§3.4 静电边值问题：镜象法

§3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

§ 3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

§ 3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

边界之外放置象电荷：

§ 3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

边界之外放置象电荷：

若象电荷放置在求解区，则必然导致一个新的电荷分布，得到的势所满足的微分方程对应于新电荷分布的泊松方程，不同于原定解条件中的泊松方程。

如何判断象电荷的场等价于感应电荷、极化电荷的场：

§ 3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

边界之外放置象电荷：

若象电荷放置在求解区，则必然导致一个新的电荷分布，得到的势所满足的微分方程对应于新电荷分布的泊松方程，不同于原定解条件中的泊松方程。

如何判断象电荷的场等价于感应电荷、极化电荷的场：

判断象电荷的场与原有电荷的场的叠加是否满足原定解条件。

§ 3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

边界之外放置象电荷：

若象电荷放置在求解区，则必然导致一个新的电荷分布，得到的势所满足的微分方程对应于新电荷分布的泊松方程，不同于原定解条件中的泊松方程。

如何判断象电荷的场等价于感应电荷、极化电荷的场：

判断象电荷的场与原有电荷的场的叠加是否满足原定解条件。

例 1：距接地无限大导体平板 a 放一点电荷，求空间电势。

§3.4 静电边值问题：镜象法

镜象法基本思想：

在边界之外放置象电荷，调整象电荷的位置和大小，使其产生的电场（势）和原感应电荷、极化电荷产生的场（势）相同。这样，感应电荷、极化电荷的影响即可完全由象电荷代替。

边界之外放置象电荷：

若象电荷放置在求解区，则必然导致一个新的电荷分布，得到的势所满足的微分方程对应于新电荷分布的泊松方程，不同于原定解条件中的泊松方程。

如何判断象电荷的场等价于感应电荷、极化电荷的场：

判断象电荷的场与原有电荷的场的叠加是否满足原定解条件。

例 1：距接地无限大导体平板 a 放一点电荷，求空间电势。

解略。参见 (p87，例1)。

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件： (1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性： 象电荷 q' 必落在z 轴，设距球心为 b

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性：象电荷 q' 必落在 z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外　象电荷必落在球内，$b < R$

例2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件： (1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性： 象电荷 q' 必落在z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外 象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献 球外势为 q 和感应电荷的贡献，

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - d\,\hat{e}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性：象电荷 q' 必落在z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外　象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献　球外势为 q 和感应电荷的贡献，　等于 q 和象电荷 q' 的贡献

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：

(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性：象电荷 q' 必落在z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外　象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献　球外势为 q 和感应电荷的贡献，等于 q 和象电荷 q' 的贡献

球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big]$$

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件： (1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性： 象电荷 q' 必落在 z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外 象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献 球外势为 q 和感应电荷的贡献， 等于 q 和象电荷 q' 的贡献

球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - b)^2}}\Big]$$

象电荷在球内 球外 ρ_f 没有变 φ 必满足原泊松方程，即满足定解条件 (1)

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件：
(1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - d\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)$ （介质区给定 ρ_f，没有介质界面）
(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ （给定导体电势）
(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ （给定整个求解区边界的电势）

由对称性：象电荷 q' 必落在 z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外　象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献　球外势为 q 和感应电荷的贡献，等于 q 和象电荷 q' 的贡献

球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}}\right]$$

象电荷在球内　球外 ρ_f 没有变　φ 必满足原泊松方程，即满足定解条件 (1)

显然　φ 也满足定解条件 (3)

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件： (1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0}q\delta(\vec{r} - d\,\hat{e}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性： 象电荷 q' 必落在 z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外 象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献 球外势为 q 和感应电荷的贡献， 等于 q 和象电荷 q' 的贡献

球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big]$$

象电荷在球内 球外 ρ_f 没有变 φ 必满足原泊松方程，即满足定解条件 (1)

显然 φ 也满足定解条件 (3)

若 φ 再满足定解条件 (2)，则 φ 即为唯一正确的解

例 2：距半径为 R 的接地导体球 d 放一点电荷，求球外电势。

导体球球心为原点，球心到点电荷连线为 z 轴

定解条件： (1) $\nabla^2\varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\vec{r} - d\,\hat{e}_z)$ (介质区给定 ρ_f，没有介质界面)

