac{1}{2}\sum_i \Big[\sum_j p_{ij}Q_j\Big]Q_i=\frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j (p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q_1(\varphi_1-\varphi_{\text{无穷远}})=\mathrm{d}Q_1\varphi_1$

因此 $$\mathrm{d}U=\varphi_1\mathrm{d}Q_1=\Big[\sum_j p_{1j}Q_j\Big]\mathrm{d}Q_1=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij}=p_{ji}$, (2) $p_{ij}>0$, (3) $p_{ii}>p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W=\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i=\frac{1}{2}\sum_i\left[\sum_j p_{ij}Q_j\right]Q_i=\frac{1}{2}\sum_{ij}p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q_1(\varphi_1-\varphi_{无穷远})=\mathrm{d}Q_1\varphi_1$

因此 $$\mathrm{d}U=\varphi_1\mathrm{d}Q_1=\left[\sum_j p_{1j}Q_j\right]\mathrm{d}Q_1=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1$$

比较 $\mathrm{d}W$ 和 $\mathrm{d}U$： $$\mathrm{d}U=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1=\mathrm{d}W$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij} = p_{ji}$, (2) $p_{ij} > 0$, (3) $p_{ii} > p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $W = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \left[\sum_j p_{ij} Q_j\right] Q_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} p_{ij} Q_i Q_j$

导体电量改变时 $\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$

如果只有 Q_1 改变： $\mathrm{d}W = \left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1 = \frac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1}) Q_j \mathrm{d}Q_1$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q_1(\varphi_1 - \varphi_{\text{无穷远}}) = \mathrm{d}Q_1 \varphi_1$

因此 $\mathrm{d}U = \varphi_1 \mathrm{d}Q_1 = \left[\sum_j p_{1j} Q_j\right]\mathrm{d}Q_1 = \sum_j p_{1j} Q_j \mathrm{d}Q_1$

比较 $\mathrm{d}W$ 和 $\mathrm{d}U$： $\mathrm{d}U = \sum_j p_{1j} Q_j \mathrm{d}Q_1 = \frac{1}{2}\sum_j (p_{1j} + p_{j1}) Q_j \mathrm{d}Q_1 = \mathrm{d}W$

上式对任意 Q_j 成立 $p_{1j} Q_j = \frac{1}{2}(p_{1j} + p_{j1}) Q_j$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij}=p_{ji}$, (2) $p_{ij}>0$, (3) $p_{ii}>p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W=\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i=\frac{1}{2}\sum_i\left[\sum_j p_{ij}Q_j\right]Q_i=\frac{1}{2}\sum_{ij}p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q_1(\varphi_1-\varphi_{\text{无穷远}})=\mathrm{d}Q_1\varphi_1$

因此 $$\mathrm{d}U=\varphi_1\mathrm{d}Q_1=\left[\sum_j p_{1j}Q_j\right]\mathrm{d}Q_1=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1$$

比较 $\mathrm{d}W$ 和 $\mathrm{d}U$： $$\mathrm{d}U=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1=\mathrm{d}W$$

上式对任意 Q_j 成立 $$p_{1j}Q_j=\frac{1}{2}(p_{1j}+p_{j1})Q_j\quad\Longrightarrow\quad p_{1j}=p_{j1}$$

可以证明电势系数满足：(1) $p_{ij}=p_{ji}$, (2) $p_{ij}>0$, (3) $p_{ii}>p_{ij}$

证明：

(1) 导体静电能 $$W=\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i Q_i=\frac{1}{2}\sum_i\left[\sum_j p_{ij}Q_j\right]Q_i=\frac{1}{2}\sum_{ij}p_{ij}Q_iQ_j$$

导体电量改变时 $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial Q_n}\right)\mathrm{d}Q_n$$

如果只有 Q_1 改变： $$\mathrm{d}W=\left(\frac{\partial W}{\partial Q_1}\right)\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1$$

另一方面，由于导体 1 电量增加 $\mathrm{d}Q_1$ 而导致体系静电能的变化，

等于把 $\mathrm{d}Q_1$ 的电量从无穷远移到导体 1 过程，外力克服静电力做的功

也等于这 $\mathrm{d}Q_1$ 的电荷静电势能的增加：$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q_1(\varphi_1-\varphi_{\text{无穷远}})=\mathrm{d}Q_1\varphi_1$

因此 $$\mathrm{d}U=\varphi_1\mathrm{d}Q_1=\left[\sum_j p_{1j}Q_j\right]\mathrm{d}Q_1=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1$$

比较 $\mathrm{d}W$ 和 $\mathrm{d}U$： $$\mathrm{d}U=\sum_j p_{1j}Q_j\mathrm{d}Q_1=\tfrac{1}{2}\sum_j(p_{1j}+p_{j1})Q_j\mathrm{d}Q_1=\mathrm{d}W$$

上式对任意 Q_j 成立 $$p_{1j}Q_j=\frac{1}{2}(p_{1j}+p_{j1})Q_j\quad\Longrightarrow\quad p_{1j}=p_{j1}$$

类似可证明： $$p_{ij}=p_{ji}$$

(2) 从 p_{ij}的意义：　　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$

(2) 从 p_{ij} 的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

(2) 从 p_{ij}的意义： 在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明 $p_{ij} > 0$ (假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明： $p_{ii} > p_{ij}$ (请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

C_{ij} $(i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$, (2) $C_{ii} > 0$, $C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$,　(2) $C_{ii} > 0$,　$C_{ij}\Big|_{i \neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

C_{ij} $(i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$,　(2) $C_{ii} > 0$,　$C_{ij}\Big|_{i \neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

(2) 从 p_{ij} 的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$，　(2) $C_{ii} > 0$，　$C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

在导体球（导体 1）放置单位正电荷，在点电荷处的电势为：

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = p_{21}$$

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

C_{ij} $(i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$,　(2) $C_{ii} > 0$,　$C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

在导体球（导体 1）放置单位正电荷，在点电荷处的电势为：

$$\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = p_{21}$$

p_{ij} 的对称性：

$$p_{21} = p_{12}$$

(2) 从 p_{ij} 的意义： 在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明 $p_{ij} > 0$ (假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明： $p_{ii} > p_{ij}$ (请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$, (2) $C_{ii} > 0$, $C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

在导体球（导体 1）放置单位正电荷，在点电荷处的电势为： $\varphi_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = p_{21}$

p_{ij} 的对称性： $p_{21} = p_{12}$

p_{12} 的意义为： 在点电荷（导体 2）处放置单位正电荷，导体球（导体 1）上的电势

(2) 从 p_{ij} 的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$，　(2) $C_{ii} > 0$，　$C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

在导体球（导体 1）放置单位正电荷，在点电荷处的电势为：　$\varphi_q = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} = p_{21}$

p_{ij} 的对称性：　$p_{21} = p_{12}$

p_{12} 的意义为：　在点电荷（导体 2）处放置单位正电荷，导体球（导体 1）上的电势

在点电荷（导体 2）处放置电荷 q，在导体球处的电势为：　$\varphi_{\text{导体球}} = p_{12} q = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$

(2) 从 p_{ij}的意义：　在第 j 个导体上放置单位正电荷（其余不带电）时，第 i 个导体的电势。

可证明　$p_{ij} > 0$　(假定无穷远电势为 0)

(3) 类似可以证明：　$p_{ii} > p_{ij}$　(请证明)

由 $\varphi_i = \sum_j p_{ij} Q_j$，可得：

$$Q_i = \sum_j C_{ij} \varphi_j,$$

C_{ii} 称为电容系数 (coefficients of capacitance)

$C_{ij}\ (i \neq j)$ 称为感应系数(coefficients of induction)

可以证明电容电感系数满足：(1) $C_{ij} = C_{ji}$,　(2) $C_{ii} > 0$,　$C_{ij}\Big|_{i\neq j} < 0$

例 1：在中性导体球外放一点电荷 q，距导体球球心 r，求导体球的电势

导体球视为导体 1，点电荷视为导体 2（半径趋于 0 的导体球）

在导体球（导体 1）放置单位正电荷，在点电荷处的电势为：　$\varphi_q = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r} = p_{21}$

p_{ij} 的对称性：　$p_{21} = p_{12}$

p_{12} 的意义为：　在点电荷（导体 2）处放置单位正电荷，导体球（导体 1）上的电势

在点电荷（导体 2）处放置电荷 q，在导体球处的电势为：　$\varphi_{导体球} = p_{12} q = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$

当然，用镜象法也容易得 $\varphi_{导体球}$

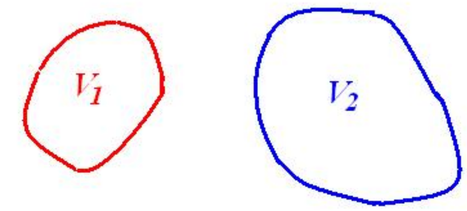
三、Thomson 定理

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。

三、Thomson 定理

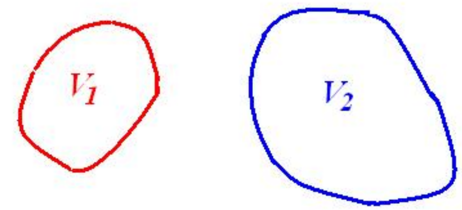
Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



