§ 2.1 库仑定律　静电场的散度和旋度

§ 2.1 库仑定律　静电场的散度和旋度

一、库仑定律

§ 2.1 库仑定律　静电场的散度和旋度

一、库仑定律

真空中两静止点电荷的相互作用力：

§ 2.1 库仑定律　静电场的散度和旋度

一、库仑定律

真空中两静止点电荷的相互作用力：　　Coulomb 1785,　Cavendish 1773

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2\,\vec{\boldsymbol{R}}_{21}}{R_{21}^3} \tag{1}$$

§ 2.1 库仑定律　静电场的散度和旋度

一、库仑定律

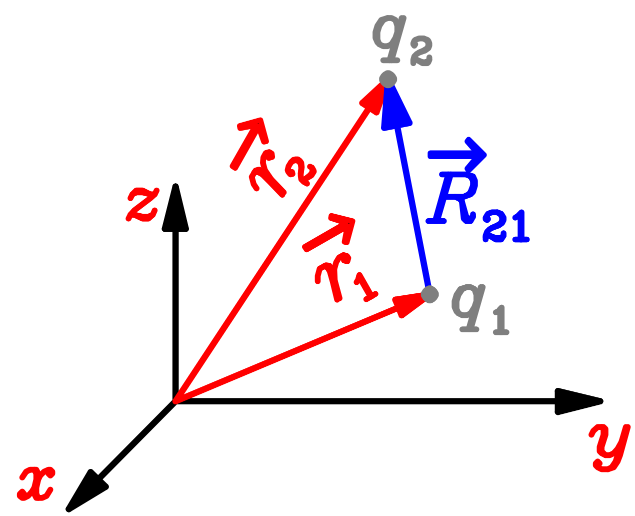
真空中两静止点电荷的相互作用力：　　Coulomb 1785,　Cavendish 1773

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2\, \vec{\boldsymbol{R}}_{21}}{R_{21}^3} \tag{1}$$

$\vec{\boldsymbol{F}}_{21}$ 表示点电荷 q_2 受点电荷 q_1 的作用力，

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{21} = \vec{\boldsymbol{r}}_2 - \vec{\boldsymbol{r}}_1, \quad R_{21} = \left|\vec{\boldsymbol{R}}_{21}\right|$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$



几点说明：

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。

Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).

2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \frac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离
4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \frac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离
4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；
5. 静止点电荷作用于运动点电荷的力，也满足库仑定律；

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离
4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；
5. 静止点电荷作用于运动点电荷的力，也满足库仑定律；
6. 相互作用通过场传递，而非超距作用；

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。

   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).

2. 适用范围：$10^{-17}\, m \sim 10^{7}\, m$

3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离

4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；

5. 静止点电荷作用于运动点电荷的力，也满足库仑定律；

6. 相互作用通过场传递，而非超距作用；

   静电场：相对于观察者静止的电荷分布产生的电场

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离
4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；
5. 静止点电荷作用于运动点电荷的力，也满足库仑定律；
6. 相互作用通过场传递，而非超距作用；

   静电场：相对于观察者静止的电荷分布产生的电场

   电场： 相对于观察者静止的单位正点电荷的受力:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

几点说明：

1. 平方反比向心力：如：$F_{21} \sim \dfrac{1}{R_{21}^{2+\eta}}$ 则 $\eta \sim 10^{-15}$ 参见教材 p5 例题。
   Phys. Rev. Lett. **26**, 721 (1971).
2. 适用范围：$10^{-17}\,m \sim 10^{7}\,m$
3. 点电荷：数学模型：带电体几何尺度 $\ll$ 带电体间的距离
4. 静止：两点电荷相对于观察者静止，而非相对静止；
5. 静止点电荷作用于运动点电荷的力，也满足库仑定律；
6. 相互作用通过场传递，而非超距作用；

   静电场：相对于观察者静止的电荷分布产生的电场

   电场：相对于观察者静止的单位正点电荷的受力:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}} \quad \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{E}} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{q}$$

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\, \vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\, \vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

8. 电荷连续分布：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\, \mathrm{d}\tau'$$

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\,\vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

8. 电荷连续分布：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

9. 点电荷可视为电荷密度为 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_{i=1}^{n} q_i\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_i)$ 的连续电荷分布情况

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

8. 电荷连续分布：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \, (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \, \mathrm{d}\tau'$$

9. 点电荷可视为电荷密度为 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)$ 的连续电荷分布情况

10. 问题：如果电荷分布未知，如何求静电场？

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

8. 电荷连续分布：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \mathrm{d}\tau'$$

9. 点电荷可视为电荷密度为 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)$ 的连续电荷分布情况

10. 问题：如果电荷分布未知，如何求静电场？

—— 散度、旋度、边条

7. 叠加原理：

$$\vec{\boldsymbol{F}}_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_{ji} = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \, \vec{\boldsymbol{R}}_{ji}}{R_{ji}^3} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i \, (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i|^3}$$

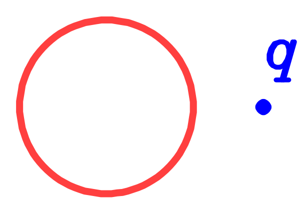
8. 电荷连续分布：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \, (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} \, \mathrm{d}\tau'$$

9. 点电荷可视为电荷密度为 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_i)$ 的连续电荷分布情况

10. 问题：如果电荷分布未知，如何求静电场？

—— 散度、旋度、边条



二、静电场的散度

二、静电场的散度

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

二、静电场的散度

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \nabla \cdot$$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \nabla\cdot \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

二、静电场的散度

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \cdot \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常数

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau'$$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{r}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{r}$，$\rho(\vec{r}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{r}\,')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\cdot\dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r})$$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

即：

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

二、静电场的散度

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\cdot\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，微分 (∇) 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')$

$$= \frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

即：

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

或积分形式：

$$\boxed{\oint\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{\mathrm{enc}}}$$

三、静电场的旋度

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \nabla \times$$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\, \mathrm{d}\tau'}$$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

三、静电场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\times\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla \times \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常数

三、静电场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\times\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\nabla\times\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \nabla \times \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{r}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla \times \left[\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{r}$，$\rho(\vec{r}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\,\nabla \times \left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla \times \dfrac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = 0$

三、静电场的旋度

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla \times \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla \times \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\,\nabla \times \left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla \times \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3} = 0$

$$= 0$$

三、静电场的旋度

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times\boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\,\mathrm{d}\tau'}$$

积分对 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 进行，微分作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$
故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\times\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\,\nabla\times\left[\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\times\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|^3}=0$

$$= 0$$

即：

$$\boxed{\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

三、静电场的旋度

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\times\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

积分对 $\vec{r}\,'$ 进行，微分作用于 $\vec{r}$

故积分微分次序可交换

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\times\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')\,(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

∇ 作用于 $\vec{r}$，$\rho(\vec{r}\,')$ 视为常数

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{r}\,')\,\nabla\times\left[\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

利用 $\nabla\times\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}=0$

$$= 0$$

即：

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = 0$$

或积分形式：

$$\oint_{\mathcal{P}}\vec{E}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

讨论：

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

讨论：

1. 静电场有源无旋，电力线不闭合，始于正电荷，止于负电荷，不会在无电荷的有限远处中断；

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0, \qquad \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

讨论：

1. 静电场有源无旋，电力线不闭合，始于正电荷，止于负电荷，不会在无电荷的有限远处中断；

2. 由矢量场理论知：

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \text{and} \quad \oint \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0,\qquad \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

