§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

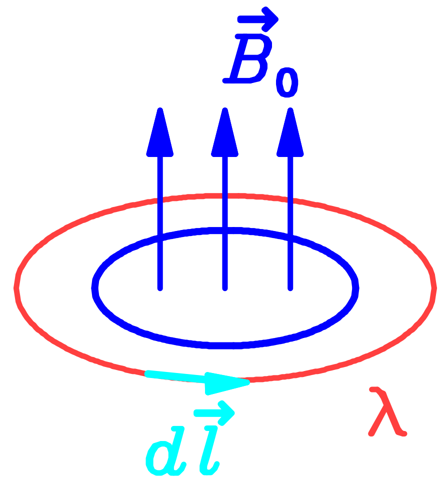
一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4

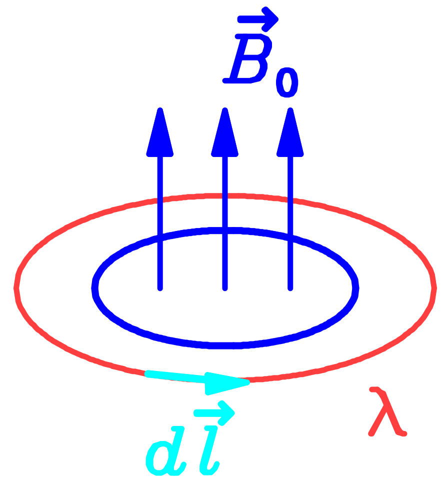


§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4

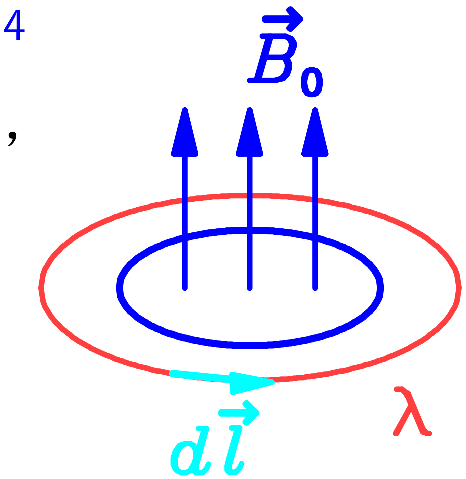
如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。



§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



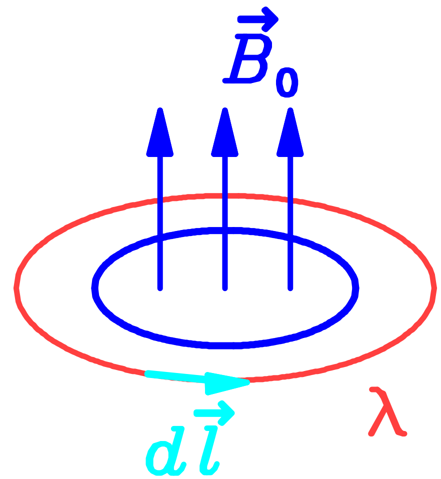
如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析： 变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析： 变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

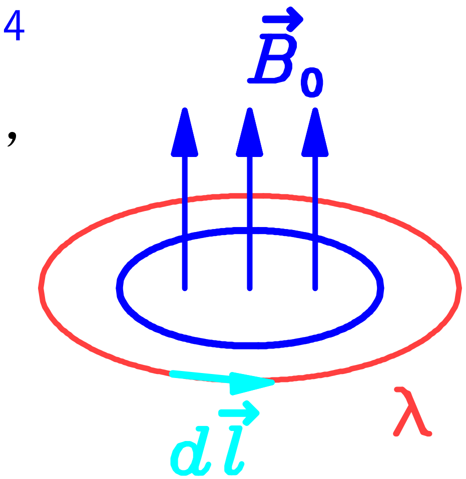
定量计算：取圆环为积分闭合路径，有

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析： 变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

定量计算：取圆环为积分闭合路径，有

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

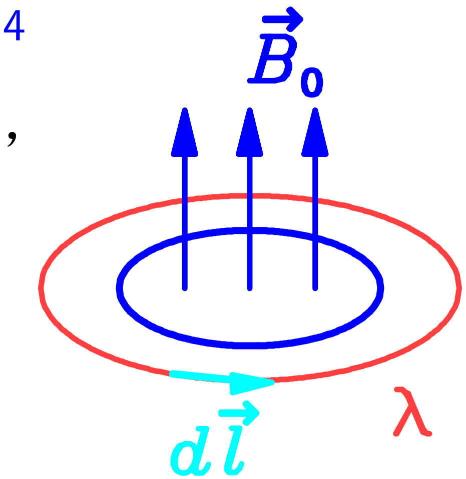
由对称性知：

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E 2\pi b \;\Rightarrow\; \vec{E} = -\frac{a^2}{2b}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\phi$$

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析： 变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

定量计算：取圆环为积分闭合路径，有

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由对称性知：

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E 2\pi b \Rightarrow \vec{E} = -\frac{a^2}{2b}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\phi$$

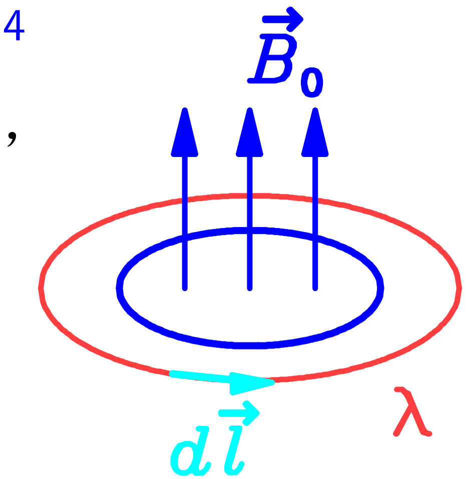
圆环上 $\mathrm{d}\vec{l}$ 段受力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{E}\lambda \mathrm{d}l$

$\mathrm{d}\vec{l}$ 段所受力矩：$\mathrm{d}\vec{N} = \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{F} = -\frac{a^2 b\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_z$

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{\boldsymbol{B}}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析：变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

定量计算：取圆环为积分闭合路径，有

$$\oint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由对称性知：$\oint \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = E2\pi b \Rightarrow \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{a^2}{2b}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

圆环上 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 段受力：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{E}}\lambda \mathrm{d}l$