三、Thomson 定理

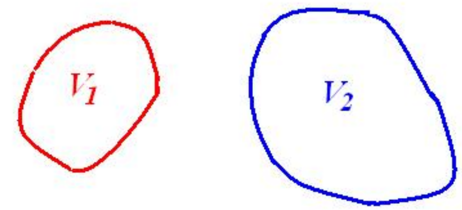
Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。

为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：



三、Thomson 定理

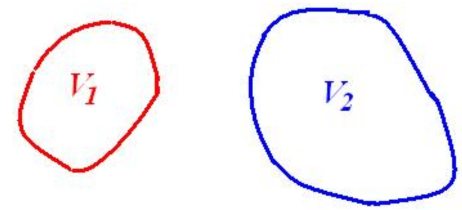
Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：
介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



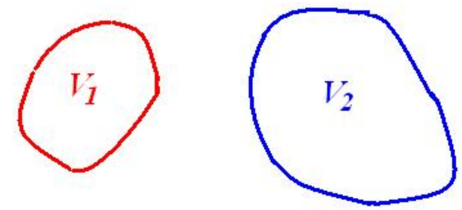
为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

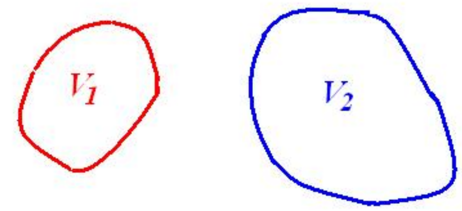
介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}'$，$\vec{\boldsymbol{D}}'$

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

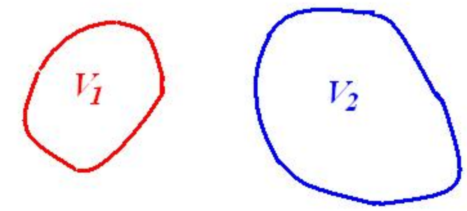
现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}'$，$\vec{\boldsymbol{D}}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

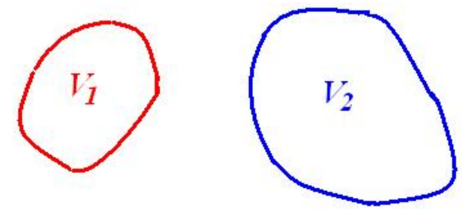
假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{E}'$，$\vec{D}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{E}$，$\vec{D}$

Thomson 定理 指出：场 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 的总电能小于场 $\vec{E}'$ $\vec{D}'$ 的总电能

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。

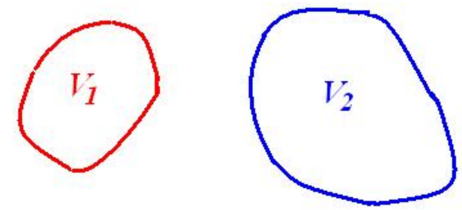


为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：
介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2
现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。
假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{E}'$，$\vec{D}'$
总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{E}$，$\vec{D}$
Thomson 定理 指出：场 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 的总电能小于场 $\vec{E}'$ $\vec{D}'$ 的总电能

证明:

三、Thomson 定理

Thomson 定理：在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{E}'$，$\vec{D}'$

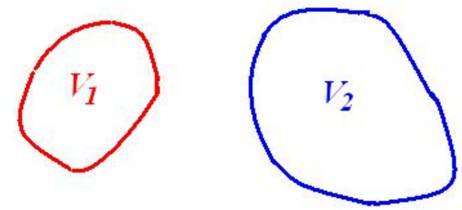
总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{E}$，$\vec{D}$

Thomson 定理指出：场 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 的总电能小于场 $\vec{E}'$ $\vec{D}'$ 的总电能

证明：显然：$\nabla\cdot\vec{D}'=\nabla\cdot\vec{D}=\rho=\begin{cases}\rho_1 & \text{介质 1}\\ \rho_2 & \text{介质 2}\end{cases}$，　$\vec{E}=-\nabla\varphi$，　$\vec{E}'=-\nabla\varphi'$，

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}'$，$\vec{\boldsymbol{D}}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$

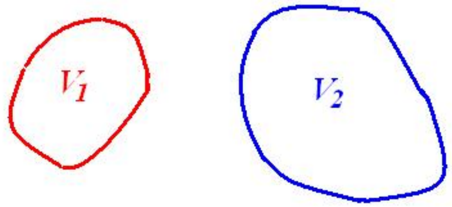
Thomson 定理指出：场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$ 的总电能小于场 $\vec{\boldsymbol{E}}'$ $\vec{\boldsymbol{D}}'$ 的总电能

证明: 显然：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}'=\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}=\rho=\begin{cases}\rho_1 & \text{介质 1}\\ \rho_2 & \text{介质 2}\end{cases}$， $\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi$， $\vec{\boldsymbol{E}}'=-\nabla\varphi'$，

$$\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s=\oint_{S_1}\sigma_1'\,\mathrm{d}s=Q_1,\quad \oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s=\oint_{S_2}\sigma_2'\,\mathrm{d}s=Q_2$$

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}'$，$\vec{\boldsymbol{D}}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$

Thomson 定理指出：场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$ 的总电能小于场 $\vec{\boldsymbol{E}}'$ $\vec{\boldsymbol{D}}'$ 的总电能

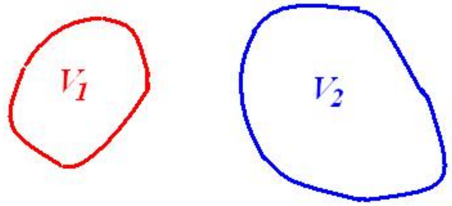
证明: 显然：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}' = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{介质 1} \\ \rho_2 & \text{介质 2} \end{cases}$，　$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$，　$\vec{\boldsymbol{E}}' = -\nabla\varphi'$，

$$\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s = \oint_{S_1}\sigma_1'\,\mathrm{d}s = Q_1,\qquad \oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s = \oint_{S_2}\sigma_2'\,\mathrm{d}s = Q_2$$

此处以 $\mathrm{d}s$ 表示面积分

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{E}\,'$，$\vec{D}\,'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{E}$，$\vec{D}$

Thomson 定理 指出：场 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 的总电能小于场 $\vec{E}\,'$ $\vec{D}\,'$ 的总电能

证明： 显然：$\nabla\cdot\vec{D}\,' = \nabla\cdot\vec{D} = \rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{介质 1} \\ \rho_2 & \text{介质 2} \end{cases}$ ，$\quad \vec{E} = -\nabla\varphi, \quad \vec{E}\,' = -\nabla\varphi',$

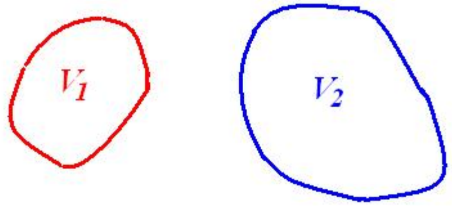
$$\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s = \oint_{S_1}\sigma_1'\,\mathrm{d}s = Q_1, \quad \oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s = \oint_{S_2}\sigma_2'\,\mathrm{d}s = Q_2$$

此处以 $\mathrm{d}s$ 表示面积分

总静电能：$U' - U = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \epsilon\vec{E}\,'\cdot\vec{E}\,'\mathrm{d}\tau - \dfrac{1}{2}\int \epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\tau$

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}'$，$\vec{\boldsymbol{D}}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$

Thomson 定理指出：场 $\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{D}}$ 的总电能小于场 $\vec{\boldsymbol{E}}'$ $\vec{\boldsymbol{D}}'$ 的总电能

证明: 显然：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}}' = \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{介质 1} \\ \rho_2 & \text{介质 2} \end{cases}$， $\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi$， $\vec{\boldsymbol{E}}' = -\nabla\varphi'$，

$$\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s = \oint_{S_1}\sigma_1'\,\mathrm{d}s = Q_1, \quad \oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s = \oint_{S_2}\sigma_2'\,\mathrm{d}s = Q_2$$

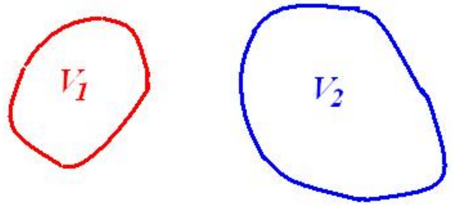
此处以 ds 表示面积分

总静电能：
$$U' - U = \frac{1}{2}\int\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}'\cdot\vec{\boldsymbol{E}}'\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}\tau$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}' - \vec{\boldsymbol{E}})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\geq 0} + \underbrace{\int\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\vec{\boldsymbol{E}}' - \vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A = \int\vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}' - \epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}$$