讨论：

1. 静电场有源无旋，电力线不闭合，始于正电荷，止于负电荷，不会在无电荷的有限远处中断；

2. 由矢量场理论知：

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad \text{and} \quad \oint\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=0$$

$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$ 称为静电势。由于 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$,

故静电势满足泊松方程 $\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})=-\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau',$$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau',$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \text{利用：} \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用：} \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

利用：$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

利用：$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

3. 静电势 $\varphi(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \text{利用：} \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用：} \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

从而

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

利用：$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

从而

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

3. 静电势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

利用：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

利用：$\nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$

从而

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$$

4. $\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\,\varphi(\vec{\boldsymbol{r}})$，称为保守场，$\oint_{\mathcal{P}}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0$。即：电荷在保守场中沿任意闭合路径运动一周，静电场力不做功；

3. 静电势 $\varphi(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \text{利用：} \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \rho(\vec{r}\,')\frac{\vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{利用：} \nabla\frac{1}{R} = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\left[\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\right]\mathrm{d}\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

从而

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\,\varphi(\vec{r})$$

4. $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\,\varphi(\vec{r})$，称为保守场，$\oint_{\mathcal{P}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$。即：电荷在保守场中沿任意闭合路径运动一周，静电场力不做功；静电力做功与路径无关。

四、例题

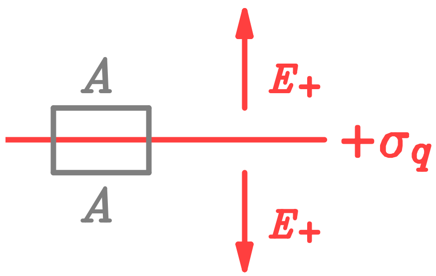
四、例题

例 1：求面电荷密度为σ_q的无穷大平面在空间产生的电场。
两平行无穷大平面，分别带电$\pm\sigma_q$，求空间电场。

四、例题

例 1：求面电荷密度为σ_q的无穷大平面在空间产生的电场。
两平行无穷大平面，分别带电$\pm\sigma_q$，求空间电场。

作如图高斯面并利用对称性：



四、例题

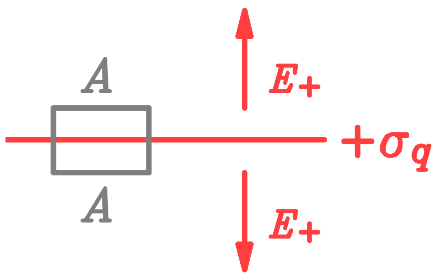
例 1：求面电荷密度为σ_q的无穷大平面在空间产生的电场。
两平行无穷大平面，分别带电$\pm\sigma_q$，求空间电场。

作如图高斯面并利用对称性：

$$\oint \vec{n}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0}Q_{\text{enc}}$$

$$2A|\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_q A$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2}\frac{\sigma_q}{\epsilon_0},$$ 方向如图所示



四、例题

例 1：求面电荷密度为σ_q的无穷大平面在空间产生的电场。
两平行无穷大平面，分别带电$\pm\sigma_q$，求空间电场。

作如图高斯面并利用对称性：

$$\oint \vec{n}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\rm enc}$$

$$2A|\vec{E}| = \frac{1}{\epsilon_0}\sigma_q A$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{2}\frac{\sigma_q}{\epsilon_0},\quad \text{方向如图所示}$$

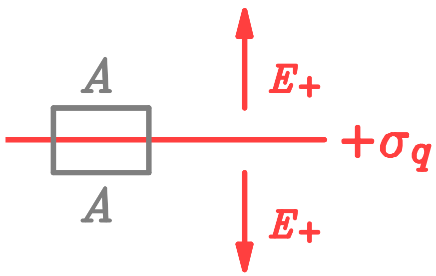


图1

对于两平行平面情况，
利用叠加原理，如图示，可得

在两平行平面之间： $|\vec{E}| = \dfrac{\sigma_q}{\epsilon_0}$

其它区域： $|\vec{E}| = 0$

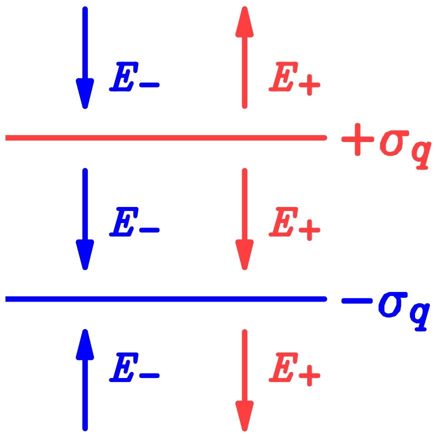


图2

例 2：求电偶极子的静电势。

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad\Longrightarrow\quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad\Longrightarrow\quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad\Longrightarrow\quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中：$R = |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' \end{aligned}$$

其中： $R = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad\Longrightarrow\quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}') = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\right]\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

其中： $R = |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = -\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

其中： $R = |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|$

利用： $\displaystyle\int\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\cdot\nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau' = -\left[\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{a}}}$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla' \delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\, \mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla' \delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\, \mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \right] \cdot \nabla' \delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\, \mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\nabla' \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} \right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}_0}
\end{aligned}$$

其中： $R = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|$

利用：

$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \cdot \nabla' \delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{a}})\, \mathrm{d}\tau' = -\left[\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{a}}}$$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{r}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) \quad\Longrightarrow\quad \rho(\vec{r}\,') = -\vec{p}\cdot\nabla'\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)$$

代入电势表达式：

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau'$$

其中： $R = |\vec{r}-\vec{r}\,'|$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{-\vec{p}\cdot\nabla'\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\cdot\nabla'\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)\,\mathrm{d}\tau'$$

利用： $\int\vec{g}(\vec{r}\,')\cdot\nabla'\delta(\vec{r}\,'-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau' = -\left[\nabla'\cdot\vec{g}(\vec{r}\,')\right]_{\vec{r}\,'=\vec{a}}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla'\cdot\frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0}$$

例 2：求电偶极子的静电势。

位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的电偶极子的电荷密度可表为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \quad \Longrightarrow \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

代入电势表达式：

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{R}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{-\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right] \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\nabla' \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{p}}}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0}
\end{aligned}$$

其中： $R = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|$

利用：
$$\int \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') \cdot \nabla'\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau' = -\left[\nabla' \cdot \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{a}}}$$

$\Uparrow$

利用 $\nabla \cdot (\vec{\boldsymbol{c}}\, g) = \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \nabla g$

故，电偶极子的静电势为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}\end{aligned}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0}\\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}\end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{r}_0 = 0$）

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\,\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}\end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|^3}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 = 0$）

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

利用 $\nabla(\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{g}}) = (\nabla\,\vec{\boldsymbol{g}})\cdot\vec{\boldsymbol{c}}$

故，电偶极子的静电势为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0}$$
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{r}_0 = 0$）

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

利用 $\nabla(\vec{c}\cdot\vec{g}) = (\nabla\vec{g})\cdot\vec{c}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(\nabla\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\overleftrightarrow{W}}\cdot\vec{p}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{r}_0 = 0$）

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

利用 $\nabla(\vec{c}\cdot\vec{g}) = (\nabla\vec{g})\cdot\vec{c}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(\nabla\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\overleftrightarrow{W}}\cdot\vec{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}W_{ij}p_j\,\hat{e}_i$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{r}_0 = 0$）

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

利用 $\nabla(\vec{c}\cdot\vec{g}) = (\nabla\vec{g})\cdot\vec{c}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(\nabla\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\overleftrightarrow{W}}\cdot\vec{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}W_{ij}p_j\,\hat{e}_i$$