(2) $\varphi\Big|_{r=R} = 0$ (给定导体电势)

(3) $\varphi\Big|_{r=\infty} = 0$ (给定整个求解区边界的电势)

由对称性： 象电荷 q' 必落在z 轴，设距球心为 b

象电荷在边界外 象电荷必落在球内，$b < R$

q' 等效感应电荷贡献 球外势为 q 和感应电荷的贡献， 等于 q 和象电荷 q' 的贡献

球外电势

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big]$$

象电荷在球内 球外 ρ_f 没有变 φ 必满足原泊松方程，即满足定解条件 (1)

显然 φ 也满足定解条件 (3)

若 φ 再满足定解条件 (2)，则 φ 即为唯一正确的解

反过来 可以令 φ 满足定解条件 (2) 来求解 q' 和 b

球外电势 $$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q^{'}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \qquad (1)$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q^{'}}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \qquad (2)$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q^{'}}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q, \quad b = \dfrac{R^2}{d}$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q, \quad b = \dfrac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

球外电势 $$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\right] \tag{1}$$

球坐标 $$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right] \tag{2}$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$ $$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q,\quad b = \dfrac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

球外电势 $$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \qquad (1)$$

球坐标 $$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \qquad (2)$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$ $$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}\,q, \quad b = \dfrac{R^2}{d}$ 电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}},$$

球外电势 $$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \quad (1)$$

球坐标 $$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \quad (2)$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$ $$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q$,　$b = \dfrac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}, \quad Q = \oint \sigma_q \mathrm{d}\sigma = q'$$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}+\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\right] \quad (1)$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right] \quad (2)$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q,\quad b = \dfrac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}},\quad Q = \oint \sigma_q \mathrm{d}\sigma = q'$$

作一球心于坐标原点，半径为 r_g $(R < r_g < d)$ 的高斯球面 S_g

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \quad (1)$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \quad (2)$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}, \quad Q = \oint \sigma_q \mathrm{d}\sigma = q'$$

作一球心于坐标原点，半径为 r_g $(R < r_g < d)$ 的高斯球面 S_g

$$\oint_{S_g} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{E}}_{induced}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$　感应电荷的场的高斯球面积分等于感应电荷 Q/ϵ_0

球外电势 $$\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}+\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标 $$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

$r=R$ 时，$\varphi=0$ $$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}}+\frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}}=0$$

上方程对任意 θ 成立 求得 $b<R$ 的解：$q'=-\frac{R}{d}q,\quad b=\frac{R^2}{d}$ 电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q=-\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R}=-\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}},\quad Q=\oint\sigma_q \mathrm{d}\sigma=q'$$

作一球心于坐标原点，半径为 r_g $(R<r_g<d)$ 的高斯球面 S_g

$$\oint_{S_g}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{induced}\mathrm{d}\sigma=\frac{Q}{\epsilon_0}$$ 感应电荷的场的高斯球面积分等于感应电荷 Q/ϵ_0

$$\oint_{S_g}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{image}\mathrm{d}\sigma=\frac{q'}{\epsilon_0}$$ 象电荷的场的高斯球面积分等于象电荷 q'/ϵ_0

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \tag{1}$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \tag{2}$$

$r = R$ 时，$\varphi = 0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b < R$ 的解：$q' = -\dfrac{R}{d}q,\quad b = \dfrac{R^2}{d}$　电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}},\quad Q = \oint \sigma_q \mathrm{d}\sigma = q'$$

作一球心于坐标原点，半径为 r_g $(R < r_g < d)$ 的高斯球面 S_g

$$\oint_{S_g}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{induced}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$ 感应电荷的场的高斯球面积分等于感应电荷 Q/ϵ_0

$$\oint_{S_g}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}_{image}\mathrm{d}\sigma = \frac{q'}{\epsilon_0}$$ 象电荷的场的高斯球面积分等于象电荷 q'/ϵ_0

感应电荷的场与象电荷的场等价：$\vec{\boldsymbol{E}}_{induced} = \vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