三、Thomson 定理

Thomson 定理： 在固定于线性介质中的导体系，当各导体上的电荷分布使得各导体均为等势体时，体系总电能极小，体系达到静电平衡。



为了从物理上理解该定理，考虑两个介质的情况：

介质 1 和介质 2 上分别有体自由电荷分布 ρ_1 和 ρ_2

现在给你 Q_1 和 Q_2 电量，要分别分布到介质 1 和介质 2 表面。

假设你将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1' 和 σ_2'，对应于分布：ρ_1，ρ_2，σ_1'，σ_2'，空间电场为：$\vec{E}'$，$\vec{D}'$

总可以将 Q_1 和 Q_2 分布成 σ_1 和 σ_2，使得介质表面为等势面，这时空间电场为：$\vec{E}$，$\vec{D}$

Thomson 定理 指出：场 $\vec{E}$，$\vec{D}$ 的总电能小于场 $\vec{E}'$ $\vec{D}'$ 的总电能

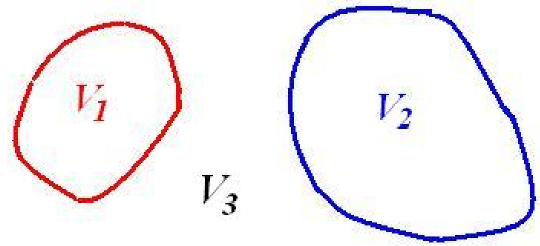
证明: 显然：$\nabla\cdot\vec{D}' = \nabla\cdot\vec{D} = \rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{介质 1} \\ \rho_2 & \text{介质 2} \end{cases}$ ， $\vec{E} = -\nabla\varphi$， $\vec{E}' = -\nabla\varphi'$，

$$\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s = \oint_{S_1}\sigma_1'\,\mathrm{d}s = Q_1,\quad \oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s = \oint_{S_2}\sigma_2'\,\mathrm{d}s = Q_2$$

此处以 ds 表示面积分

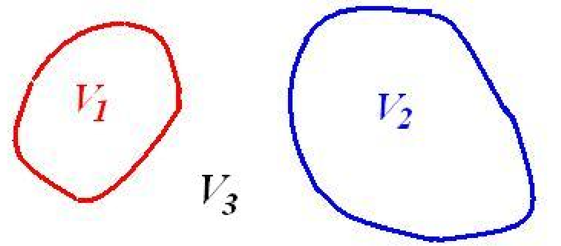
总静电能：$U' - U = \frac{1}{2}\int \epsilon\vec{E}'\cdot\vec{E}'\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int\epsilon\vec{E}\cdot\vec{E}\mathrm{d}\tau$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int\epsilon(\vec{E}'-\vec{E})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项 }\geq 0} + \underbrace{\int\epsilon\vec{E}\cdot(\vec{E}'-\vec{E})\mathrm{d}\tau}_{A=\int\vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}'-\epsilon\vec{E})\mathrm{d}\tau}$$

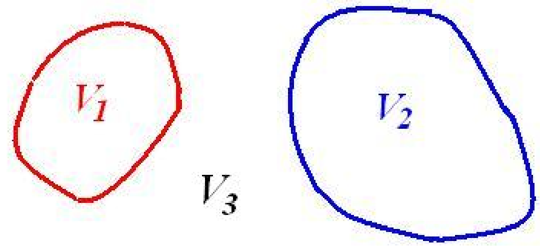

V_1
V_3
V_2

Let there be light

$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}' - \vec{E})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E} \cdot (\epsilon\vec{E}' - \epsilon\vec{E}) \mathrm{d}\tau}_{A}$$



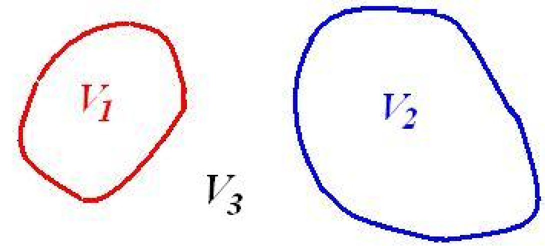
$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}\,' - \vec{E})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E} \cdot (\epsilon \vec{E}\,' - \epsilon \vec{E}) \mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$A = \int \vec{E} \cdot (\vec{D}\,' - \vec{D}) \mathrm{d}\tau,$$

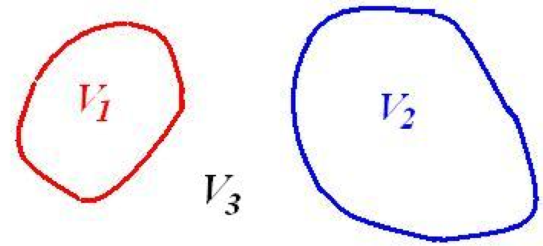
Let there be light

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$A = \int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}}) = 0$$

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\vec{\boldsymbol{E}})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$

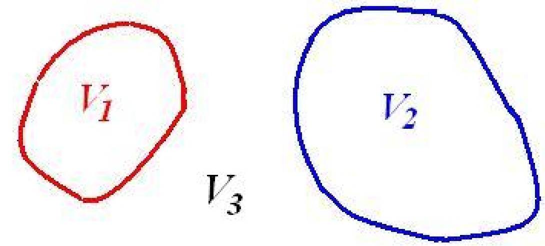


$$A = \int \vec{\boldsymbol{D}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})=0$$

$$= -\int (\nabla\varphi)\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau$$

Let there be light

$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,' - \vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,' - \epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



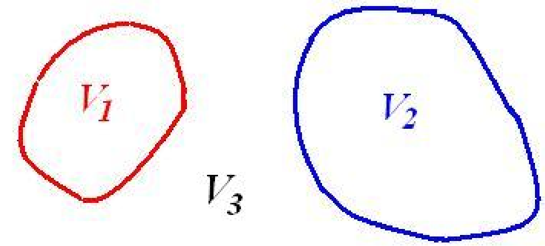
$$A = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}}) = 0$

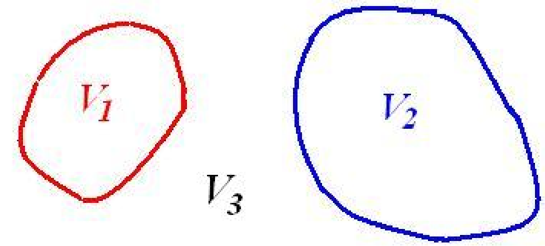
$$= -\int (\nabla\varphi) \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau$$

利用 $(\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{a}}) - \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,' - \vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\epsilon \vec{\boldsymbol{E}}\,' - \epsilon \vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$\begin{aligned} A &= \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}}) = 0 \\ &= -\int (\nabla\varphi) \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = \nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{a}}) - \varphi\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}} \\ &= -\int \nabla \cdot \left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})}_{0}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

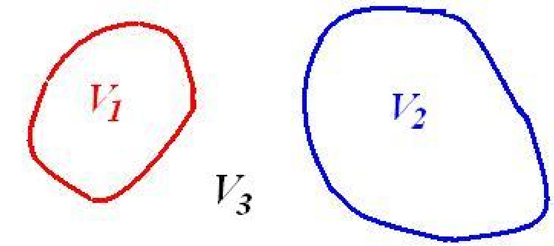


$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\vec{\boldsymbol{E}})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\ge 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$

$$A = \int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})=0$$

$$= -\int(\nabla\varphi)\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = \nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{a}})-\varphi\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$$

$$= -\int\nabla\cdot\left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau + \int\varphi\,\underbrace{\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})}_{0}\mathrm{d}\tau$$



$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}' - \vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\epsilon \vec{\boldsymbol{E}}' - \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}) \mathrm{d}\tau}_{A}$$

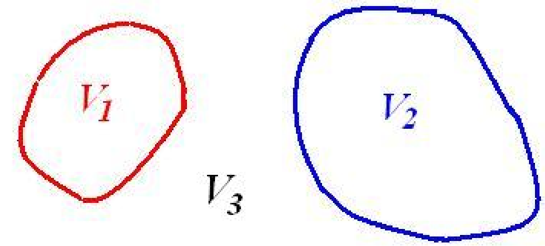
$$A = \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}}) \mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}}) = 0$$

$$= -\int (\nabla\varphi) \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}}) \mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \nabla \cdot (\varphi \vec{\boldsymbol{a}}) - \varphi \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$$

$$= -\int \nabla \cdot \left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}})\right] \mathrm{d}\tau + \int \varphi \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}})}_{0} \mathrm{d}\tau$$

空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,' - \vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,' - \epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



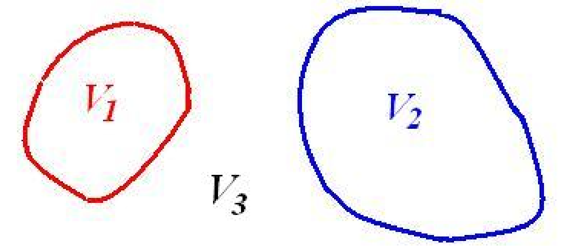
$$\begin{aligned} A &= \int \vec{\boldsymbol{E}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}}) = 0 \\ &= -\int (\nabla\varphi) \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \nabla \cdot (\varphi\vec{\boldsymbol{a}}) - \varphi\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \\ &= -\int \nabla \cdot \left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi \underbrace{\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}\,' - \vec{\boldsymbol{D}})}_{0}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

$$A = -\int_{V_1+V_2+V_3} \nabla \cdot \left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}' - \vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau$$