而：$W_{ij} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{r})\delta_{ij} + \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$

或：$\overleftrightarrow{W} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{r})\overleftrightarrow{I} + \frac{3\vec{r}\vec{r} - r^2\overleftrightarrow{I}}{r^5}$

§1.6, p9, 例1

故，电偶极子的静电势为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\right]_{\vec{\boldsymbol{r}}\,'=\vec{\boldsymbol{r}}_0}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|^3}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 = 0$）

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right)$$

利用 $\nabla(\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{g}}) = (\nabla\,\vec{\boldsymbol{g}})\cdot\vec{\boldsymbol{c}}$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(\nabla\,\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}W_{ij}p_j\,\hat{\boldsymbol{e}}_i$$

而：$W_{ij} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\delta_{ij} + \frac{3x_i\,x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$

或：$\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}} + \frac{3\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}} - r^2\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}}{r^5}$

§1.6, p9, 例1

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\,\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\,\vec{\boldsymbol{p}}}{r^5}$$

故，电偶极子的静电势为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\vec{p}\cdot\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]_{\vec{r}\,'=\vec{r}_0} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}}$$

电偶极子的静电场为（为简单起见，设 $\vec{r}_0 = 0$）

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\left(\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\underbrace{\left(\nabla\nabla\frac{1}{r}\right)}_{\overleftrightarrow{W}}\cdot\vec{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}W_{ij}p_j\,\hat{e}_i \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{r})\,\vec{p}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{3\epsilon_0}\,\delta(\vec{r})\end{aligned}$$

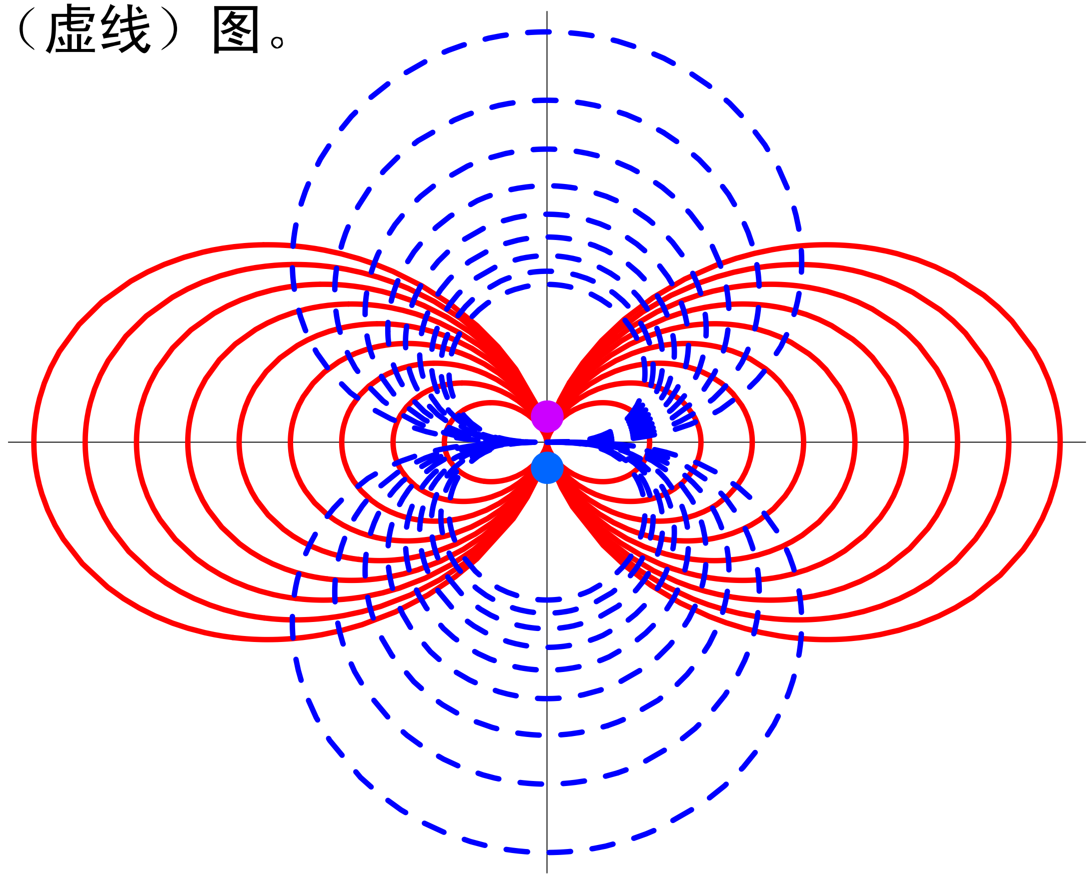
利用 $\nabla(\vec{c}\cdot\vec{g}) = (\nabla\vec{g})\cdot\vec{c}$

而：$W_{ij} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{r})\delta_{ij} + \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$

或：$\overleftrightarrow{W} = -\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{r})\overleftrightarrow{I} + \frac{3\vec{r}\vec{r}-r^2\overleftrightarrow{I}}{r^5}$