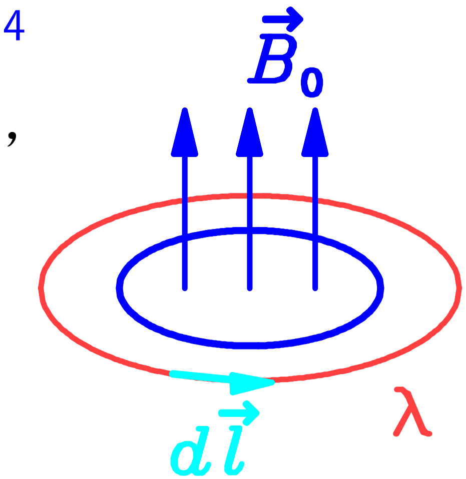
$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 段所受力矩：$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{N}} = \vec{\boldsymbol{r}}\times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -\dfrac{a^2 b\lambda}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\phi\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

圆环上受到的力矩：$\vec{\boldsymbol{N}} = \displaystyle\int \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{N}} = -a^2 b\pi\lambda \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

§ 2.10 电磁场的角动量守恒与转化

一、Feynman 佯谬

此处系 Feynman 佯谬的一个变形，原版见：Feynman 第二卷 §17.4



如图在 xoy 平面内放置半径为 b 电荷线密度为 λ 的静止圆环，环中心一半径 a 的圆形区域有沿 $\hat{e}_z$ 方向的均匀磁场 $\vec{B}_0$。现去掉磁场，问圆环的运动情况。

定性分析： 变化的磁场将激发感生电场，
感生电场将作用于圆环上的电荷，使得圆环旋转。

定量计算：取圆环为积分闭合路径，有

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

由对称性知：$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = E2\pi b \Rightarrow \vec{E} = -\frac{a^2}{2b}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{e}_\phi$

圆环上 $\mathrm{d}\vec{l}$ 段受力：$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{E}\lambda \mathrm{d}l$　　$\mathrm{d}\vec{l}$ 段所受力矩：$\mathrm{d}\vec{N} = \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{F} = -\frac{a^2 b\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\phi\,\hat{e}_z$

圆环上受到的力矩：$\vec{N} = \int \mathrm{d}\vec{N} = -a^2 b\pi\lambda \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\hat{e}_z$

去掉磁场过程，作用于圆环的总角动量：$\vec{L} = \int \vec{N}\mathrm{d}t = a^2 b\pi\lambda B_0\,\hat{e}_z$

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{\boldsymbol{f}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ (1)

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{\boldsymbol{f}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\boldsymbol{\tau}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}$ (2)

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{\boldsymbol{f}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\boldsymbol{\tau}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$$\vec{\boldsymbol{f}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \tag{1}$$

电磁场角动量守恒方程推导目标：$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} \tag{2}$$

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{g}$, $\overleftrightarrow{T}$: 动量密度，动量流密度；

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{g}$, $\overset{\leftrightarrow}{T}$: 动量密度，动量流密度； $\vec{l}_{em}$, $\overset{\leftrightarrow}{K}$: 角动量密度，角动量流密度

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$$\vec{\boldsymbol{f}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \qquad (1)$$

电磁场角动量守恒方程推导目标：$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} \qquad (2)$$

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{\boldsymbol{g}}$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$: 动量密度，动量流密度； $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$, $\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}$: 角动量密度，角动量流密度

(2)式左边应表示做用于单位体积带电体的力矩，

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{g}$, $\overleftrightarrow{T}$: 动量密度，动量流密度； $\vec{l}_{em}$, $\overleftrightarrow{K}$: 角动量密度，角动量流密度

(2)式左边应表示做用于单位体积带电体的力矩，

右边两项分别表示流进某区的电磁角动量和区内电磁角动量的减少。

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{g}$, $\overleftrightarrow{T}$: 动量密度，动量流密度； $\vec{l}_{em}$, $\overleftrightarrow{K}$: 角动量密度，角动量流密度

(2)式左边应表示做用于单位体积带电体的力矩，

右边两项分别表示流进某区的电磁角动量和区内电磁角动量的减少。

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

开始时，没有任何物体在旋转，没有机械角动量，去掉磁场后，圆环得到机械角动量而旋转。角动量来自电磁场，电磁场具有角动量。

二、电磁场的角动量守恒与转化

类比于电磁场动量守恒方程的推导：$\vec{f} = -\dfrac{\partial \vec{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}$ (1)

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{\tau} = -\dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{K}$ (2)

(1)式左边表示对单位体积带电体的作用力，

右边两项分别表示流进某区的电磁动量和区内电磁动量的减少。

类似地：$\vec{g}$, $\overleftrightarrow{T}$: 动量密度，动量流密度；　　$\vec{l}_{em}$, $\overleftrightarrow{K}$: 角动量密度，角动量流密度

(2)式左边应表示做用于单位体积带电体的力矩，

右边两项分别表示流进某区的电磁角动量和区内电磁角动量的减少。

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{f} = \vec{r} \times (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})$$

电磁场角动量守恒方程推导目标：$\vec{r} \times (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{K} - \dfrac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t}$

目标：求得如右边的方程形式

$$\vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

目标：求得如右边的方程形式

$$\vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

注意到电磁动量守恒方程中：

$$\rho \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t}$$

目标：求得如右边的方程形式
$$\vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{l}}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

注意到电磁动量守恒方程中：
$$\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{g}}}{\partial t} \qquad \vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

目标：求得如右边的方程形式

$$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}) = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{K} - \frac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

注意到电磁动量守恒方程中：

$$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B} = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \tfrac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^{\,2} + \tfrac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0\vec{E}\vec{E} - \tfrac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

目标：求得如右边的方程形式 $$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}) = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{K} - \frac{\partial\vec{l}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

注意到电磁动量守恒方程中： $$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B} = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g}=\epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^{\,2}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

$\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量，有：(§1.4 p13 例题) $\vec{r}\times[\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}] = \nabla\cdot[-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}]$ 从而

目标：求得如右边的方程形式 $$\vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{K} - \frac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} \qquad (1)$$

注意到电磁动量守恒方程中： $$\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

$\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量，有：(§1.4 p13 例题) $\vec{r} \times [\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}] = \nabla \cdot [-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}]$ 从而

$$\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$

目标：求得如右边的方程形式 $$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}) = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{K} - \frac{\partial\vec{l}_{em}}{\partial t} \tag{1}$$

注意到电磁动量守恒方程中： $$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B} = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g}=\epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^{\,2}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

$\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量，有：(§1.4 p13 例题) $\vec{r}\times[\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}] = \nabla\cdot[-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}]$ 从而

$$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B} = -\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} - \frac{\partial\vec{g}}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}) = -\vec{r}\times\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T}) - \vec{r}\times\frac{\partial(\vec{g})}{\partial t}$$

目标：求得如右边的方程形式 $$\vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{K} - \frac{\partial \vec{l}_{em}}{\partial t} \qquad (1)$$

注意到电磁动量守恒方程中： $$\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^{\,2} + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I} - \epsilon_0 \vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