界面两边被积函数不连续，故分成 3 个区积分

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}\,'-\vec{E})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\geq 0} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}\,'-\epsilon\vec{E})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$A = \int \vec{E}\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})\mathrm{d}\tau,\qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})=0$$

$$= -\int (\nabla\varphi)\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) - \varphi\nabla\cdot\vec{a}$$

$$= -\int \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}\,'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi\,\underbrace{\nabla\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})}_{0}\mathrm{d}\tau$$

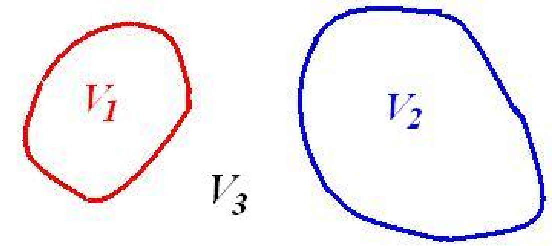
空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

$$A = -\int_{V_1+V_2+V_3} \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau \qquad \text{界面两边被积函数不连续，故分成 3 个区积分}$$

$$= -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s \qquad V_1\text{ 的内外界面分别为 } S_{1i}\text{，}S_{1e}$$

$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s - \underbrace{\oint_{S_\infty} \vec{n}\cdot\left[\varphi(\vec{D}\,'-\vec{D})\right]\mathrm{d}s}_{\text{对静场，无穷远面的积分为 0}}$$

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}\,'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$\begin{aligned} A &= \int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})=0 \\ &= -\int (\nabla\varphi)\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{\boldsymbol{a}} = \nabla\cdot(\varphi\vec{\boldsymbol{a}})-\varphi\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{a}} \\ &= -\int \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi\,\underbrace{\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})}_{0}\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

$$A = -\int_{V_1+V_2+V_3} \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}'-\vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}\tau$$

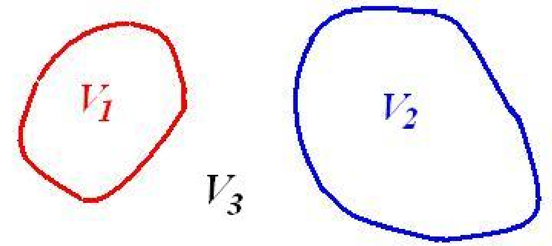
界面两边被积函数不连续，故分成 3 个区积分

$$\begin{aligned} &= -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right]\mathrm{d}s \\ &\quad -\oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right]\mathrm{d}s - \underbrace{\oint_{S_\infty} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi(\vec{\boldsymbol{D}}\,'-\vec{\boldsymbol{D}})\right]\mathrm{d}s}_{\text{对静场，无穷远面的积分为 0}} \end{aligned}$$

V_1 的内外界面分别为 S_{1i}，S_{1e}

V_2 的内外界面分别为 S_{2i}，S_{2e}，

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}\,'-\vec{E})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项 } \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}\,'-\epsilon\vec{E})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$A = \int \vec{E}\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})=0$$

$$= -\int (\nabla\varphi)\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a})-\varphi\nabla\cdot\vec{a}$$

$$= -\int \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}\,'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi\,\underbrace{\nabla\cdot(\vec{D}\,'-\vec{D})}_{0}\mathrm{d}\tau$$

空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

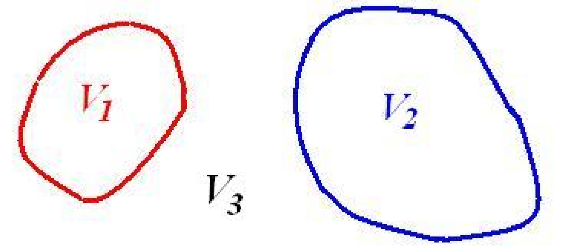
$$A = -\int_{V_1+V_2+V_3} \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau \qquad \text{界面两边被积函数不连续，故分成 3 个区积分}$$

$$= -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s \qquad V_1 \text{ 的内外界面分别为 } S_{1i}\text{，}S_{1e}$$

$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s - \underbrace{\oint_{S_\infty} \vec{n}\cdot\left[\varphi(\vec{D}\,'-\vec{D})\right]\mathrm{d}s}_{\text{对静场，无穷远面的积分为 0}}$$

V_2 的内外界面分别为 S_{2i}，S_{2e}， $S_{1i}=-S_{1e}$，$S_{2i}=-S_{2e}$（方向相反）

$$U'-U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}'-\vec{E})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}'-\epsilon\vec{E})\mathrm{d}\tau}_{A}$$



$$A = \int \vec{E}\cdot(\vec{D}'-\vec{D})\mathrm{d}\tau, \qquad \text{其中 } \nabla\cdot(\vec{D}'-\vec{D})=0$$

$$= -\int (\nabla\varphi)\cdot(\vec{D}'-\vec{D})\mathrm{d}\tau \qquad \text{利用 } (\nabla\varphi)\cdot\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) - \varphi\nabla\cdot\vec{a}$$

$$= -\int \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau + \int \varphi \underbrace{\nabla\cdot(\vec{D}'-\vec{D})}_{0}\mathrm{d}\tau$$

空间有 3 个均匀分区 V_1，V_2 和 V_3，如图所示。

$$A = -\int_{V_1+V_2+V_3} \nabla\cdot\left[\varphi(\vec{D}'-\vec{D})\right]\mathrm{d}\tau$$

界面两边被积函数不连续，故分成 3 个区积分

$$= -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$

V_1 的内外界面分别为 S_{1i}，S_{1e}

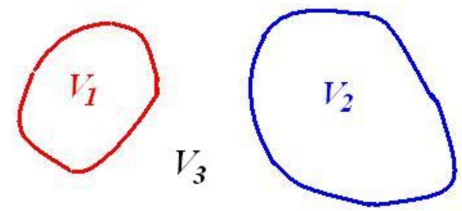
$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s - \underbrace{\oint_{S_\infty} \vec{n}\cdot\left[\varphi(\vec{D}'-\vec{D})\right]\mathrm{d}s}_{\text{对静场，无穷远面的积分为 0}}$$

V_2 的内外界面分别为 S_{2i}，S_{2e}， $S_{1i}=-S_{1e}$，$S_{2i}=-S_{2e}$（方向相反）

前已假定 φ 对应于介质表面为等势面的解，且界面上 $\varphi_{1i}=\varphi_{1e}$，$\varphi_{2i}=\varphi_{2e}$

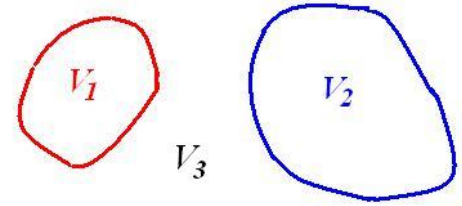
因而，A 可写成为

Let there be light



Let there be light

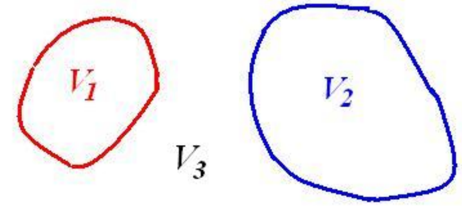
$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right] \mathrm{d}s$$
$$- \oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right] \mathrm{d}s$$



Let there be light

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right] \mathrm{d}s$$

$$- \oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right] \mathrm{d}s$$

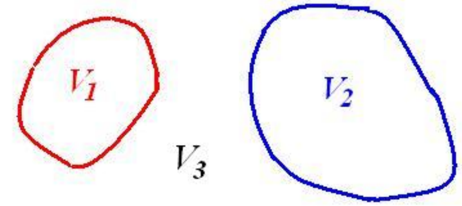


$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1} \mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1} \mathrm{d}s$$

Let there be light

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{n} \cdot \left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i} - \vec{D}_{1i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n} \cdot \left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e} - \vec{D}_{1e})\right] \mathrm{d}s$$

$$- \oint_{S_{2i}} \vec{n} \cdot \left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i} - \vec{D}_{2i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n} \cdot \left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e} - \vec{D}_{2e})\right] \mathrm{d}s$$



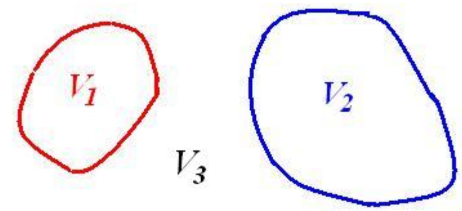
$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{D}'_{1e} - \vec{D}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1} \mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{D}_{1e} - \vec{D}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1} \mathrm{d}s$$

$$+ \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{D}'_{2e} - \vec{D}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2} \mathrm{d}s - \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{D}_{2e} - \vec{D}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2} \mathrm{d}s$$

Let there be light

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right] \mathrm{d}s$$

$$- \oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right] \mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1} \mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1} \mathrm{d}s$$

$$+ \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2} \mathrm{d}s - \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2} \mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