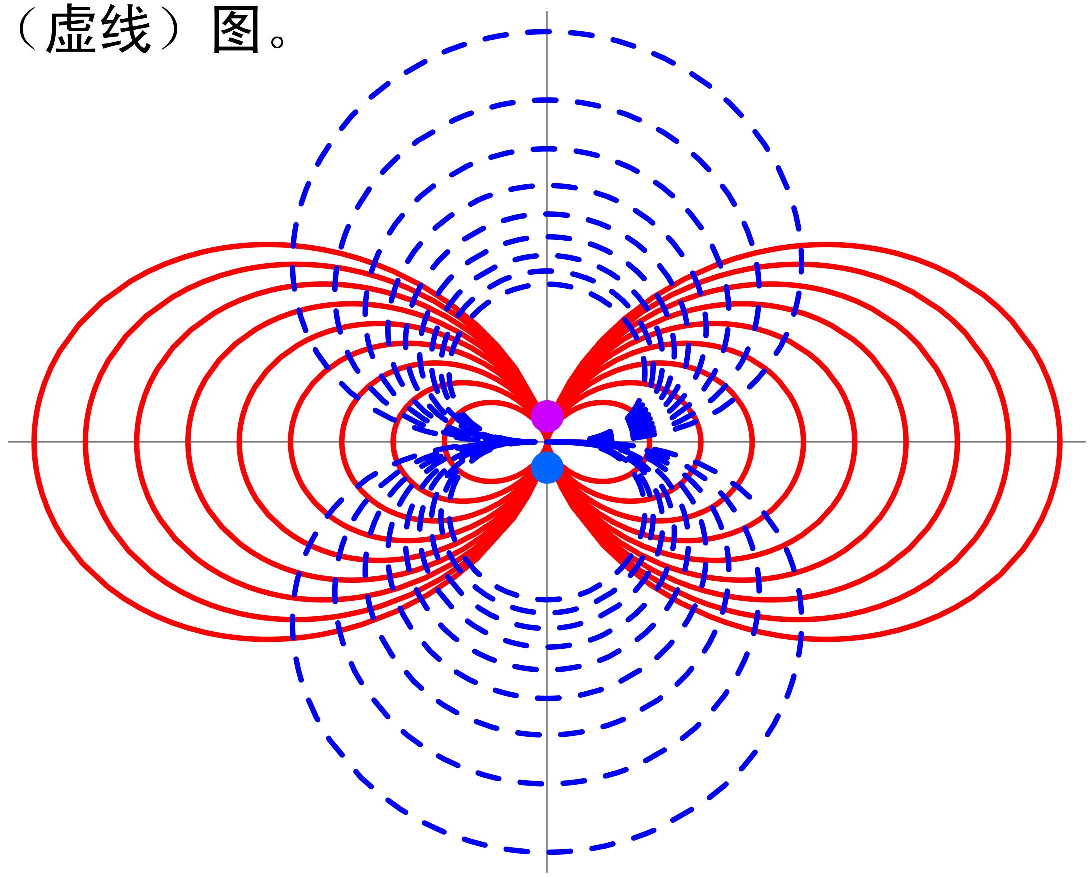
§1.6, p9, 例1

电偶极子电力线（实线）和等势线（虚线）图。



电偶极子电力线（实线）和等势线（虚线）图。

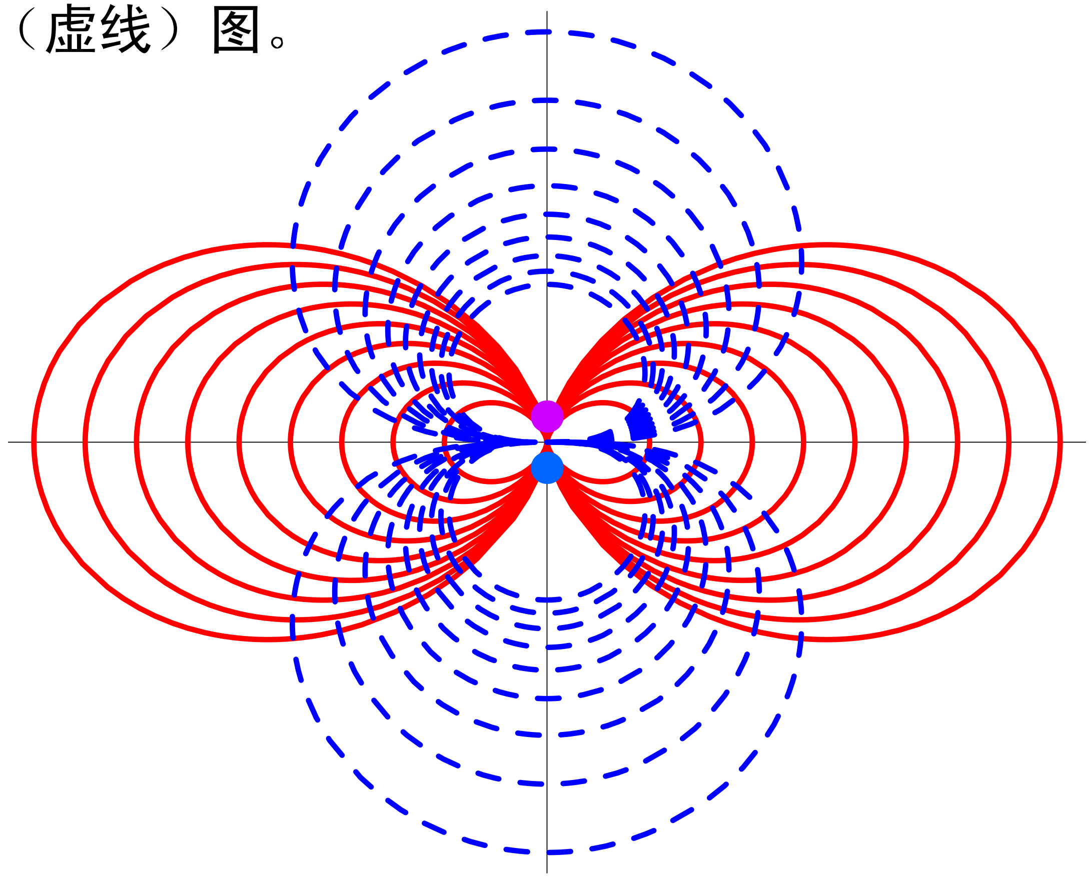
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$



电偶极子电力线（实线）和等势线（虚线）图。

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

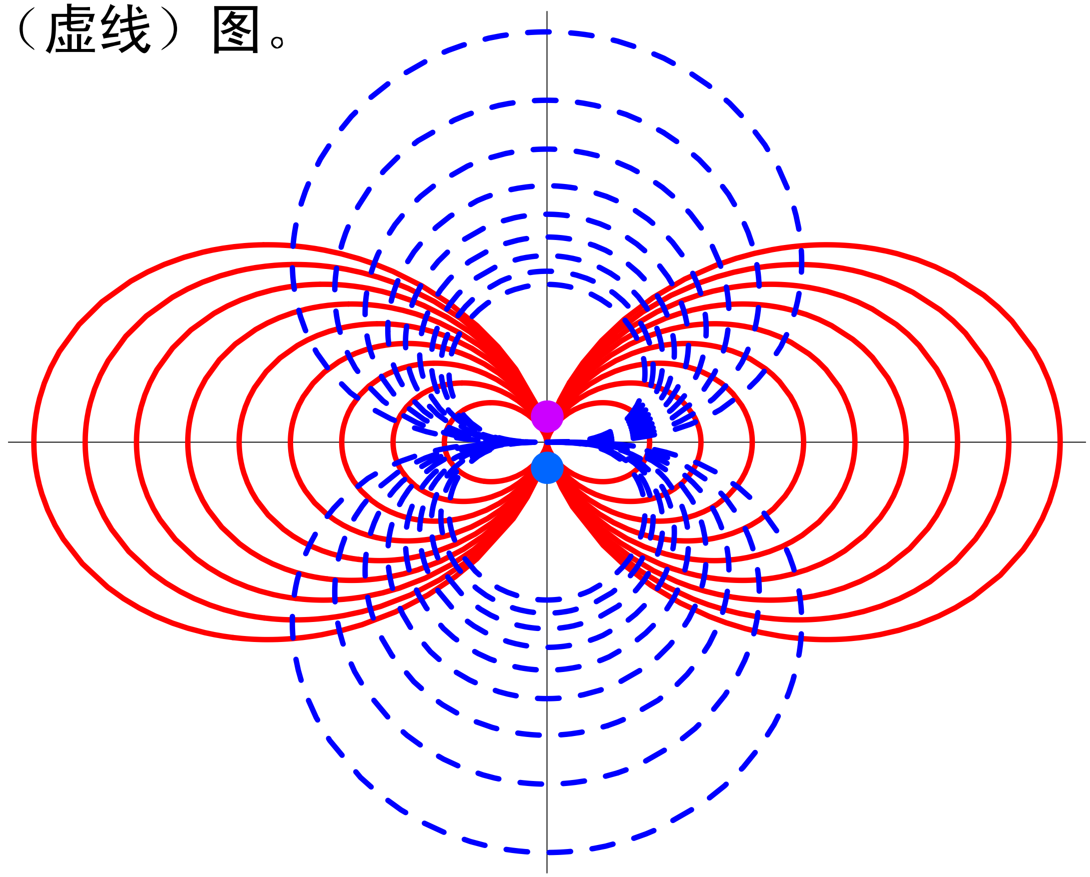
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{p})\,\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{r})\,\vec{p}}{r^5}$$



电偶极子电力线（实线）和等势线（虚线）图。

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\,\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\,\vec{\boldsymbol{p}}}{r^5} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \hat{\boldsymbol{e}}_z}{r^3}$$