$\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量，有：(§1.4 p13 例题) $\vec{r} \times [\nabla \cdot \overleftrightarrow{T}] = \nabla \cdot [-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}]$ 从而

$$\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} - \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = -\vec{r} \times \nabla \cdot (\overleftrightarrow{T}) - \vec{r} \times \frac{\partial (\vec{g})}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) = -\nabla \cdot (-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}) - \frac{\partial (\vec{r} \times \vec{g})}{\partial t}$$

目标：求得如右边的方程形式 $$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{K}-\frac{\partial\vec{l}_{em}}{\partial t} \qquad (1)$$

注意到电磁动量守恒方程中： $$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial\vec{g}}{\partial t} \qquad \vec{g}=\epsilon_0\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\overleftrightarrow{T}=\frac{1}{2}(\epsilon_0\vec{E}^{\,2}+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^{\,2})\overleftrightarrow{I}-\epsilon_0\vec{E}\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}$$

$\overleftrightarrow{T}$ 是对称张量，有：(§1.4 p13 例题) $\vec{r}\times[\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}]=\nabla\cdot[-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}]$ 从而

$$\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B}=-\nabla\cdot\overleftrightarrow{T}-\frac{\partial\vec{g}}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})=-\vec{r}\times\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T})-\vec{r}\times\frac{\partial(\vec{g})}{\partial t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})=-\nabla\cdot(-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})-\frac{\partial(\vec{r}\times\vec{g})}{\partial t}$$

与 (1) 式比较: $\overleftrightarrow{K}=-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}\quad(\neq\vec{r}\times\overleftrightarrow{T})$ 角动量流密度张量

$\vec{l}_{em}=\vec{r}\times\vec{g}$ 角动量密度矢量

积分形式 $$\frac{d\vec{L}_m}{dt}=\int_V\vec{r}\times(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})\,d\tau=-\oint_S\vec{n}\cdot(-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r})\,d\sigma-\frac{d}{dt}\int_V\vec{r}\times\vec{g}\,d\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t}=\int_V \vec{\boldsymbol{r}}\times(\rho\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{j}}\times\vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em}=\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{r} \times \vec{g}\,\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

$\overleftrightarrow{K} = -\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}$ 角动量流密度张量　$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{L}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{r} \times \vec{g}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{K} = -\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}$ 角动量流密度张量　　$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{L}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

   因此，上式的物理意义很明显：

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{r} \times (\rho\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (-\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{r} \times \vec{g}\,\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

$\overleftrightarrow{K} = -\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}$ 角动量流密度张量　　$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{L}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

   因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

   因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

   V 内带电体机械角动量的增加 $=$ 流入 V 内的电磁角动量 $+$ V 内电磁角动量的减少

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{K}} = -\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

V 内带电体机械角动量的增加 ＝ 流入 V 内的电磁角动量 ＋ V 内电磁角动量的减少

—— 电磁场角动量守恒与转化。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

   因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

   V 内带电体机械角动量的增加 $=$ 流入 V 内的电磁角动量 $+$ V 内电磁角动量的减少

   —— 电磁场角动量守恒与转化。

2. 角动量流密度张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 的意义

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t}=\int_V \vec{\boldsymbol{r}}\times(\rho\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{j}}\times\vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em}=\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

V 内带电体机械角动量的增加 $=$ 流入 V 内的电磁角动量 $+$ V 内电磁角动量的减少

—— 电磁场角动量守恒与转化。

2. 角动量流密度张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ 的意义

$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\sigma$　　单位时间流过小面积元 $\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$ 的　　　　动量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times (\rho \vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量　　$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

   左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

   右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

   右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

   因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

   V 内带电体机械角动量的增加 $=$ 流入 V 内的电磁角动量 $+$ V 内电磁角动量的减少

   —— 电磁场角动量守恒与转化。

2. 角动量流密度张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$ 的意义

   $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}\,\mathrm{d}\sigma$　　单位时间流过小面积元 $\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$ 的角动量

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t}=\int_V \vec{\boldsymbol{r}}\times(\rho\vec{\boldsymbol{E}}+\vec{\boldsymbol{j}}\times\vec{\boldsymbol{B}})\,\mathrm{d}\tau=-\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\sigma-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ 角动量流密度张量 $\quad \vec{\boldsymbol{l}}_{em}=\vec{\boldsymbol{r}}\times\vec{\boldsymbol{g}}$ 角动量密度矢量

讨论：

1. 式 (1) 的物理意义

左边为作用于 V 内带电体的力矩，也即带电体机械角动量 $\vec{\boldsymbol{L}}_m$ 的增加率

右边第一项是角动量流密度张量的积分，故应为单位时间流入区域 V 的电磁角动量

右边第二项涉及角动量密度的积分，故为单位时间区域 V 内电磁角动量的减少

因此，上式的物理意义很明显：单位时间内

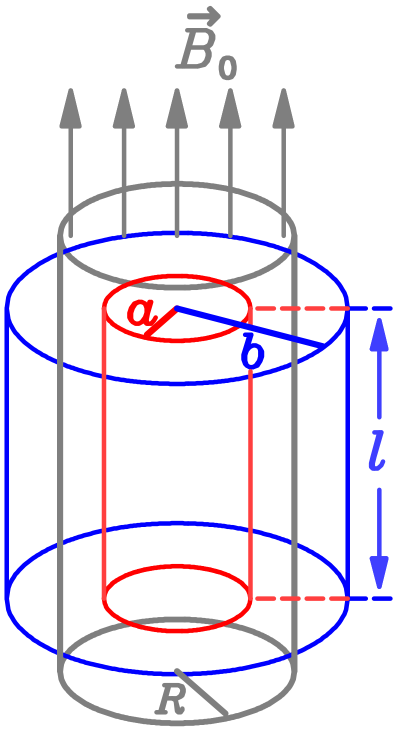
V 内带电体机械角动量的增加 $=$ 流入 V 内的电磁角动量 $+$ V 内电磁角动量的减少

—— 电磁场角动量守恒与转化。

2. 角动量流密度张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}=-\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\times\vec{\boldsymbol{r}}$ 的意义

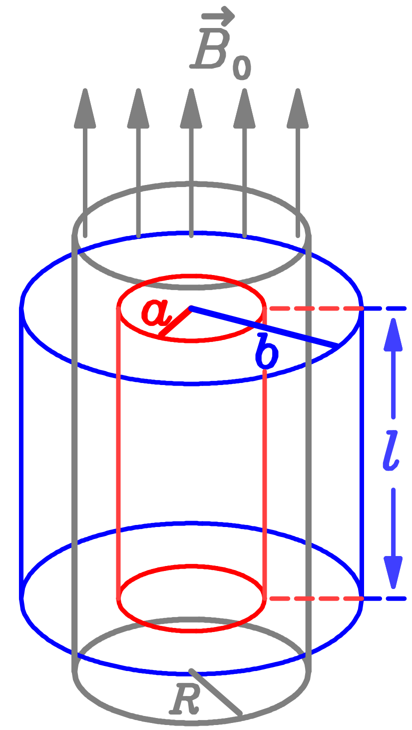
$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}}\,\mathrm{d}\sigma$ （$\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}\,\mathrm{d}\sigma$） 单位时间流过小面积元 $\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ 的角动量 （动量）