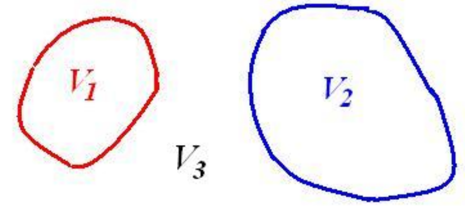
$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right] \mathrm{d}s$$

$$- \oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right] \mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right] \mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1} \mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_{1e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1} \mathrm{d}s$$

$$+ \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2} \mathrm{d}s - \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_{2e} - \vec{\boldsymbol{D}}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2} \mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

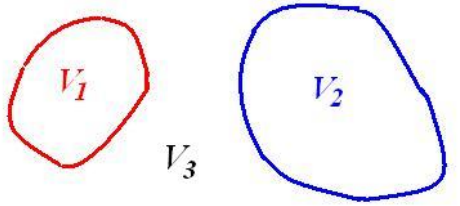
$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

$$= -\varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma'_1 \,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma_1 \,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma'_2 \,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma_2 \,\mathrm{d}s}_{Q_2}$$

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1}\mathrm{d}s - \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{1e}-\vec{D}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1}\mathrm{d}s$$
$$+\varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2}\mathrm{d}s - \varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{2e}-\vec{D}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

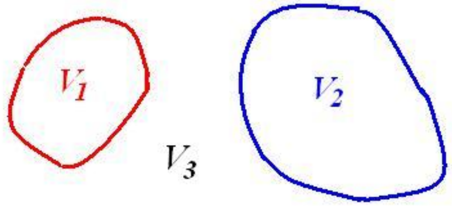
$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

$$= -\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} = 0$$

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$
$$- \oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1}\mathrm{d}s - \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{1e}-\vec{D}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1}\mathrm{d}s$$
$$+ \varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2}\mathrm{d}s - \varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{2e}-\vec{D}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

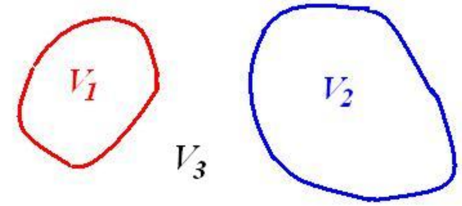
$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

$$= -\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} = 0$$

故：$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}'-\vec{E})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}'-\epsilon\vec{E})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0} \geq 0 \implies \boxed{U' \geq U}$

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$

$$- \oint_{S_{2i}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1}\mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1}\mathrm{d}s$$

$$+ \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2}\mathrm{d}s - \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

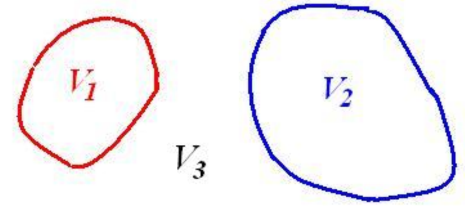
$$= -\varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} = 0$$

故：$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}' - \vec{\boldsymbol{E}})^2 \mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon > 0\text{，故此项} \geq 0} + \underbrace{\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}' - \epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0} \geq 0 \implies \boxed{U' \geq U}$

对介质，给定的初始面电荷分布即使不能使静电能极小（对应于介质表面为等势面），但电荷

$$A=-\oint_{S_{1i}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right]\mathrm{d}s-\oint_{S_{1e}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$

$$-\oint_{S_{2i}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right]\mathrm{d}s-\oint_{S_{2e}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$=\varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma'_1}\mathrm{d}s-\varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma_1}\mathrm{d}s$$

$$+\varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma'_2}\mathrm{d}s-\varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i}=\varphi_{1e}=\varphi_1=$ 常数

$\varphi_{2i}=\varphi_{2e}=\varphi_2=$ 常数

且：$S_{1i}=-S_{1e}=S_1$

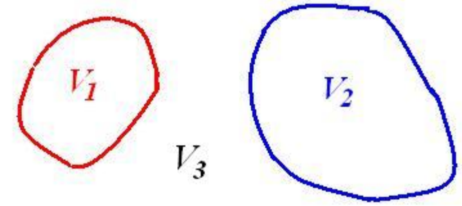
$S_{2i}=-S_{2e}=S_2$

$$=-\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1}+\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1}-\varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2}+\varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2}=0$$

故：$$U'-U=\underbrace{\frac{1}{2}\int\epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}'-\vec{\boldsymbol{E}})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项}\geq 0}+\underbrace{\int\vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0}\geq 0\implies\boxed{U'\geq U}$$

对介质，给定的初始面电荷分布即使不能使静电能极小（对应于介质表面为等势面），但电荷在绝缘介质上不能自由移动，故可保持给定的面电荷分布。　倒沙进杯，沙面可以不平

$$A=-\oint_{S_{1i}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})\right]\mathrm{d}s-\oint_{S_{1e}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{S_{2i}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})\right]\mathrm{d}s-\oint_{S_{2e}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$=\varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma'_1}\mathrm{d}s-\varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{1e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma_1}\mathrm{d}s$$
$$+\varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}'_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma'_2}\mathrm{d}s-\varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_{2e}-\vec{\boldsymbol{D}}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 }-\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面
$\varphi_{1i}=\varphi_{1e}=\varphi_1=$ 常数
$\varphi_{2i}=\varphi_{2e}=\varphi_2=$ 常数
且：$S_{1i}=-S_{1e}=S_1$
$S_{2i}=-S_{2e}=S_2$

$$=-\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1}+\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1}-\varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2}+\varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2}=0$$

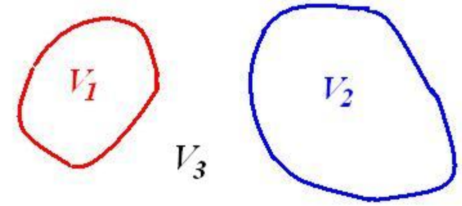
故：$$U'-U=\underbrace{\frac{1}{2}\int\epsilon(\vec{\boldsymbol{E}}'-\vec{\boldsymbol{E}})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 }\epsilon>0\text{，故此项 }\geq 0}+\underbrace{\int\vec{\boldsymbol{E}}\cdot(\epsilon\vec{\boldsymbol{E}}'-\epsilon\vec{\boldsymbol{E}})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0}\geq 0\Longrightarrow\boxed{U'\geq U}$$

对介质，给定的初始面电荷分布即使不能使静电能极小（对应于介质表面为等势面），但电荷在绝缘介质上不能自由移动，故可保持给定的面电荷分布。 倒沙进杯，沙面可以不平

对导体，由于电荷能自由移动，即使人们给定初始面电荷分布，电荷也将自动重新分布，

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$

$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1}\mathrm{d}s - \varphi_1 \oint_{S_1} \underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{1e}-\vec{D}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1}\mathrm{d}s$$

$$+ \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2}\mathrm{d}s - \varphi_2 \oint_{S_2} \underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{2e}-\vec{D}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面

$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数

$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数

且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$

$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

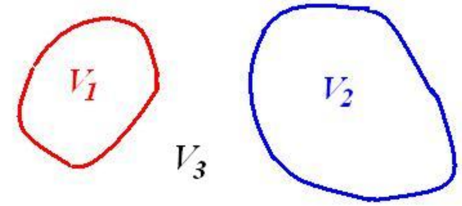
$$= -\varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1 \underbrace{\oint_{S_1} \sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2 \underbrace{\oint_{S_2} \sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} = 0$$

故：$U' - U = \underbrace{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \epsilon(\vec{E}'-\vec{E})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项 } \geq 0} + \underbrace{\displaystyle\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}'-\epsilon\vec{E})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0} \geq 0 \implies \boxed{U' \geq U}$

对介质，给定的初始面电荷分布即使不能使静电能极小（对应于介质表面为等势面），但电荷在绝缘介质上不能自由移动，故可保持给定的面电荷分布。 倒沙进杯，沙面可以不平

对导体，由于电荷能自由移动，即使人们给定初始面电荷分布，电荷也将自动重新分布，使得静电能极小，也就是使得导体表面为等势面。 倒水进杯，水面一定平。

$$A = -\oint_{S_{1i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1i}(\vec{D}'_{1i}-\vec{D}_{1i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{1e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{1e}(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}_{1e})\right]\mathrm{d}s$$
$$-\oint_{S_{2i}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2i}(\vec{D}'_{2i}-\vec{D}_{2i})\right]\mathrm{d}s - \oint_{S_{2e}} \vec{n}\cdot\left[\varphi_{2e}(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}_{2e})\right]\mathrm{d}s$$



$$= \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{1e}-\vec{D}'_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_1}\mathrm{d}s - \varphi_1\oint_{S_1}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{1e}-\vec{D}_{1i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_1}\mathrm{d}s$$
$$+ \varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}'_{2e}-\vec{D}'_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma'_2}\mathrm{d}s - \varphi_2\oint_{S_2}\underbrace{\vec{n}\cdot(\vec{D}_{2e}-\vec{D}_{2i})}_{\text{界面电荷分布 } -\sigma_2}\mathrm{d}s$$