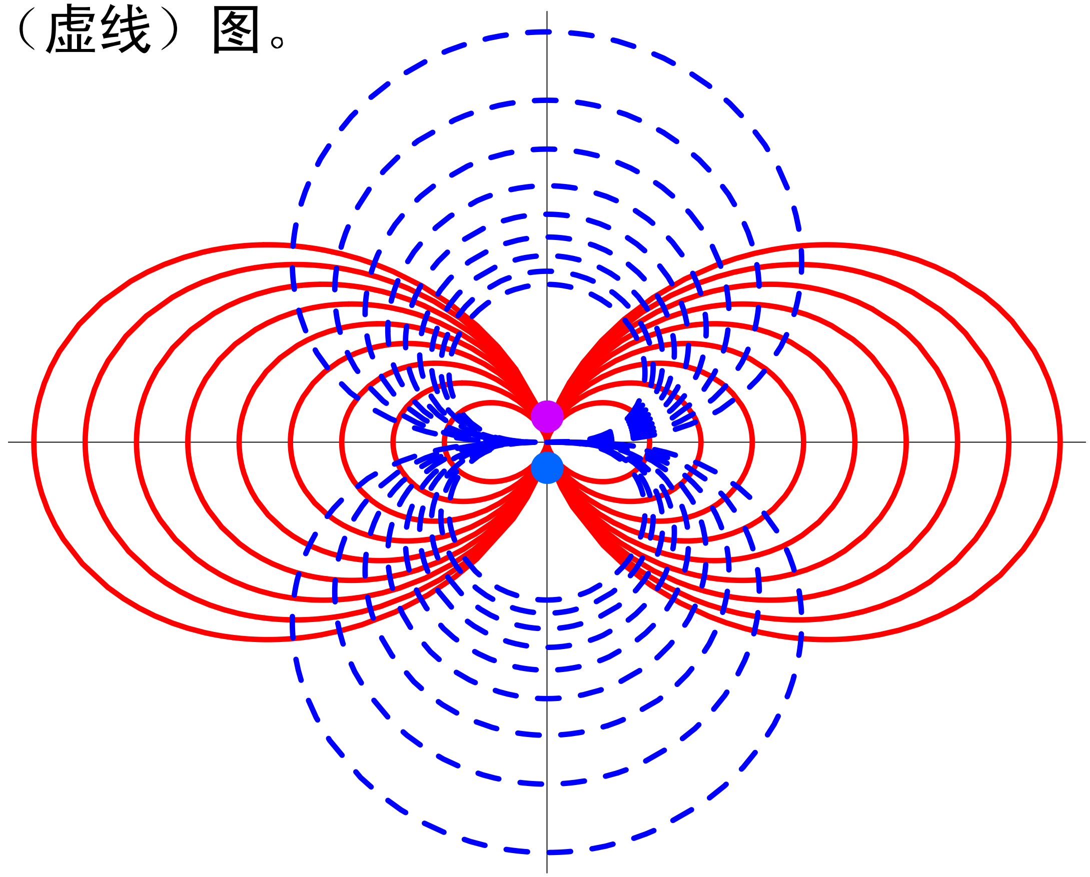


电偶极子电力线（实线）和等势线（虚线）图。

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{p}})\,\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}})\,\vec{\boldsymbol{p}}}{r^5}$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \hat{\boldsymbol{e}}_z}{r^3} \qquad (\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0)$$



例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子：　一正点电荷和一负点电荷相距无限小

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子:　一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩:　$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子：一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层：一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子：一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层：一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度：单位面积的电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{D}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子: 一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩: $\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层: 一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度: 单位面积的电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{D}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{\boldsymbol{l}}$ 其中 σ_q 为面电荷密度

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子: 一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩: $\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层: 一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度: 单位面积的电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{D}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{\boldsymbol{l}}$ 其中 σ_q 为面电荷密度

由电偶极子静电势表达式

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子： 一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩： $\vec{p} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{l}$

电偶层： 一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度： 单位面积的电偶极矩：$\vec{D} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{l}$ 其中 σ_q 为面电荷密度

由电偶极子静电势表达式

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子： 一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩： $\vec{p} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{l}$

电偶层： 一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度： 单位面积的电偶极矩：$\vec{D} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{l}$ 其中 σ_q 为面电荷密度

由电偶极子静电势表达式

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

和叠加原理，可得电偶层静电势应为

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子：　一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩：　$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层：　一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度：　单位面积的电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{D}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{\boldsymbol{l}}$　其中 σ_q 为面电荷密度

由电偶极子静电势表达式

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|^3}$$

和叠加原理，可得电偶层静电势应为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \underbrace{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$$

例 3：求电偶层在空间产生的静电势。

电偶极子：一正点电荷和一负点电荷相距无限小

电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ q \to \infty}} q\,\vec{\boldsymbol{l}}$

电偶层：一层正面电荷和一层负面电荷相距无限小

电偶层强度：单位面积的电偶极矩：$\vec{\boldsymbol{D}} = \lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\,\vec{\boldsymbol{l}}$ 其中 σ_q 为面电荷密度

由电偶极子静电势表达式

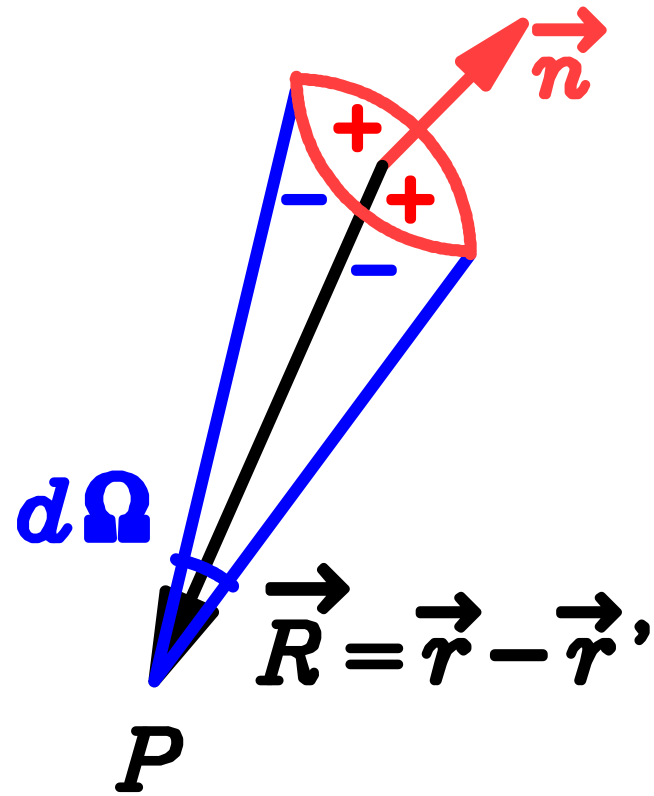
$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|^3}$$

和叠加原理，可得电偶层静电势应为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \underbrace{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{\boldsymbol{D}}(\vec{\boldsymbol{r}}')}_{\vec{\boldsymbol{p}}}\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} \qquad \text{其中：} \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'$$