球外电势
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}}\Big] \qquad (1)$$

球坐标
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big] \qquad (2)$$

$r=R$ 时，$\varphi=0$
$$\frac{q}{\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{R^2+b^2-2Rb\cos\theta}} = 0$$

上方程对任意 θ 成立　求得 $b<R$ 的解：$q' = -\frac{R}{d}q, \quad b = \frac{R^2}{d}$ 电势由 (1) 或 (2) 给出

讨论：

1. 球面上的感应电荷密度 σ_q，导体球的电量（这时为感应电荷量）Q 等于象电荷电量 q'

$$\sigma_q = -\epsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R}\frac{(d^2-R^2)}{(d^2+R^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}, \quad Q = \oint \sigma_q \mathrm{d}\sigma = q'$$

作一球心于坐标原点，半径为 r_g $(R<r_g<d)$ 的高斯球面 S_g

$$\oint_{S_g} \vec{n}\cdot\vec{E}_{induced}\mathrm{d}\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0}$$ 感应电荷的场的高斯球面积分等于感应电荷 Q/ϵ_0

$$\oint_{S_g} \vec{n}\cdot\vec{E}_{image}\mathrm{d}\sigma = \frac{q'}{\epsilon_0}$$ 象电荷的场的高斯球面积分等于象电荷 q'/ϵ_0

感应电荷的场与象电荷的场等价：$\vec{E}_{induced} = \vec{E}_{image}$　因此：$Q = q'$

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

   (2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

   满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

   (2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

   满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

   (2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

   满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

   由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

4. 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 $d < R$

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

4. 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 $d < R$

这时可在球外距球心 R^2/d 处放置一象电荷 $q' = -\dfrac{R}{d}\,q$

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

4. 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 $d < R$

这时可在球外距球心 R^2/d 处放置一象电荷 $q' = -\dfrac{R}{d} q$

球内电势为原电荷 q 和象电荷 q' 两者的贡献。

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

   (2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

   满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

   这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

   球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

   这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

   由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

4. 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 $d < R$

   这时可在球外距球心 R^2/d 处放置一象电荷 $q' = -\dfrac{R}{d}q$

   球内电势为原电荷 q 和象电荷 q' 两者的贡献。这样做，保证了：导体球球面电势为 0

2. 导体球不接地，而是带电 Q_c

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = Q_c - q'$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：(1) 导体球球面是等势面

(2) 两象电荷电量之和等于导体球上的电量，$q' + q'' = Q_c$

满足定解条件，所得的电势是唯一正确解

3. 导体球不接地，而具有电势 V_0

这时可放置两象电荷，一个与导体球接地情况相同，另一个 $q'' = 4\pi\epsilon_0 V_0 R$ 放在导体球球心

球外电势为三者之和：原电荷 q 和两个象电荷的贡献

这样做，保证了：导体球球面是等势面，且电势等于 V_0，满足定解条件，是唯一正确解

由于两象电荷电量之和等于导体球上的电量，故这时导体球带电 $q' + q''$

4. 点电荷 q 在导体球壳内，距球心 $d < R$

这时可在球外距球心 R^2/d 处放置一象电荷 $q' = -\dfrac{R}{d}q$

球内电势为原电荷 q 和象电荷 q' 两者的贡献。这样做，保证了：导体球球面电势为 0

若导体球不接地或带电，对球内电势的影响只是加减一常数

5. 点电荷受力$\vec{F}$

5. 点电荷受力$\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$

5. 点电荷受力$\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E}_e$$

$\vec{E}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{E}_i$

5. 点电荷受力$\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{F}} &= q\vec{\boldsymbol{E}}_e \\ &= q\vec{\boldsymbol{E}}_i\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

5. 点电荷受力$\vec{\boldsymbol{F}}$

$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

5. 点电荷受力$\vec{F}$

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{E}_e \\
&= q\vec{E}_i \\
&= q\vec{E}_{image}
\end{aligned}
$$

$\vec{E}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{E}_i$

导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{E}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{E}_{image}$