其中利用了：在介质表面
$\varphi_{1i} = \varphi_{1e} = \varphi_1 =$ 常数
$\varphi_{2i} = \varphi_{2e} = \varphi_2 =$ 常数
且：$S_{1i} = -S_{1e} = S_1$
$S_{2i} = -S_{2e} = S_2$

$$= -\varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma'_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} + \varphi_1\underbrace{\oint_{S_1}\sigma_1\,\mathrm{d}s}_{Q_1} - \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma'_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} + \varphi_2\underbrace{\oint_{S_2}\sigma_2\,\mathrm{d}s}_{Q_2} = 0$$

故：$$U' - U = \underbrace{\frac{1}{2}\int \epsilon(\vec{E}'-\vec{E})^2\mathrm{d}\tau}_{\text{静场中 } \epsilon>0\text{，故此项 } \geq 0} + \underbrace{\int \vec{E}\cdot(\epsilon\vec{E}'-\epsilon\vec{E})\,\mathrm{d}\tau}_{A=0} \geq 0 \implies \boxed{U' \geq U}$$

对介质，给定的初始面电荷分布即使不能使静电能极小（对应于介质表面为等势面），但电荷在绝缘介质上不能自由移动，故可保持给定的面电荷分布。 倒沙进杯，沙面可以不平

对导体，由于电荷能自由移动，即使人们给定初始面电荷分布，电荷也将自动重新分布，使得静电能极小，也就是使得导体表面为等势面。 倒水进杯，水面一定平。

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau =$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用：$$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau \underset{\text{同理}}{\overset{\Uparrow}{=}}$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{\boldsymbol{r}})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{\boldsymbol{r}})\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{\boldsymbol{n}}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{同理}}}{=} \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi'\rho\,\mathrm{d}\tau$$

推论： 离电荷系统很远的不带电导体会受电荷系统吸引（教材 p64 例 1）。

四、格林互易定理 (Green's reciprocity theorem)

格林互易定理： 设空间有一电荷分布 $\rho(\vec{r})$，在空间产生的电势为 $\varphi(\vec{r})$，如果把此电荷分布换成 $\rho'(\vec{r})$，在空间的电势相应地变为 $\varphi'(\vec{r})$，有：

$$\int_{V_\infty} \rho(\vec{r})\,\varphi'(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau = \int_{V_\infty} \rho'(\vec{r})\,\varphi(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau$$

证明：

令 $$I = \int (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $$\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi') = (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi') + \varphi(\nabla^2\varphi')$$

$$I = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi')\,\mathrm{d}\tau - \int \varphi(\nabla^2\varphi')\,\mathrm{d}\tau$$

利用 $\nabla^2\varphi' = -\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho'$

$$= \oint \vec{n}\cdot[\varphi\nabla\varphi']\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$

第一项为无穷远处面积分，为 0

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau \underset{\Uparrow}{=} \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi'\rho\,\mathrm{d}\tau$$ 得证

同理

对导体系：

$$I = \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho' \, \mathrm{d}\tau$$

对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i
\end{aligned}
$$

对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho' \,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\, \sigma'_{qi}\, \mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度}
\end{aligned}
$$

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i
\end{aligned}
$$

对导体系：

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho' \,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\, \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数}
\end{aligned}$$

对导体系：

$$I = \frac{1}{\epsilon_0} \int \varphi \rho' \, \mathrm{d}\tau$$

对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \oint_{S_i} \varphi_i \, \sigma'_{qi} \, \mathrm{d}\sigma_i$$

σ'_{qi} 为导体 i 的第二种面电荷密度

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi} \, \mathrm{d}\sigma_i$$

第一种电荷分布在导体 i 上产生的势 φ_i 为常数

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i \varphi_i \, Q'_i$$

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量}
\end{aligned}
$$

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\,Q_i
\end{aligned}
$$

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho' \,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\, \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\, Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\, Q_i && Q_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第一种电荷分布的电量}
\end{aligned}
$$

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\, Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量}\\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\, Q_i && Q_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第一种电荷分布的电量}
\end{aligned}
$$

$$\sum_i \varphi'_i\, Q_i = \sum_i \varphi_i\, Q'_i$$

对导体系：

$$I = \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i$$ σ'_{qi} 为导体 i 的第二种面电荷密度

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i$$ 第一种电荷分布在导体 i 上产生的势 φ_i 为常数

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i$$ Q'_i 为导体 i 对应于第二种电荷分布的电量

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\,Q_i$$ Q_i 为导体 i 对应于第一种电荷分布的电量

$$\sum_i \varphi'_i\,Q_i = \sum_i \varphi_i\,Q'_i$$

φ_i：

对导体系：

$$I = \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau$$ 对各导体 i 求和，并考虑到导体电荷分布在表面

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i$$ σ'_{qi} 为导体 i 的第二种面电荷密度

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i$$ 第一种电荷分布在导体 i 上产生的势 φ_i 为常数

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i$$ Q'_i 为导体 i 对应于第二种电荷分布的电量

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\,Q_i$$ Q_i 为导体 i 对应于第一种电荷分布的电量

$$\sum_i \varphi'_i\,Q_i = \sum_i \varphi_i\,Q'_i$$

φ_i： 对应于第一种电荷分布，即导体 k 带电 Q_k 时 $(k = 1, 2, \ldots, n)$，第 i 个导体上的电势

对导体系：

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\,Q_i && Q_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第一种电荷分布的电量} \end{aligned}$$

$$\sum_i \varphi'_i\,Q_i = \sum_i \varphi_i\,Q'_i$$

φ_i： 对应于第一种电荷分布，即导体 k 带电 Q_k 时 $(k = 1, 2, \ldots, n)$，第 i 个导体上的电势

φ'_i：

对导体系：

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \varphi\rho'\,\mathrm{d}\tau && \text{对各导体 } i \text{ 求和，并考虑到导体电荷分布在表面} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \oint_{S_i} \varphi_i\,\sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \sigma'_{qi} \text{ 为导体 } i \text{ 的第二种面电荷密度} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} \sigma'_{qi}\,\mathrm{d}\sigma_i && \text{第一种电荷分布在导体 } i \text{ 上产生的势 } \varphi_i \text{ 为常数} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi_i\,Q'_i && Q'_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第二种电荷分布的电量} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_i \varphi'_i\,Q_i && Q_i \text{ 为导体 } i \text{ 对应于第一种电荷分布的电量}
\end{aligned}
$$

$$\sum_i \varphi'_i\,Q_i = \sum_i \varphi_i\,Q'_i$$

φ_i： 对应于第一种电荷分布，即导体 k 带电 Q_k 时 $(k=1,2,\ldots,n)$，第 i 个导体上的电势

φ'_i： 对应于第二种电荷分布，即导体 k 带电 Q'_k 时 $(k=1,2,\ldots,n)$，第 i 个导体上的电势

例2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，[†] 这时第 j 个导体带电 Q_j

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　　第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义： $Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i$， 对应于第一种电荷电势分布

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　第 j 个导体电势为 φ_j'，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q_i'

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q_i'=\sum_k C_{ik}\varphi_k'=C_{ij}\varphi_j',\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　第 j 个导体电势为 φ_j'，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q_i'

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q_i'=\sum_k C_{ik}\varphi_k'=C_{ij}\varphi_j',\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q_k'=\sum_k \varphi_k' Q_k$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i, \quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i = \sum_k C_{ik}\varphi'_k = C_{ij}\varphi'_j, \quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k \quad \text{第一种分布，只有导体 } i \text{ 的电势 } \varphi_i \neq 0$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ_j'，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q_i'

由电感系数的定义：

$$Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i, \quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q_i' = \sum_k C_{ik}\varphi_k' = C_{ij}\varphi_j', \quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q_k' = \sum_k \varphi_k' Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i \neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi_j' \neq 0$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i,$$ 对应于第一种电荷电势分布

$$Q'_i = \sum_k C_{ik}\varphi'_k = C_{ij}\varphi'_j,$$ 对应于第二种电荷电势分布

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i \neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j \neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i = \sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k = \varphi'_j Q_j$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i, \quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i = \sum_k C_{ik}\varphi'_k = C_{ij}\varphi'_j, \quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i \neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j \neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i = \sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k = \varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ_j'，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q_i'

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q_i'=\sum_k C_{ik}\varphi_k'=C_{ij}\varphi_j',\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q_k'=\sum_k \varphi_k' Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i\neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi_j'\neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q_i'=\sum_k \varphi_k Q_k'=\sum_k \varphi_k' Q_k=\varphi_j' Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi_j'=\varphi_j' C_{ji}\varphi_i$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地,† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地,† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i=\sum_k C_{ik}\varphi'_k=C_{ij}\varphi'_j,\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i\neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j\neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i=\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k=\varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi'_j=\varphi'_j C_{ji}\varphi_i\quad\Longrightarrow\quad C_{ij}=C_{ji}$$