3. 作用于介质上的力矩



3. 作用于介质上的力矩

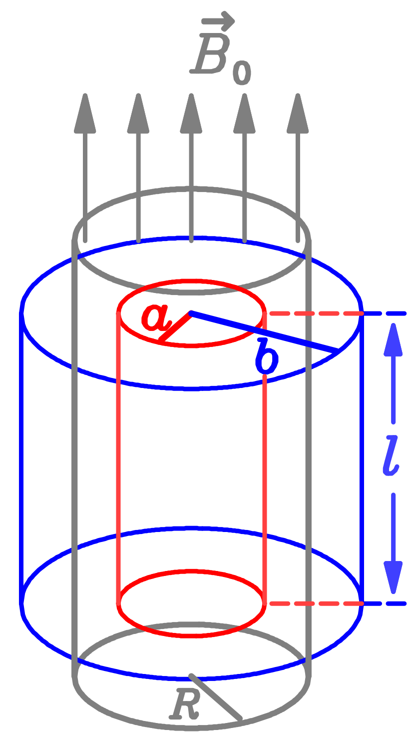
$$\vec{N} = -\oint_S \vec{n}\cdot\overset{\leftrightarrow}{K}\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_V \vec{r}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau$$



3. 作用于介质上的力矩

$$\vec{\boldsymbol{N}} = -\oint_S \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} \mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\,\mathrm{d}\tau$$

对静态场，或者对谐变场求周期平均力矩时，上式右边第二项为零，

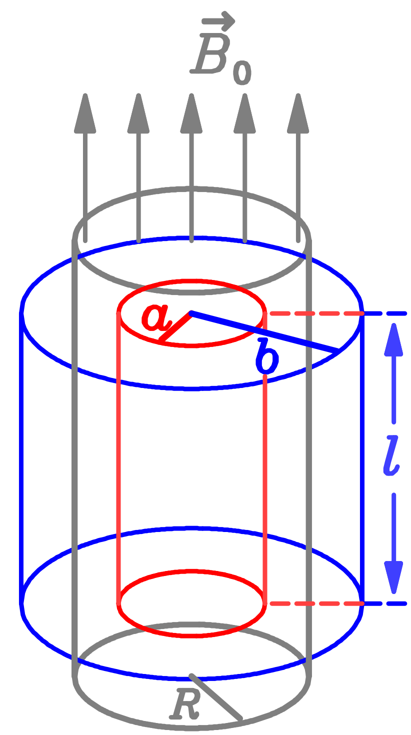


3. 作用于介质上的力矩

$$\vec{\boldsymbol{N}} = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} \mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_V \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}\, \mathrm{d}\tau$$

对静态场，或者对谐变场求周期平均力矩时，上式右边第二项为零，

$$\langle \vec{\boldsymbol{N}} \rangle = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \langle \overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} \rangle\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \big[\underbrace{\langle \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \rangle \times \vec{\boldsymbol{r}}}_{\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}} = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \times \vec{\boldsymbol{r}}} \big]\, \mathrm{d}\sigma = -\oint_{\mathcal{S}} \vec{\boldsymbol{r}} \times \big[\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \langle \overleftrightarrow{\boldsymbol{T}} \rangle \big]\, \mathrm{d}\sigma$$



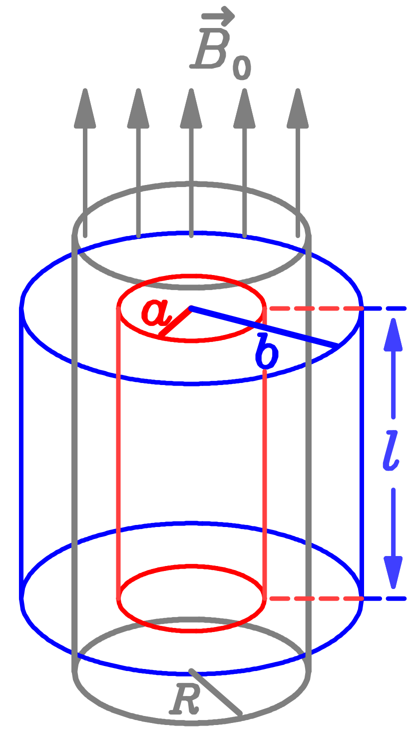
3. 作用于介质上的力矩

$$\vec{N} = -\oint_S \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{K} \mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \int_V \vec{r} \times \vec{g}\, \mathrm{d}\tau$$

对静态场，或者对谐变场求周期平均力矩时，上式右边第二项为零，

$$\langle \vec{N} \rangle = -\oint_S \vec{n} \cdot \langle \overleftrightarrow{K} \rangle\, \mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n} \cdot \big[\underbrace{\langle \overleftrightarrow{T} \rangle \times \vec{r}}_{\overleftrightarrow{K} = -\overleftrightarrow{T} \times \vec{r}} \big]\, \mathrm{d}\sigma = -\oint_S \vec{r} \times \left[\vec{n} \cdot \langle \overleftrightarrow{T} \rangle \right] \mathrm{d}\sigma$$

三、例题



3. 作用于介质上的力矩

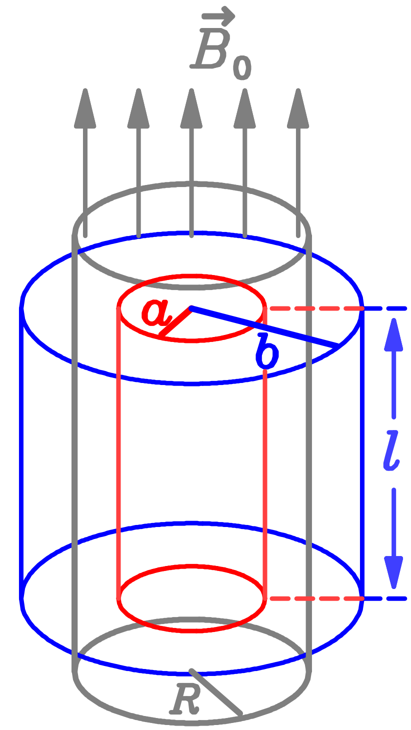
$$\vec{N} = -\oint_S \vec{n}\cdot\overleftrightarrow{K}\,\mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_V \vec{r}\times\vec{g}\,\mathrm{d}\tau$$