5. 点电荷受力$\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

5. 点电荷受力$\vec{F}$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{E}_e \\ &= q\vec{E}_i \\ &= q\vec{E}_{image}\end{aligned}$$

$\vec{E}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{E}_i$

导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{E}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{E}_{image}$

此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

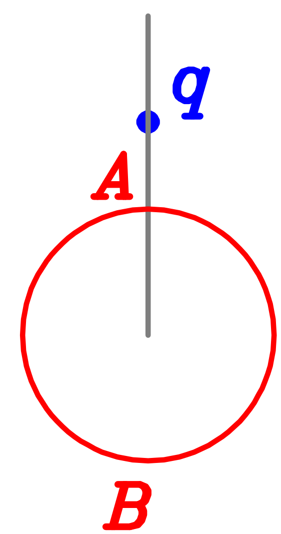
5. 点电荷受力$\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E}_e$$ $\vec{E}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{E}_i$

$$= q\vec{E}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{E}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{E}_{image}$

$$= q\vec{E}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力



5. 点电荷受力$\vec{F}$

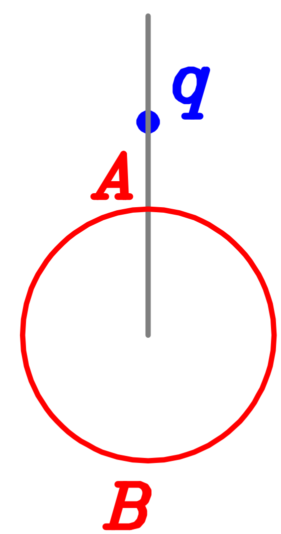
$$\vec{F} = q\vec{E}_e \qquad \vec{E}_e \text{ 为 } q \text{ 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 } \vec{E}_i$$

$$= q\vec{E}_i \qquad \text{导体球所带的电荷产生的电场 } \vec{E}_i \text{ 等效于象电荷的电场 } \vec{E}_{image}$$

$$= q\vec{E}_{image} \qquad \text{此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。}$$

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，



5. 点电荷受力$\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

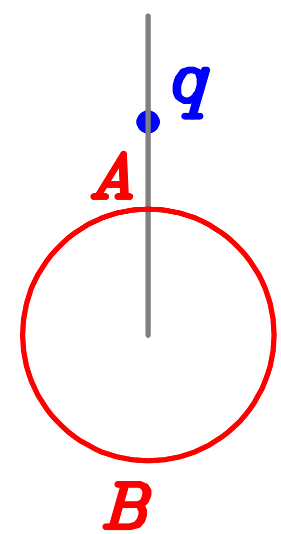
$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

q' 与 q 使导体球球面电势为 0



5. 点电荷受力$\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E}_e$$ $\vec{E}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{E}_i$

$$= q\vec{E}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{E}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{E}_{image}$

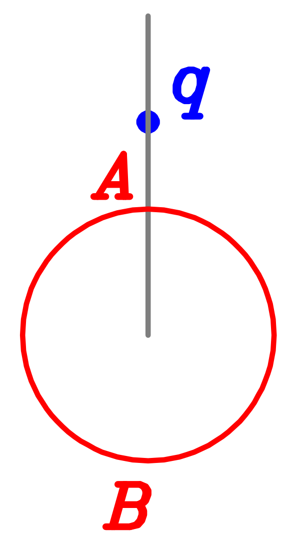
$$= q\vec{E}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$



5. 点电荷受力 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

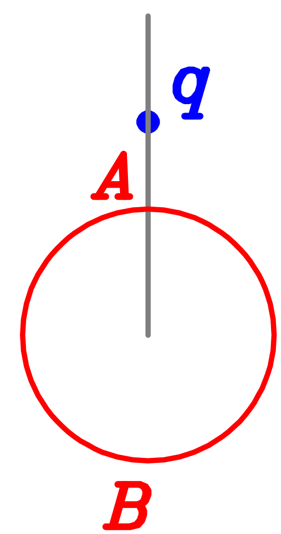
例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$