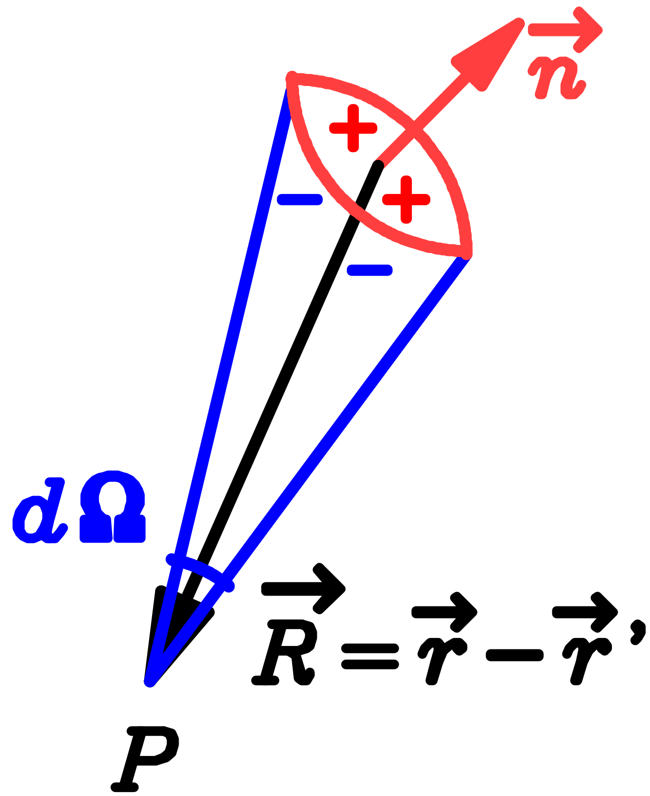
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma' \, \vec{D}(\vec{r}\,') \cdot \frac{\vec{R}}{R^3}$$



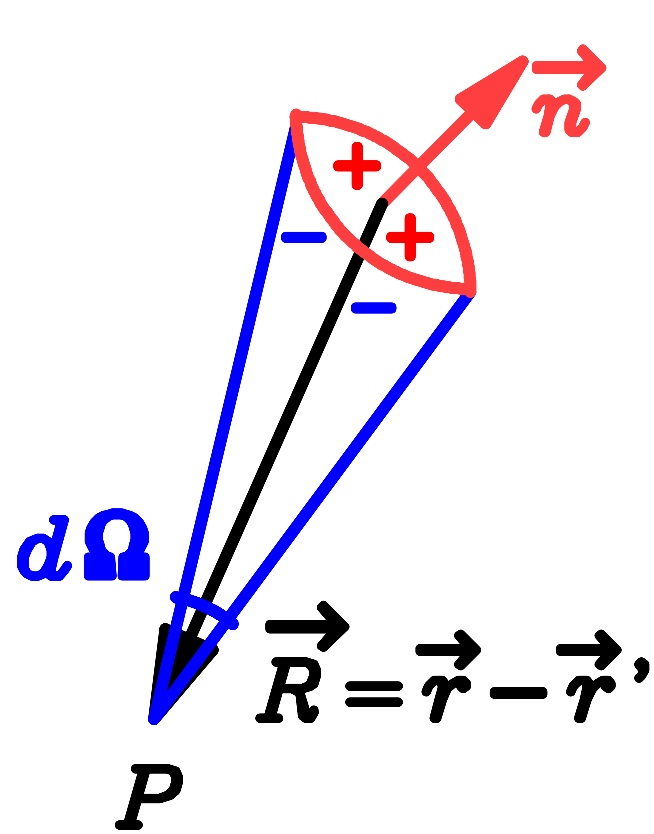
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\,\vec{D}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\,D(\vec{r}\,')\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$



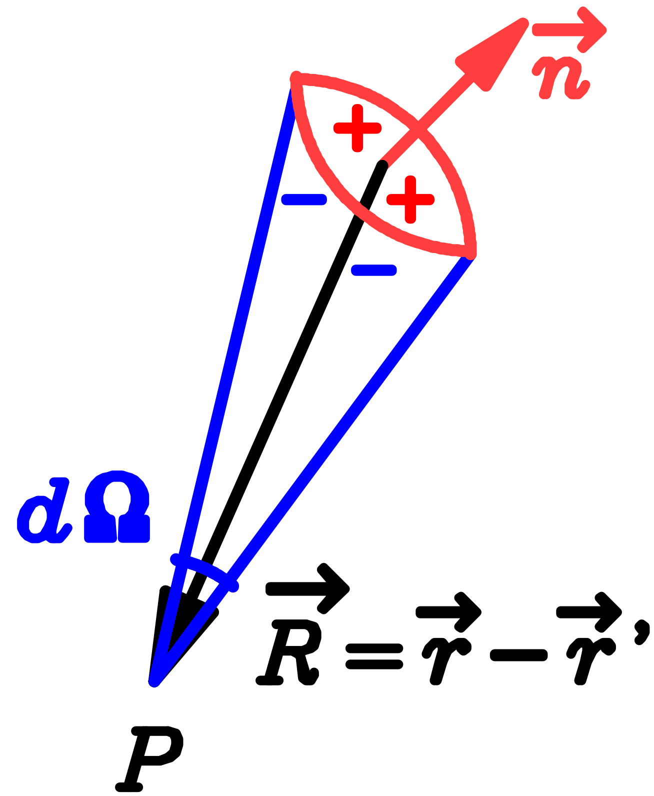
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, \vec{D}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, D(\vec{r}\,')\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3}\end{aligned}$$



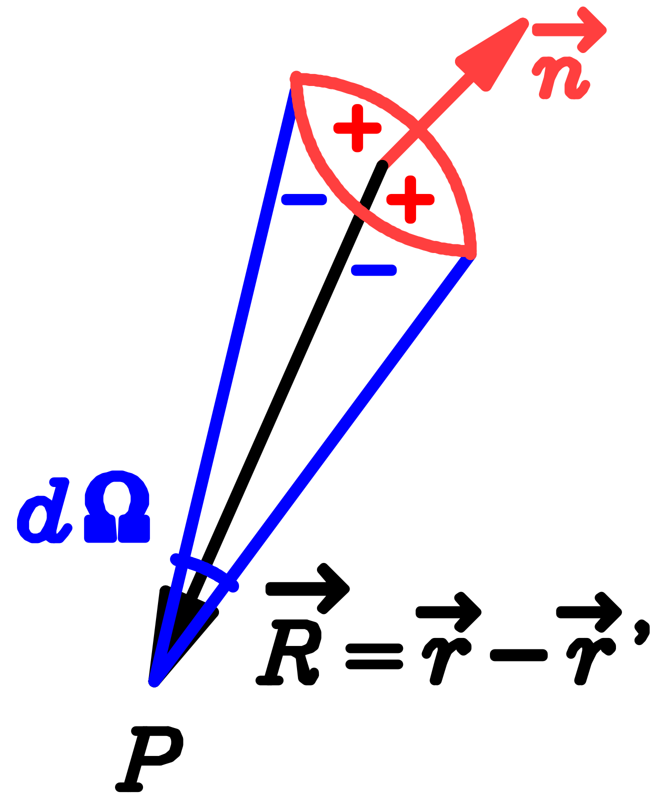
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, \vec{D}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, D(\vec{r}\,')\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3}\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{e}_R}{R^2}\end{aligned}$$