对静态场，或者对谐变场求周期平均力矩时，上式右边第二项为零，

$$\langle\vec{N}\rangle = -\oint_S \vec{n}\cdot\langle\overleftrightarrow{K}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n}\cdot\big[\underbrace{\langle\overleftrightarrow{T}\rangle\times\vec{r}}_{\overleftrightarrow{K}=-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}}\big]\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_S \vec{r}\times\big[\vec{n}\cdot\langle\overleftrightarrow{T}\rangle\big]\,\mathrm{d}\sigma$$

三、例题

例 1：一长螺线管半径为 R，单位长度有 n 匝线圈，通有电流 I，与长螺线管同轴放置有两个无底的长度为 l 的圆柱壳，一个半径为 a，均匀带电 $+Q$，在螺线管内，另一个半径为 b，均匀带电 $-Q$，在螺线管外，其中 $l \gg b > R > a$。求：



3. 作用于介质上的力矩

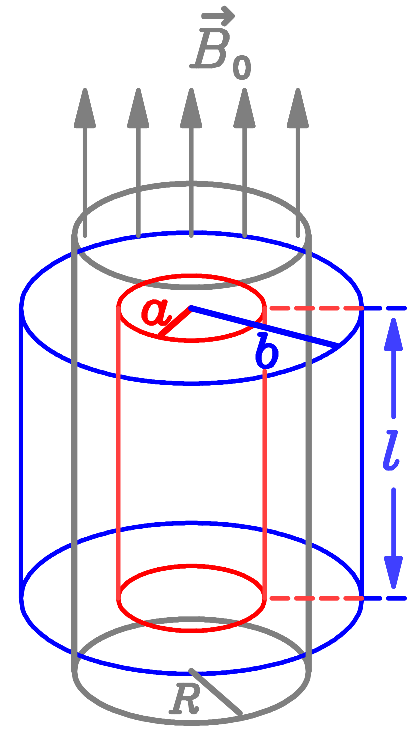
$$\vec{N} = -\oint_S \vec{n} \cdot \overleftrightarrow{K} \mathrm{d}\sigma - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_V \vec{r} \times \vec{g}\,\mathrm{d}\tau$$

对静态场，或者对谐变场求周期平均力矩时，上式右边第二项为零，

$$\langle \vec{N} \rangle = -\oint_S \vec{n} \cdot \langle \overleftrightarrow{K} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \oint_S \vec{n} \cdot \big[\underbrace{\langle \overleftrightarrow{T} \rangle \times \vec{r}}_{\overleftrightarrow{K}=-\overleftrightarrow{T}\times\vec{r}}\big]\,\mathrm{d}\sigma = -\oint_S \vec{r} \times \big[\vec{n} \cdot \langle \overleftrightarrow{T} \rangle\big]\,\mathrm{d}\sigma$$

三、例题

例 1：一长螺线管半径为 R，单位长度有 n 匝线圈，通有电流 I，与长螺线管同轴放置有两个无底的长度为 l 的圆柱壳，一个半径为 a，均匀带电 $+Q$，在螺线管内，另一个半径为 b，均匀带电 $-Q$，在螺线管外，其中 $l \gg b > R > a$。求：



1. 缓慢减除去螺线管电流，求内外两圆柱壳的角动量；
2. 以一导电辐条连接内外两圆柱壳使之缓慢放电，求放电结束时，内外两圆柱壳所获得的总角动量。

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\frac{1}{s}\hat{\boldsymbol{e}}_s \ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \ (s < R)$

Let there be light

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\hat{\boldsymbol{e}}_s \; (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I \,\hat{\boldsymbol{e}}_z \; (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$

Let there be light

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \ (a < s < b)$ $\quad (s, \phi, z)$ 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

Let there be light

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

Let there be light

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{e}_s \ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{B} = \mu_0 n I\,\hat{e}_z \ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{e}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{e}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{e}_s$

利用了：$\vec{r} = s\,\hat{e}_s + z\,\hat{e}_z$

总电磁角动量： $\vec{L}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$

Let there be light

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{e}_s \;(a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{B} = \mu_0 n I\,\hat{e}_z \;(s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{e}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{e}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{e}_s$

利用了：$\vec{r} = s\,\hat{e}_s + z\,\hat{e}_z$

总电磁角动量： $\vec{L}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$

其中 $\vec{l}_{em}$ 的第二项对 $\vec{L}_{em}$ 的贡献相消

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\hat{\boldsymbol{e}}_s\ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

其中 $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$ 的第二项对 $\vec{\boldsymbol{L}}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s > R$),

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \ (a < s < b)$ $\quad (s, \phi, z)$ 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

其中 $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$ 的第二项对 $\vec{\boldsymbol{L}}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s > R$), $\quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s < R$)

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \ (a < s < b)$ (s,ϕ,z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

其中 $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$ 的第二项对 $\vec{\boldsymbol{L}}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s > R$), $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s < R$)

作用于两柱壳力矩： $\vec{\boldsymbol{N}}_a = \vec{\boldsymbol{r}} \times (Q\vec{\boldsymbol{E}}) = -\dfrac{\mu_0}{2} n Q a^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，同理：$\vec{\boldsymbol{N}}_b = \dfrac{\mu_0}{2} n Q R^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\ (a < s < b)$　　(s,ϕ,z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

其中 $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$ 的第二项对 $\vec{\boldsymbol{L}}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s > R$), $\quad \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s < R$)

作用于两柱壳力矩： $\vec{\boldsymbol{N}}_a = \vec{\boldsymbol{r}} \times (Q\vec{\boldsymbol{E}}) = -\dfrac{\mu_0}{2} n Q a^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，同理：$\vec{\boldsymbol{N}}_b = \dfrac{\mu_0}{2} n Q R^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

内外壳机械角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_a = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{N}}_a\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mu_0}{2} n I Q a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，　同理：$\vec{\boldsymbol{L}}_b = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q R^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s\ (a < s < b)$　　(s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

利用了：$\vec{\boldsymbol{r}} = s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

其中 $\vec{\boldsymbol{l}}_{em}$ 的第二项对 $\vec{\boldsymbol{L}}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s > R$), $\vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ (if $s < R$)

作用于两柱壳力矩： $\vec{\boldsymbol{N}}_a = \vec{\boldsymbol{r}} \times (Q\vec{\boldsymbol{E}}) = -\dfrac{\mu_0}{2} n Q a^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, 同理：$\vec{\boldsymbol{N}}_b = \dfrac{\mu_0}{2} n Q R^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

内外壳机械角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_a = \displaystyle\int \vec{\boldsymbol{N}}_a\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mu_0}{2} n I Q a^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$,　同理：$\vec{\boldsymbol{L}}_b = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q R^2\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

总机械角动量等于总电磁角动量： $\vec{\boldsymbol{L}}_m = \vec{\boldsymbol{L}}_a + \vec{\boldsymbol{L}}_b = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$