5. 点电荷受力 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

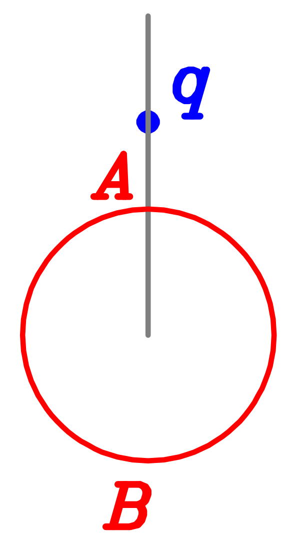
这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$

q 的受力等于 q 受两个象电荷的静电作用力，容易求得：



5. 点电荷受力 $\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E}_e \qquad \vec{E}_e \text{ 为 } q \text{ 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 } \vec{E}_i$$

$$= q\vec{E}_i \qquad \text{导体球所带的电荷产生的电场 } \vec{E}_i \text{ 等效于象电荷的电场 } \vec{E}_{image}$$

$$= q\vec{E}_{image} \qquad \text{此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。}$$

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

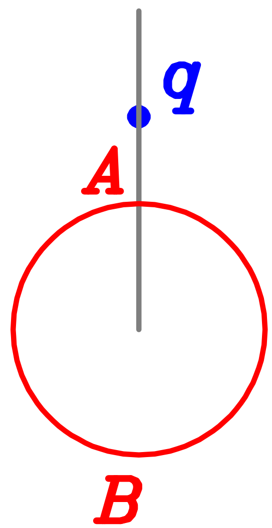
q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$

q 的受力等于 q 受两个象电荷的静电作用力，容易求得：

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{Q_c - q'}{d^2} + \frac{q'}{(d - R^2/d)^2}\Big] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{Q_c}{d^2} - \frac{qR^3(2d^2 - R^2)}{d^3(d^2 - R^2)^2}\Big]$$



5. 点电荷受力 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$ $\quad$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$ $\quad$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$ $\quad$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

q' 与 q 使导体球球面电势为 0

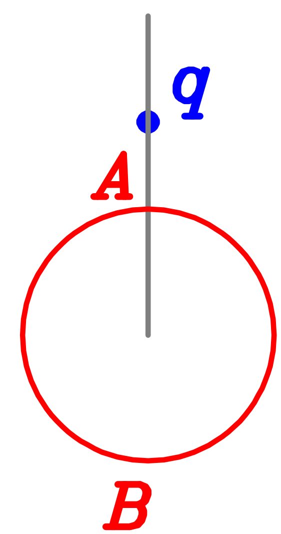
再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$

q 的受力等于 q 受两个象电荷的静电作用力，容易求得：

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c - q'}{d^2} + \frac{q'}{(d - R^2/d)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c}{d^2} - \frac{qR^3(2d^2 - R^2)}{d^3(d^2 - R^2)^2}\right]$$

F 可正可负，表明即使点电荷与导体带同号电荷，仍有可能相吸引。



5. 点电荷受力 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

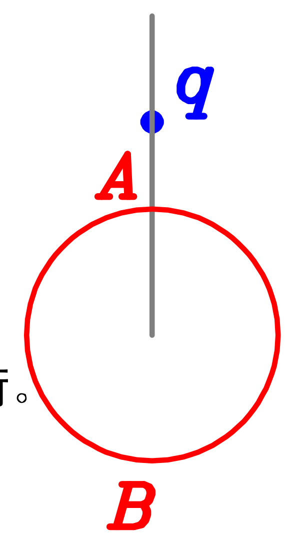
q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$

q 的受力等于 q 受两个象电荷的静电作用力，容易求得：

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c - q'}{d^2} + \frac{q'}{(d - R^2/d)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c}{d^2} - \frac{qR^3(2d^2 - R^2)}{d^3(d^2 - R^2)^2}\right]$$