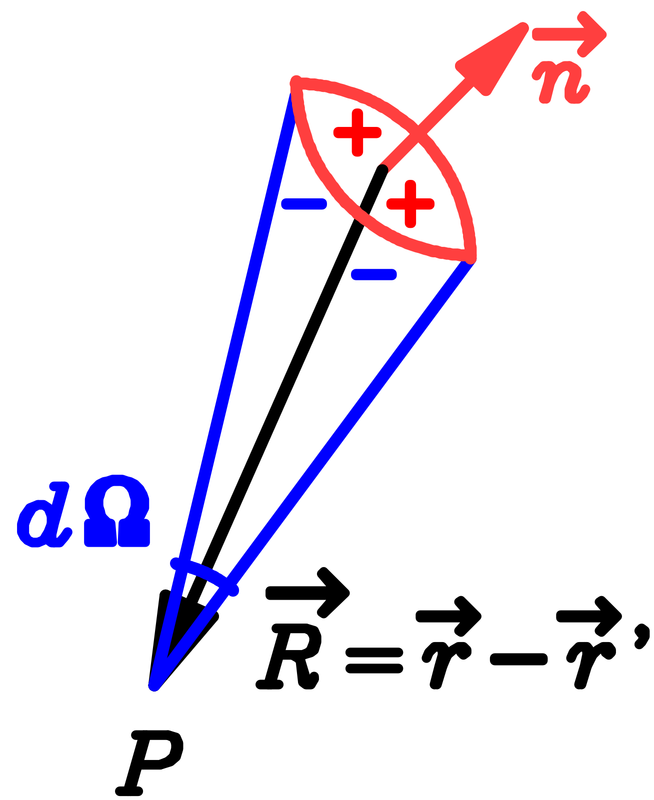
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, \vec{D}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\, D(\vec{r}\,')\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{e}_R}{R^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\,d\,\Omega
\end{aligned}$$



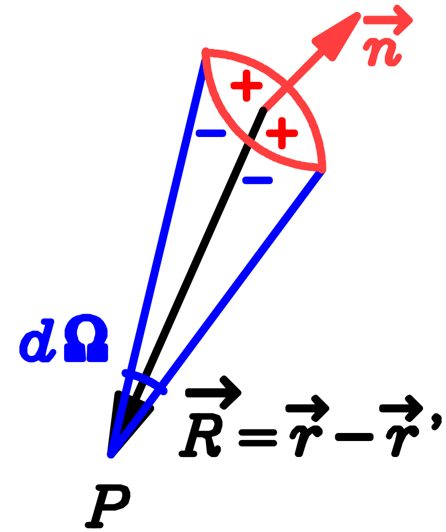
取面元法向为 $\vec{D}$ 的方向（从负电荷层指向正电荷层），电偶层静电势化为

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\,\vec{D}(\vec{r}\,')\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}\sigma'\,D(\vec{r}\,')\,\vec{n}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{R}}{R^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\frac{\mathrm{d}\sigma'\,\vec{n}\cdot\vec{e}_R}{R^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int D(\vec{r}\,')\,d\Omega
\end{aligned}$$



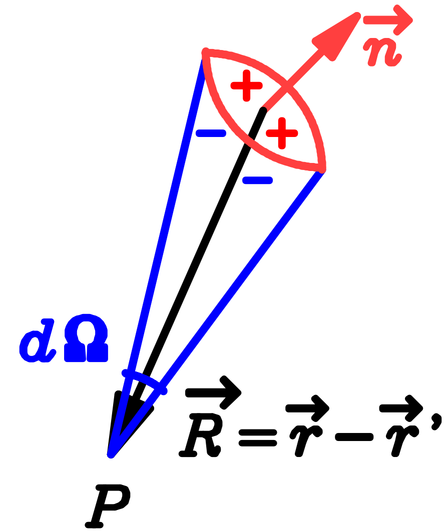
$d\Omega$ 为面积元 $d\sigma'$ 对观察点所张的立体角。当观察点对着电偶层负电荷侧时 $d\Omega$ 为正（电势为负），反之为负。

例 4：求电偶层两边的电势差。



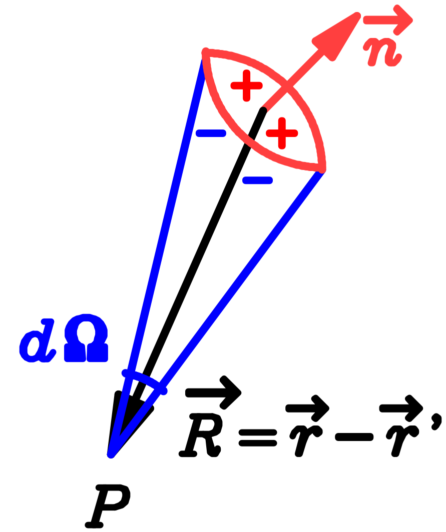
例 4：求电偶层两边的电势差。

$$\Delta\varphi = \varphi_{正电荷侧} - \varphi_{负电荷侧}$$



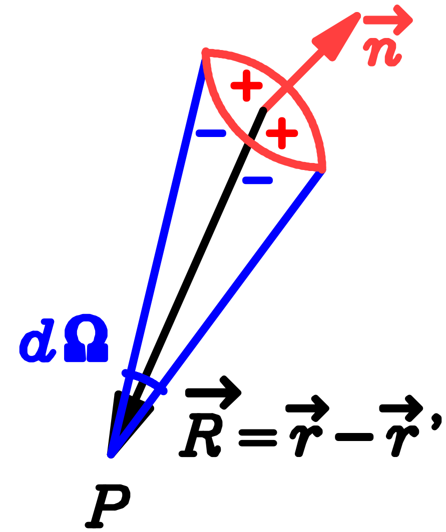
例 4：求电偶层两边的电势差。

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{正电荷侧}} - \varphi_{\text{负电荷侧}}$$
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{正}} D(\vec{r}\,')d\,\Omega$$



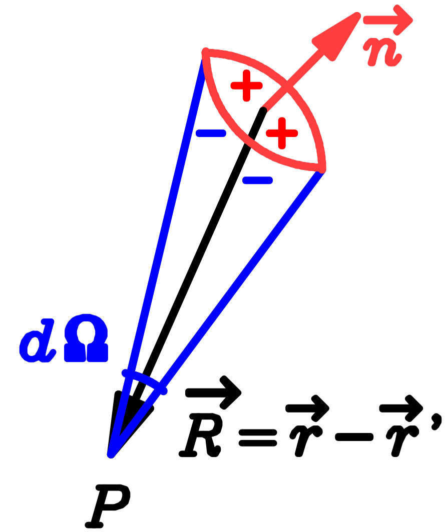
例 4：求电偶层两边的电势差。

$$\Delta\varphi = \varphi_{\text{正电荷侧}} - \varphi_{\text{负电荷侧}}$$
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{正}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega$$
$$-\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{负}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega\right]$$



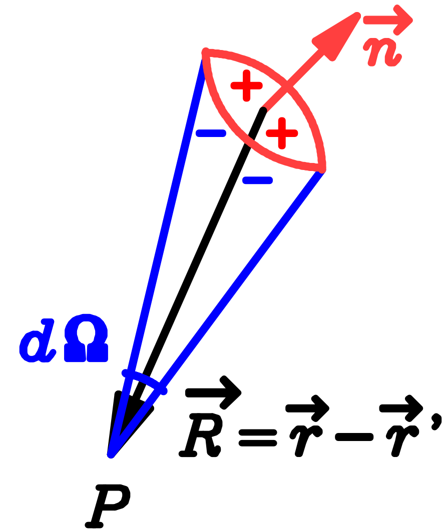
例 4：求电偶层两边的电势差。

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_{\text{正电荷侧}} - \varphi_{\text{负电荷侧}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{正}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega \\ &\quad -\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{负}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})\Delta\Omega_{\text{正}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})\Delta\Omega_{\text{负}}\end{aligned}$$