内外圆柱壳带 $\pm Q$，内外壳间电场： $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\dfrac{1}{s}\,\hat{e}_s\ (a < s < b)$ (s, ϕ, z) 为柱坐标

螺线管内磁感应强度： $\vec{B} = \mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\ (s < R)$

动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l s}\,\hat{e}_\phi$

角动量密度：（在 $a < s < R$ 区） $\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} = -\dfrac{\mu_0 n I Q}{2\pi l}\,\hat{e}_z + \dfrac{\mu_0 n I Q z}{2\pi l s}\,\hat{e}_s$

利用了：$\vec{r} = s\,\hat{e}_s + z\,\hat{e}_z$

总电磁角动量： $\vec{L}_{em} = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$

其中 $\vec{l}_{em}$ 的第二项对 $\vec{L}_{em}$ 的贡献相消

去磁时感应电场： $\vec{E} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\dfrac{R^2}{s}\,\hat{e}_\phi$ (if $s > R$), $\vec{E} = -\dfrac{\mu_0}{2} n \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\, s\,\hat{e}_\phi$ (if $s < R$)

作用于两柱壳力矩： $\vec{N}_a = \vec{r} \times (Q\vec{E}) = -\dfrac{\mu_0}{2} n Q a^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_z$，同理：$\vec{N}_b = \dfrac{\mu_0}{2} n Q R^2 \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\hat{e}_z$

内外壳机械角动量： $\vec{L}_a = \displaystyle\int \vec{N}_a\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mu_0}{2} n I Q a^2\,\hat{e}_z$， 同理：$\vec{L}_b = -\dfrac{\mu_0}{2} n I Q R^2\,\hat{e}_z$

总机械角动量等于总电磁角动量： $\vec{L}_m = \vec{L}_a + \vec{L}_b = \vec{L}_{em}$ 角动量守恒

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$

辐条上有电流 I_s，受力： $$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$$

Let there be light

辐条上有电流 I_s，受力：
$$\mathrm{d}\vec{F} = I_s \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{e}_z) = -I_s \mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{e}_\phi$$

辐条上有电流 I_s，受力：
$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi)$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Let there be light

辐条上有电流 I_s，受力：
$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int I_s\,\mathrm{d}t$$

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q}$$

辐条上有电流 I_s，受力：
$$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s \mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s \mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi)$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q}$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2) Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

作用于辐条上的力矩：

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：

$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} n I(R^2 - a^2) Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$$

辐条上有电流 I_s，受力：　$\mathrm{d}\vec{F} = I_s \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{e}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{e}_\phi$

作用于辐条上的力矩：

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{e}_s \times \,\hat{e}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$$

柱壳上的总角动量：

$$\vec{L}_m = \int \vec{N}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2) Q\,\hat{e}_z = \vec{L}_{em}$$

角动量守恒

辐条上有电流 I_s，受力： $$\mathrm{d}\vec{F} = I_s \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{e}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{e}_\phi$$

作用于辐条上的力矩： $$\vec{N} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\hat{e}_s \times \hat{e}_\phi)$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$$

柱壳上的总角动量： $$\vec{L}_m = \int \vec{N}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q}$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2) Q\,\hat{e}_z = \vec{L}_{em}$$ 角动量守恒

讨论：

辐条上有电流 I_s，受力：
$$d\vec{\boldsymbol{F}} = I_s d\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(ds\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 nI\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 nI ds\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times d\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 nI \int_{s=a}^{s=R} s\,ds(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,dt = -\frac{\mu_0}{2} nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,dt}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} nI(R^2 - a^2) Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$$

角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{F} = I_s \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{e}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{e}_\phi$

作用于辐条上的力矩：

$$\vec{N} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{e}_s \times \,\hat{e}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$$

柱壳上的总角动量：

$$\vec{L}_m = \int \vec{N}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2) Q\,\hat{e}_z = \vec{L}_{em}$$

角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \vec{n} \cdot (\overleftrightarrow{K})\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 nI\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 nI\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

作用于辐条上的力矩：

$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 nI \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2}I_s nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：

$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2}nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2}nI(R^2 - a^2)Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$$

角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}})\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{L}}_m + \vec{\boldsymbol{L}}_{em}) = 0$$

角动量守恒

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 nI\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 nI\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 nI\int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2}I_s nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2}nI(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2}nI(R^2 - a^2)Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$$
角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}})\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{L}}_m + \vec{\boldsymbol{L}}_{em}) = 0$$
角动量守恒

(b) 初始时，在 $a < s < R$ 区，能流密度矢量：$\vec{\boldsymbol{S}} = c^2\vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{nIQ}{2\pi\epsilon_0 ls}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

辐条上有电流 I_s，受力：
$$d\vec{F} = I_s d\vec{l} \times \vec{B} = I_s(ds\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 nI\,\hat{e}_z) = -I_s\mu_0 nI ds\,\hat{e}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = -I_s\mu_0 nI \int_{s=a}^{s=R} s\,ds(\,\hat{e}_s \times \,\hat{e}_\phi)$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} I_s nI(R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{L}_m = \int \vec{N}\,dt = -\frac{\mu_0}{2} nI(R^2 - a^2)\,\hat{e}_z \overbrace{\int I_s\,dt}^{Q}$$
$$= -\frac{\mu_0}{2} nI(R^2 - a^2) Q\,\hat{e}_z = \vec{L}_{em}$$ 角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而
$$\frac{d\vec{L}_m}{dt} + \frac{d\vec{L}_{em}}{dt} = -\oint_S \vec{n}\cdot(\overleftrightarrow{K})\,d\sigma = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}(\vec{L}_m + \vec{L}_{em}) = 0$$ 角动量守恒

(b) 初始时，在 $a < s < R$ 区，能流密度矢量：$\vec{S} = c^2\vec{g} = -\frac{nIQ}{2\pi\epsilon_0 ls}\,\hat{e}_\phi$ 静态场有能流

辐条上有电流 I_s，受力：
$$\mathrm{d}\vec{F} = I_s \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{e}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{e}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{e}_\phi$$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{N} = \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{e}_s \times \hat{e}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{L}_m = \int \vec{N}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2)\,\hat{e}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} n I (R^2 - a^2) Q\,\hat{e}_z = \vec{L}_{em}$$

角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{L}_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \vec{n} \cdot (\overleftrightarrow{K})\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{L}_m + \vec{L}_{em}) = 0$$

角动量守恒

(b) 初始时，在 $a < s < R$ 区，能流密度矢量：$\vec{S} = c^2\vec{g} = -\dfrac{nIQ}{2\pi\epsilon_0 l s}\,\hat{e}_\phi$ 静态场有能流