F 可正可负，表明即使点电荷与导体带同号电荷，仍有可能相吸引。

注意导体表面总是受到负压力，导体表面如图中 A 的近点电荷处总被吸向点电荷。

5. 点电荷受力 $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\vec{\boldsymbol{F}} = q\vec{\boldsymbol{E}}_e$$ $\vec{\boldsymbol{E}}_e$ 为 q 的外场，即导体球所带的（非均匀分布的）电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_i$$ 导体球所带的电荷产生的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_i$ 等效于象电荷的电场 $\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$

$$= q\vec{\boldsymbol{E}}_{image}$$ 此式意义即：点电荷的受力等于点电荷与象电荷的相互作用力。

例 3：带电 Q_c 半径 R 的导体球外有一点电荷 q，距球心 d，求 q 的受力

这时应放置两个象电荷，一个放在距球心 R^2/d 处，电量 $q' = -(R/d)q$，

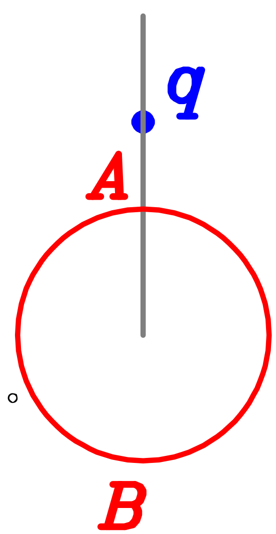
q' 与 q 使导体球球面电势为 0

再在导体球球心放第二个象电荷 $q'' = Q_c - q'$

这样做，既保证了：导体球球面是等势面，又保证导体球上的电量等于 $q' + q'' = Q_c$

q 的受力等于 q 受两个象电荷的静电作用力，容易求得：

$$F = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c - q'}{d^2} + \frac{q'}{(d-R^2/d)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q_c}{d^2} - \frac{qR^3(2d^2-R^2)}{d^3(d^2-R^2)^2}\right]$$