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij} = C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：　第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：　第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j = \sum_k C_{jk}\varphi_k = C_{ji}\varphi_i, \quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i = \sum_k C_{ik}\varphi'_k = C_{ij}\varphi'_j, \quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i \neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j \neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i = \sum_k \varphi_k Q'_k = \sum_k \varphi'_k Q_k = \varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi'_j = \varphi'_j C_{ji}\varphi_i \implies C_{ij} = C_{ji}$$

例 3：教材　p70, 例题5

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为：第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地，† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为：第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地，† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i=\sum_k C_{ik}\varphi'_k=C_{ij}\varphi'_j,\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i\neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j\neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i=\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k=\varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi'_j=\varphi'_j C_{ji}\varphi_i \implies C_{ij}=C_{ji}$$

例 3：教材　p70, 例题5

† “接地”易引起物理上的歧义。因为接地在某种意义上易被以为是导体的位置改变，从而使人误以为 C_{ij} 也发生改变

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地,† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地,† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i=\sum_k C_{ik}\varphi'_k=C_{ij}\varphi'_j,\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i\neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j\neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i=\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k=\varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi'_j=\varphi'_j C_{ji}\varphi_i \quad\Longrightarrow\quad C_{ij}=C_{ji}$$

例 3：教材 p70, 例题5

† “接地”易引起物理上的歧义。因为接地在某种意义上易被以为是导体的位置改变，从而使人误以为 C_{ij} 也发生改变。实际上，可以认为人们在各导体球上放置电荷，使得第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体电势为 0

例 2：利用格林互易定理证明电感系数满足 $C_{ij}=C_{ji}$。

有 n 个导体构成的导体系

第一种电荷电势分布为： 第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体接地,† 这时第 j 个导体带电 Q_j

第二种电荷电势分布为： 第 j 个导体电势为 φ'_j，其余导体接地,† 这时第 i 个导体带电 Q'_i

由电感系数的定义：

$$Q_j=\sum_k C_{jk}\varphi_k=C_{ji}\varphi_i,\quad \text{对应于第一种电荷电势分布}$$

$$Q'_i=\sum_k C_{ik}\varphi'_k=C_{ij}\varphi'_j,\quad \text{对应于第二种电荷电势分布}$$

由格林互易定理：

$$\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k$$

第一种分布，只有导体 i 的电势 $\varphi_i\neq 0$

第二种分布，只有导体 j 的电势 $\varphi'_j\neq 0$

因此：

$$\varphi_i Q'_i=\sum_k \varphi_k Q'_k=\sum_k \varphi'_k Q_k=\varphi'_j Q_j$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_i C_{ij}\varphi'_j=\varphi'_j C_{ji}\varphi_i \quad\Longrightarrow\quad C_{ij}=C_{ji}$$

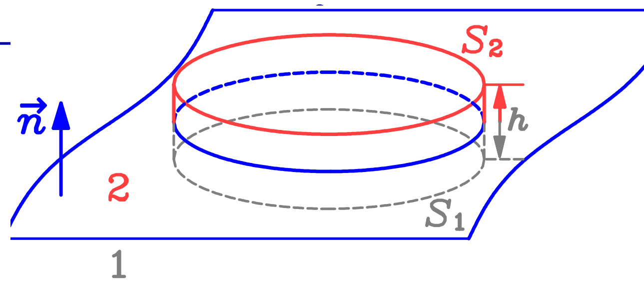
例 3：教材 p70, 例题5

† “接地”易引起物理上的歧义。因为接地在某种意义上易被以为是导体的位置改变，从而使人误以为 C_{ij} 也发生改变
实际上，可以认为人们在各导体球上放置电荷，使得第 i 个导体电势为 φ_i，其余导体电势为 0
那么，紧接着的问题是，能否通过放置电荷实现这种电势分布？ —— 思考

五、作用于导体表面的静电力

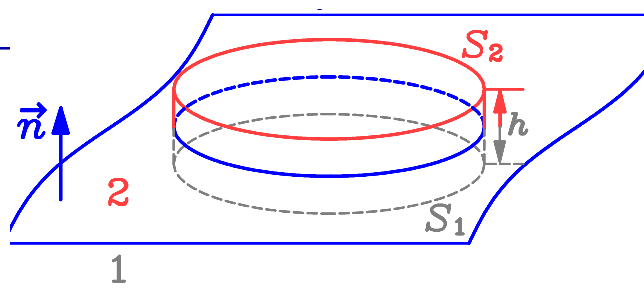
五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。



五、作用于导体表面的静电力

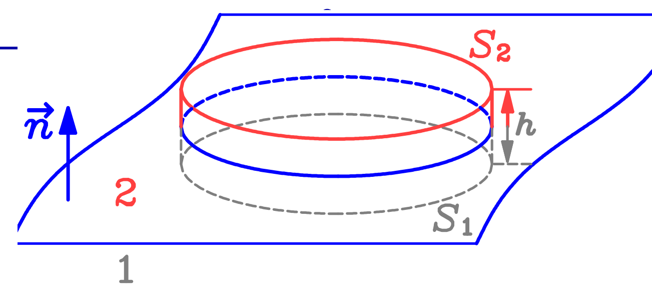
放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $d\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

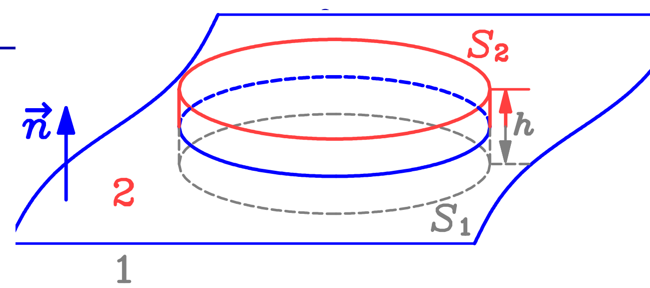


五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量: $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}})\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$



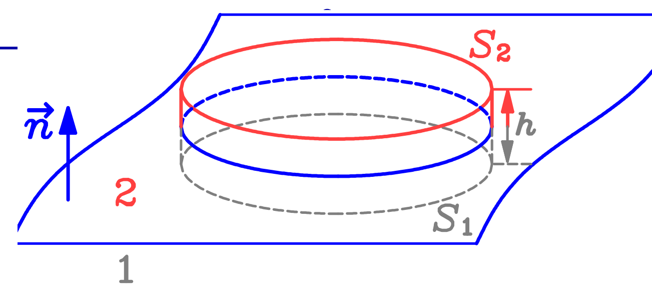
五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量：
$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$$

导体表面受力：
$$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$$



五、作用于导体表面的静电力

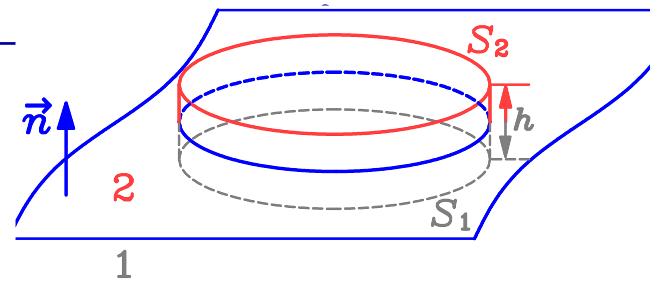
放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量：$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E})\overleftrightarrow{I} - \vec{D}\vec{E}$

导体表面受力：$\vec{F}_s = -\oint_{\mathcal{S}} (\vec{n}\cdot\overleftrightarrow{T})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

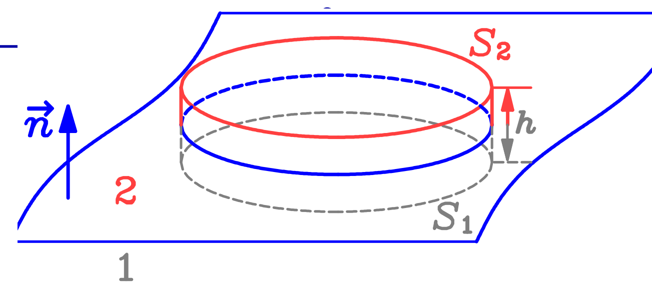
作用于导体表面 $d\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}) d\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0$, $\vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$　　$\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

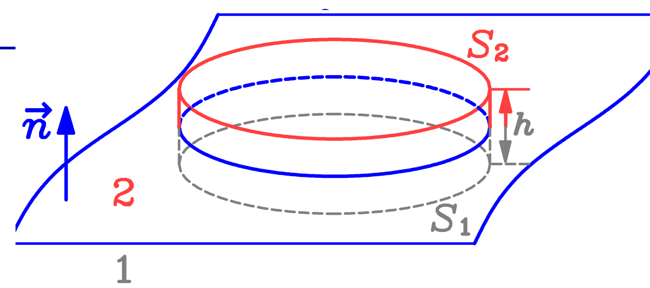
作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量： $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含： 导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0$, $\vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$ $\quad \vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$ $\quad S_1$ 和 S_c 的面积分为 0