角动量密度：$\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g}$， $\vec{S} = c^2\vec{g}$， 为保证角动量守恒，必须有

$$\vec{l}_{em} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{g} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{S} \neq 0$$

即：对静态场，能流可以不为0

辐条上有电流 I_s，受力： $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = I_s \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = I_s(\mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_s) \times (\mu_0 n I\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) = -I_s\mu_0 n I \mathrm{d}s\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

作用于辐条上的力矩：
$$\vec{\boldsymbol{N}} = \int \vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{F}} = -I_s\mu_0 n I \int_{s=a}^{s=R} s\,\mathrm{d}s(\,\hat{\boldsymbol{e}}_s \times \,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi) = -\frac{\mu_0}{2} I_s n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

柱壳上的总角动量：
$$\vec{\boldsymbol{L}}_m = \int \vec{\boldsymbol{N}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\mu_0}{2} n I(R^2 - a^2)\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \overbrace{\int I_s\,\mathrm{d}t}^{Q} = -\frac{\mu_0}{2} n I(R^2 - a^2) Q\,\hat{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{L}}_{em}$$
角动量守恒

讨论：

(a) 缓慢放电或去磁，才可以看成准静态情况，略去辐射场，自然也不会有角动量流出，从而
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_m}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_{em}}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \vec{\boldsymbol{n}} \cdot (\overleftrightarrow{\boldsymbol{K}})\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{L}}_m + \vec{\boldsymbol{L}}_{em}) = 0$$
角动量守恒

(b) 初始时，在 $a < s < R$ 区，能流密度矢量：$\vec{\boldsymbol{S}} = c^2\vec{\boldsymbol{g}} = -\dfrac{nIQ}{2\pi\epsilon_0 l s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ 静态场有能流

角动量密度：$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{g}}$，　$\vec{\boldsymbol{S}} = c^2\vec{\boldsymbol{g}}$，　为保证角动量守恒，必须有

$\vec{\boldsymbol{l}}_{em} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{g}} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{S}} \neq 0$ 　即：对静态场，能流可以不为0

(c) 一个质心静止的局域体系，线动量 (linear momentum) 必为0，但其角动量可以不为0。

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

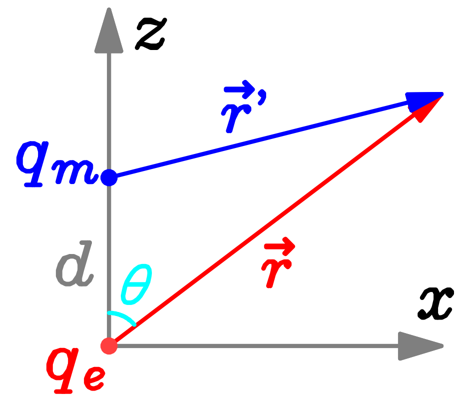
分别为：$\vec{\boldsymbol{E}}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e|^3},\quad \vec{\boldsymbol{B}}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e|^3}, \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m|^3}$

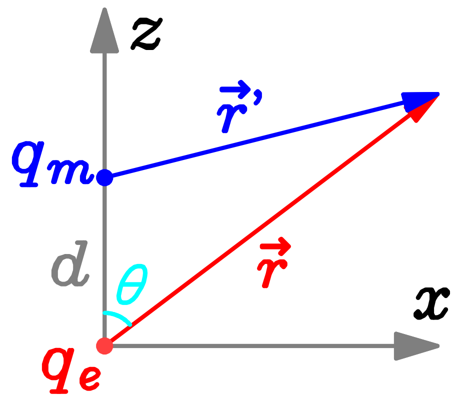
试求体系的电磁角动量



例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e|^3}, \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量



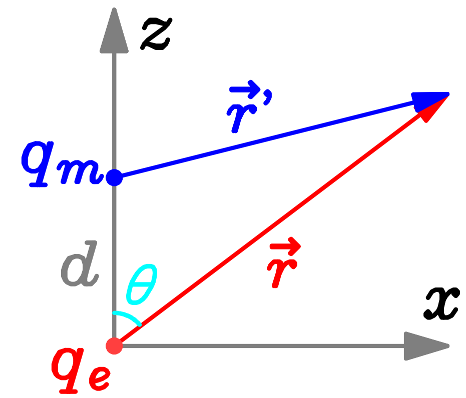
如图：

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{r'^{\,3}} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_e|^3}$, $\quad \vec{\boldsymbol{B}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量



如图：

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}\,'}{r'^{\,3}} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

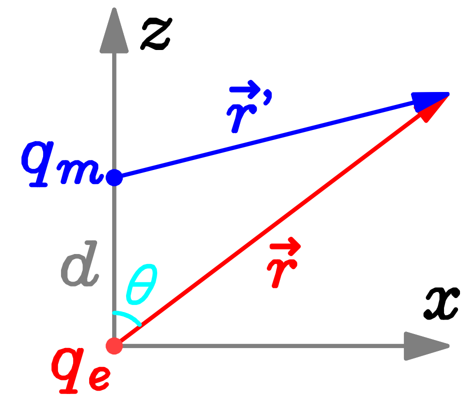
动量密度

$$\vec{\boldsymbol{g}} = \epsilon_0 \vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{e}}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$， $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

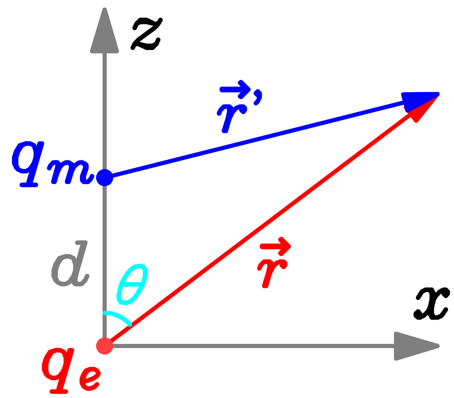


如图：
$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}-d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

动量密度
$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

角动量密度
$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场



分别为：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$, $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

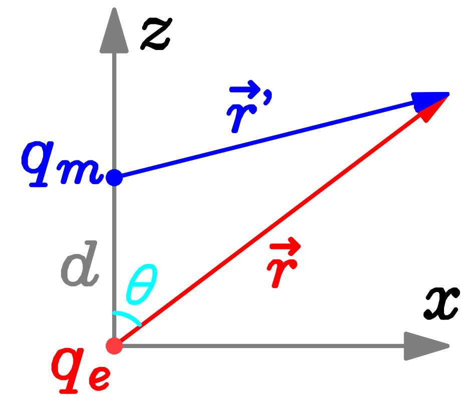
如图：
$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r} - d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

动量密度
$$\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

角动量密度
$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

利用 $\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\hat{e}_z) - r^2\,\hat{e}_z = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r - r^2\,\hat{e}_z$

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场



分别为：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$, $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

如图：

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}-d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