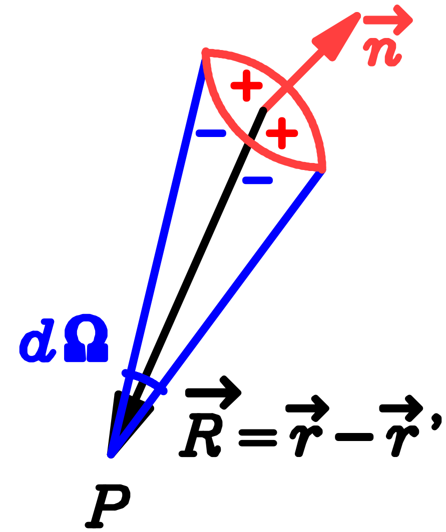
例 4：求电偶层两边的电势差。

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_{\text{正电荷侧}} - \varphi_{\text{负电荷侧}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{正}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega \\ &\quad -\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{负}} D(\vec{\boldsymbol{r}}')d\,\Omega\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})\Delta\Omega_{\text{正}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})\Delta\Omega_{\text{负}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})(-2\pi) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{\boldsymbol{r}})(2\pi)\end{aligned}$$



例 4：求电偶层两边的电势差。

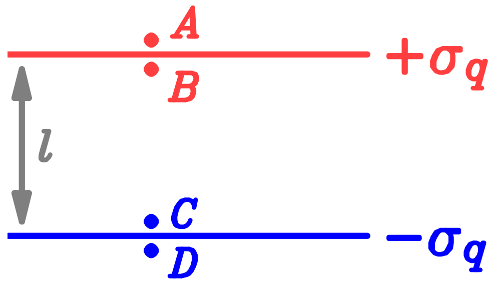
$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \varphi_{\text{正电荷侧}} - \varphi_{\text{负电荷侧}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{正}} D(\vec{r}\,')d\,\Omega \\
&\quad -\left[-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{负}} D(\vec{r}\,')d\,\Omega\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{r})\Delta\Omega_{\text{正}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{r})\Delta\Omega_{\text{负}} \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{r})(-2\pi) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}D(\vec{r})(2\pi)
\end{aligned}
$$



故

$$\Delta\varphi = \frac{D(\vec{r})}{\epsilon_0}$$ 电偶极层两侧电势不连续

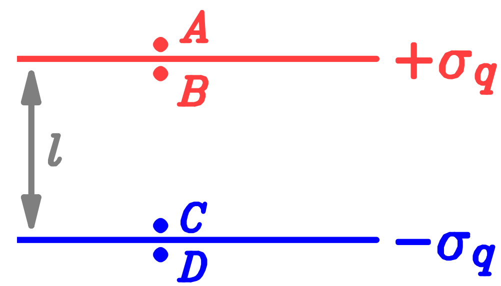
另解　电偶层两边的电势差。



另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

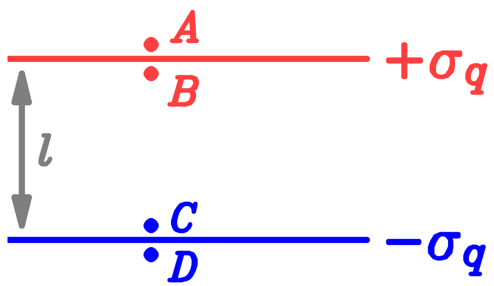


另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

利用 $\varphi_A = \varphi_B$， $\varphi_C = \varphi_D$



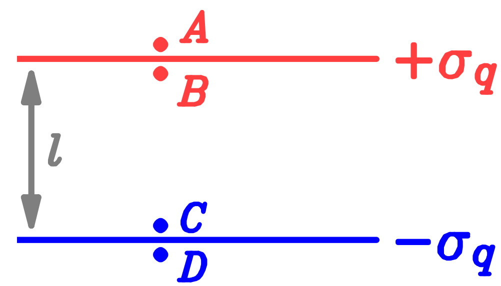
另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

利用 $\varphi_A = \varphi_B$， $\varphi_C = \varphi_D$

$$= \varphi_B - \varphi_C$$



另解　电偶层两边的电势差。

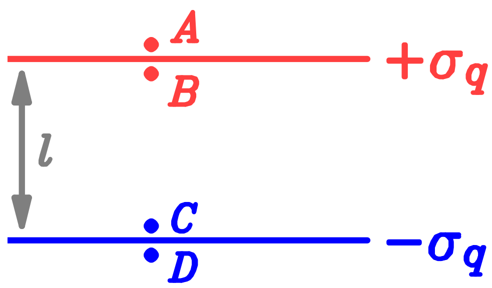
非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

利用 $\varphi_A = \varphi_B$，　$\varphi_C = \varphi_D$

$$= \varphi_B - \varphi_C$$

利用 $\varphi_B - \varphi_C = E\,l = \dfrac{\sigma_q}{\epsilon_0}\,l$



另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

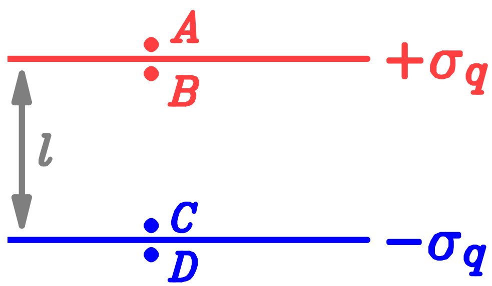
$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

利用 $\varphi_A = \varphi_B$，　$\varphi_C = \varphi_D$

$$= \varphi_B - \varphi_C$$

利用 $\varphi_B - \varphi_C = E\,l = \frac{\sigma_q}{\epsilon_0}\,l$

$$= \frac{\sigma_q\,l}{\epsilon_0}$$



另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

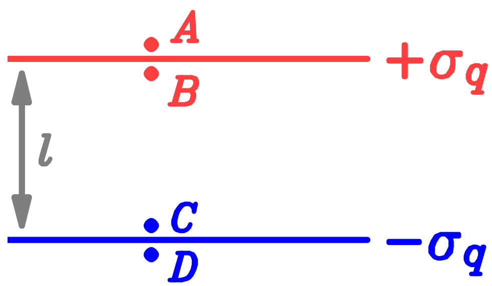
利用 $\varphi_A = \varphi_B, \quad \varphi_C = \varphi_D$

$$= \varphi_B - \varphi_C$$

利用 $\varphi_B - \varphi_C = E\, l = \frac{\sigma_q}{\epsilon_0}\, l$

$$= \frac{\sigma_q\, l}{\epsilon_0}$$

$\lim\limits_{\substack{l \to 0 \\ \sigma_q \to \infty}} \sigma_q\, l = D$ 电偶层强度



另解　电偶层两边的电势差。

非常接近于电偶层时可将电偶层视为平板电容器

$$\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_D$$

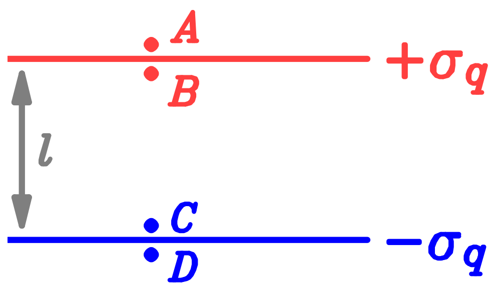
利用 $\varphi_A = \varphi_B$，　$\varphi_C = \varphi_D$

$$= \varphi_B - \varphi_C$$

利用 $\varphi_B - \varphi_C = E\,l = \frac{\sigma_q}{\epsilon_0}\,l$

$$= \frac{\sigma_q\,l}{\epsilon_0}$$

$\lim\limits_{\substack{l\to 0\\ \sigma_q\to\infty}} \sigma_q\,l = D$ 电偶层强度



$$\Delta\varphi = \frac{D(\vec{\boldsymbol{r}})}{\epsilon_0}$$