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

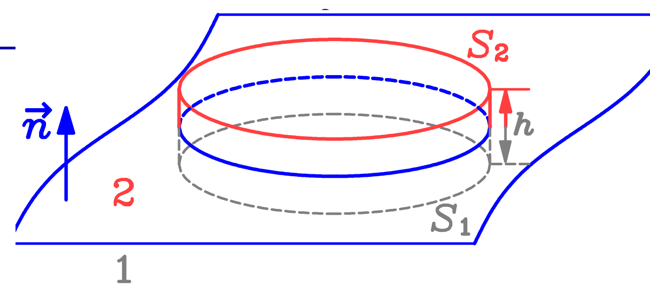
动量流密度张量：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0$，$\vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$　　$\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$　S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $\mathrm{d}\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

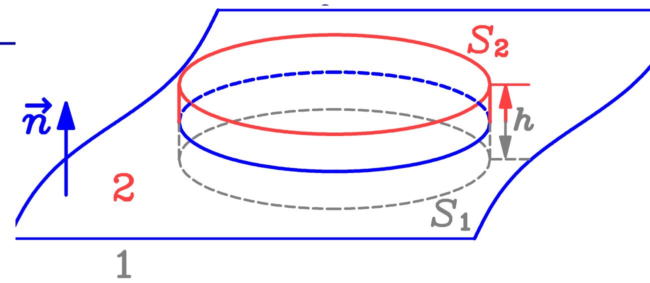
动量流密度张量：$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$　　$\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$　　S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$　　（假设导体外为线性各向同性介质）



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 dσ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量： $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

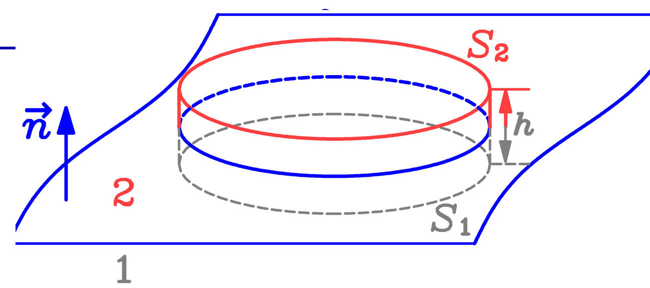
导体表面受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含： 导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$ $\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2 \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$ S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$ （假设导体外为线性各向同性介质）

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$： $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_q$



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $\mathrm{d}\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

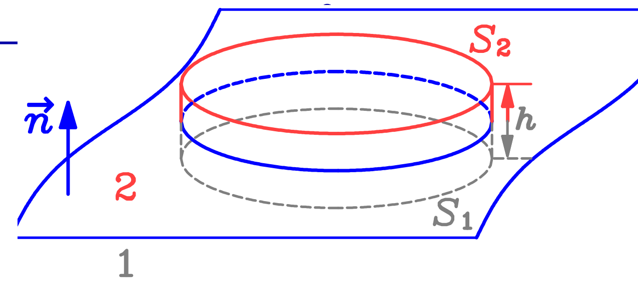
导体表面受力：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$　　$\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$　S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向：$\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$　（假设导体外为线性各向同性介质）

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$：$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_q \Rightarrow \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\epsilon E_2\vec{\boldsymbol{n}}) = \sigma_q$



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $\mathrm{d}\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}-\vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

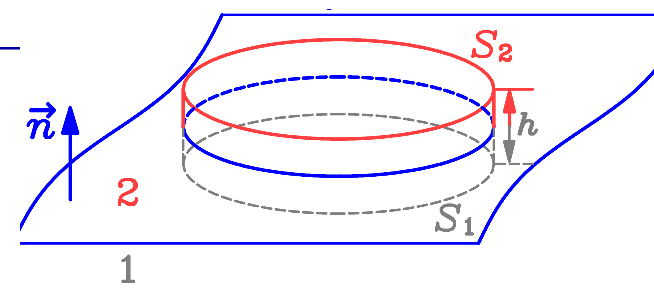
导体表面受力：$\vec{\boldsymbol{F}}_s=-\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含：导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1=0$, $\vec{\boldsymbol{D}}_1=0$ $\quad\vec{\boldsymbol{F}}_s=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2-\frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$ S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向：$\vec{\boldsymbol{F}}_s=\frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$ （假设导体外为线性各向同性介质）

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1=0$, $\vec{\boldsymbol{D}}_1=0$: $\quad\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2-\vec{\boldsymbol{D}}_1)=\sigma_q\Rightarrow\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\epsilon E_2\vec{\boldsymbol{n}})=\sigma_q\Rightarrow\vec{\boldsymbol{E}}_2=\frac{\sigma_q}{\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}$



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $\mathrm{d}\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量： $\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}} (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

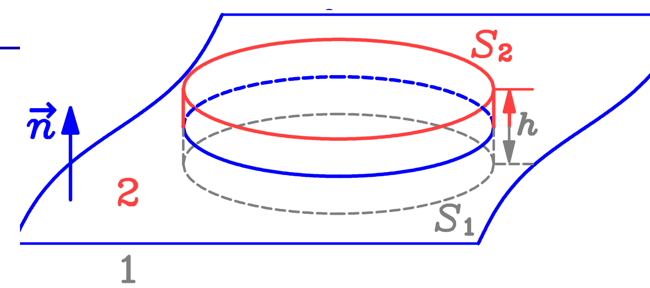
$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含： 导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$ $\quad \vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$ $\quad S_1$ 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$ （假设导体外为线性各向同性介质）

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$： $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_q \Rightarrow \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\epsilon E_2\vec{\boldsymbol{n}}) = \sigma_q \Rightarrow \vec{\boldsymbol{E}}_2 = \frac{\sigma_q}{\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}$

导体单位面积受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\sigma_q^2}{2\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}$ 负压力



五、作用于导体表面的静电力

放在静电场中的导体会受到静电场的作用力。

作用于导体表面 $\mathrm{d}\sigma$ 等于单位时间流入导体面的动量

动量流密度张量： $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} - \vec{\boldsymbol{D}}\vec{\boldsymbol{E}}$

导体表面受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = -\oint_{\mathcal{S}}(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}})\mathrm{d}\sigma$

$\mathcal{S}$ 是一扁平盒，包含： 导体内部的面 S_1，垂直于表面的侧面 S_c和导体外部的面 S_2

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$ $\vec{\boldsymbol{F}}_s = (\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{D}}_2)\vec{\boldsymbol{E}}_2 - \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{D}}_2\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_2)\vec{\boldsymbol{n}}$ S_1 和 S_c 的面积分为 0

电场沿导体表面法向： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\epsilon}{2}\vec{\boldsymbol{E}}_2^2\,\vec{\boldsymbol{n}}$ （假设导体外为线性各向同性介质）

导体内 $\vec{\boldsymbol{E}}_1 = 0,\ \vec{\boldsymbol{D}}_1 = 0$: $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{D}}_2 - \vec{\boldsymbol{D}}_1) = \sigma_q \Rightarrow \vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\epsilon E_2\vec{\boldsymbol{n}}) = \sigma_q \Rightarrow \vec{\boldsymbol{E}}_2 = \frac{\sigma_q}{\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}$

导体单位面积受力： $\vec{\boldsymbol{F}}_s = \frac{\sigma_q^2}{2\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}$ 负压力

整个导体受力： $\vec{\boldsymbol{F}} = \oint \frac{\sigma_q^2}{2\epsilon}\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$

思考：

思考：

$$\begin{cases} \text{静电场电磁动量密度} \qquad \vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \end{cases}$$

思考：

$$
\begin{cases}
\text{静电场电磁动量密度} & \vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\
\text{计算受力时，动量流密度} & \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \neq 0
\end{cases}
$$

思考：

$$\begin{cases} \text{静电场电磁动量密度} & \vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \text{计算受力时，动量流密度} & \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{没有动量密度，何来动量流?}$$

思考：

$$\begin{cases} \text{静电场电磁动量密度} & \vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \\ \text{计算受力时，动量流密度} & \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{没有动量密度，何来动量流?}$$

能量密度、动量密度、动量流密度（三维）张量构成相对论中的四维能动张量，是一个物理量。这个物理量必须用四维能动张量（共 16 个分量）才能完全描述。没有三维动量，相当于四维能动张量中某些分量为 0，但三维动量流张量是四维能动张量的其它分量，可以不为 0。

思考：

$$\begin{cases} \text{静电场电磁动量密度} & \vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = 0 \\ \text{计算受力时，动量流密度} & \overleftrightarrow{T} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{没有动量密度，何来动量流？}$$

能量密度、动量密度、动量流密度（三维）张量构成相对论中的四维能动张量，是一个物理量。这个物理量必须用四维能动张量（共 16 个分量）才能完全描述。没有三维动量，相当于四维能动张量中某些分量为 0，但三维动量流张量是四维能动张量的其它分量，可以不为 0。

例如，必须用三维矢量才能描述三维空间的力，若只用力的 x 分量来描述力，就会得到力为 0，而物体的动量却发生改变这一难以理解的现象。或者说，若不把力看成一个三维矢量，而是只看力的 x 分量，就会难以理解为何没有“力”，而物体的动量却会改变。