动量密度

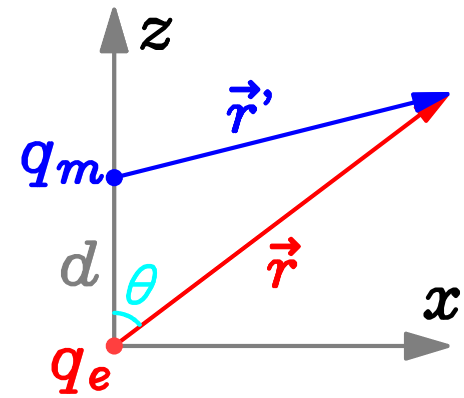
$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

角动量密度

$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

利用 $\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\hat{e}_z) - r^2\,\hat{e}_z = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r - r^2\,\hat{e}_z$

$$= r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + r^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - r^2(1-\cos^2\theta)\,\hat{e}_z$$



例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$, $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

如图：

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r} - d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

动量密度

$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{r}\times\ \hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

角动量密度

$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\ \hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

利用 $\vec{r}\times(\vec{r}\times\ \hat{e}_z) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\ \hat{e}_z) - r^2\,\hat{e}_z = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r - r^2\,\hat{e}_z$

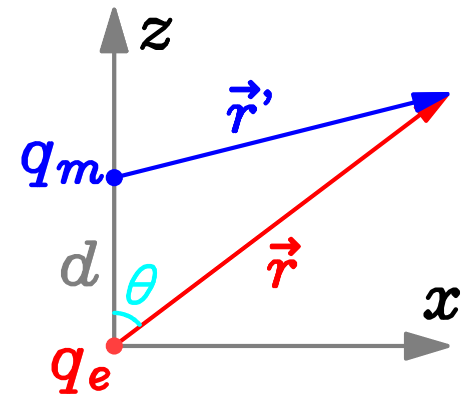
$$= r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + r^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - r^2(1-\cos^2\theta)\,\hat{e}_z$$

对 x 和 y 分量，积分为0

例 2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场

分别为：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}$, $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量



如图：$\vec{E} = \dfrac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $\quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0 q_m}{4\pi} \dfrac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \dfrac{\mu_0 q_m}{4\pi} \dfrac{\vec{r} - d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$

动量密度 $\vec{g} = \epsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \dfrac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2} \dfrac{(-d)(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$

角动量密度 $\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\dfrac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2} \dfrac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$

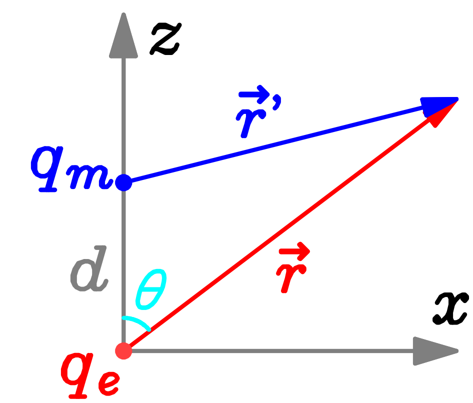
利用 $\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\hat{e}_z) - r^2\,\hat{e}_z = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r - r^2\,\hat{e}_z$

$$= r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + r^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - r^2(1-\cos^2\theta)\,\hat{e}_z$$

对 x 和 y 分量，积分为0

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{e}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}} \underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

例2：电荷 q_e 和磁荷 q_m 相距 d。电荷和磁荷的的电、磁场



分别为：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_e(\vec{r}-\vec{r}_e)}{|\vec{r}-\vec{r}_e|^3}, \quad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q_m(\vec{r}-\vec{r}_m)}{|\vec{r}-\vec{r}_m|^3}$

试求体系的电磁角动量

如图：
$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \qquad \vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi}\frac{\vec{r} - d\,\hat{e}_z}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

动量密度
$$\vec{g} = \epsilon_0\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\mu_0 q_e q_m}{(4\pi)^2}\frac{(-d)(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

角动量密度
$$\vec{l}_{em} = \vec{r}\times\vec{g} = -\frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}$$

利用 $\vec{r}\times(\vec{r}\times\hat{e}_z) = \vec{r}(\vec{r}\cdot\hat{e}_z) - r^2\,\hat{e}_z = r^2\cos\theta\,\hat{e}_r - r^2\,\hat{e}_z$

$$= r^2\cos\theta\sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + r^2\cos\theta\sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - r^2(1-\cos^2\theta)\,\hat{e}_z$$

对 x 和 y 分量，积分为0

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{e}_z\int\frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\underbrace{r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\ \hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\ \underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1}\mathrm{d}u\int_{r=0}^{r=\infty}\frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1}\mathrm{d}u \underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty}\frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{令：} \cos\theta = u$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}u \underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}u\,\underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}u \underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

与电荷磁荷之距离 d 无关！

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}u\,\underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{L}}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}$$

与电荷磁荷之距离 d 无关！

在量子力学中，角动量是量子化的，为 $\hbar/2$ 的整数倍。

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{e}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{令：} \cos\theta = u$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{e}_z \int_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}u \underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty} \frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{e}_z \int_{u=-1}^{u=1} \frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m\,\hat{e}_z}$$

与电荷磁荷之距离 d 无关！

在量子力学中，角动量是量子化的，为 $\hbar/2$ 的整数倍。

故上式表明，一旦在宇宙任何地方存在磁荷，由 $L_{em} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} q_e q_m = \dfrac{n\hbar}{2}$ $\quad n$为整数

$$\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0 q_e q_m d}{(4\pi)^2}\,\hat{e}_z \int \frac{r^2(1-\cos^2\theta)}{r^3(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}}\,\underbrace{r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi}_{\mathrm{d}\tau}$$

令：$\cos\theta = u$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{e}_z \int_{u=-1}^{u=1}\mathrm{d}u\,\underbrace{\int_{r=0}^{r=\infty}\frac{r(1-u^2)}{(r^2+d^2-2rud)^{3/2}}\,\mathrm{d}r}_{=(1+u)/d}$$

$$= \frac{\mu_0 q_e q_m d}{8\pi}\,\hat{e}_z \int_{u=-1}^{u=1}\frac{(1+u)}{d}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi}\,\hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L}_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi}q_e q_m\,\hat{e}_z}$$

与电荷磁荷之距离 d 无关！

在量子力学中，角动量是量子化的，为 $\hbar/2$ 的整数倍。

故上式表明，一旦在宇宙任何地方存在磁荷，由 $L_{em} = \frac{\mu_0}{4\pi}q_e q_m = \frac{n\hbar}{2}$ n为整数

可得，电荷和磁荷都应该是量子化的。 例如，电荷有最小的分立值：$\Delta q_e = \frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\hbar/2}{q_m}$。