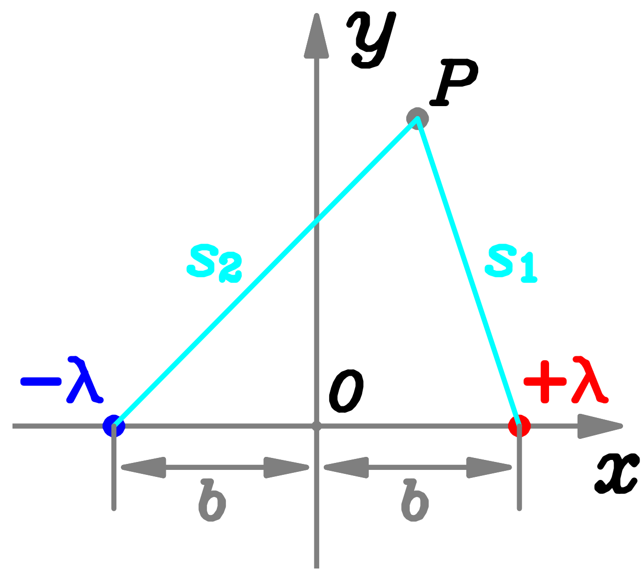


F 可正可负，表明即使点电荷与导体带同号电荷，仍有可能相吸引。

注意导体表面总是受到负压力，导体表面如图中 A 的近点电荷处总被吸向点电荷。

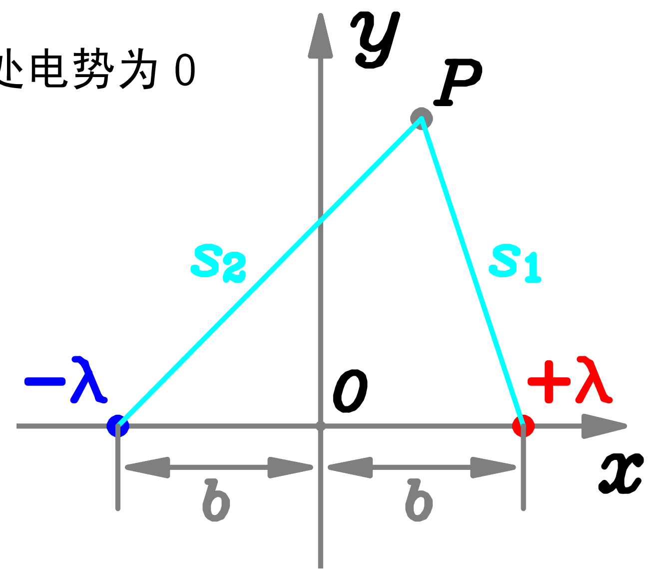
如图中 B 的远离 q 处总被排斥，但整个导体受到的总力可以是吸引或排斥。

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

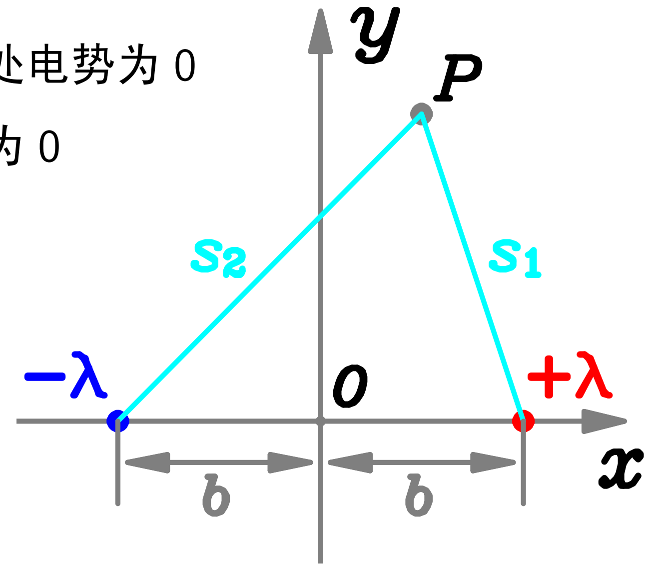
(1)　设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0



例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

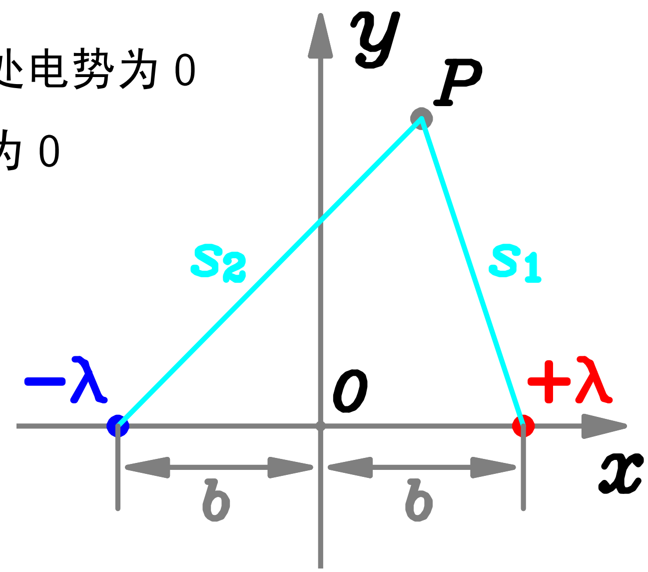


例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

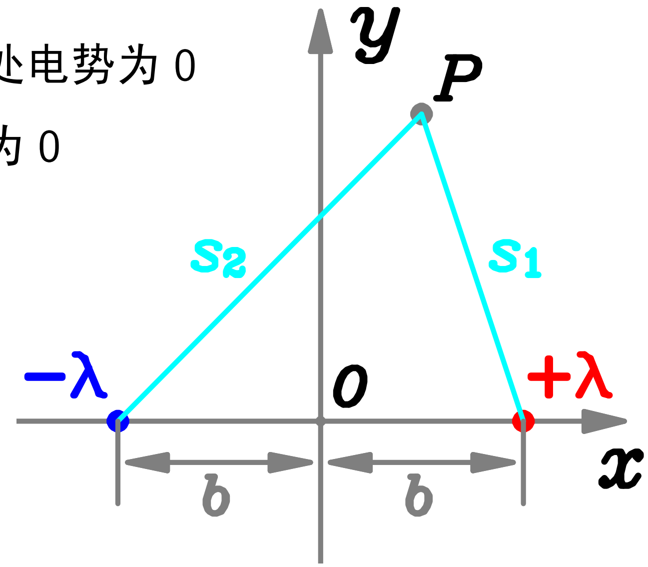
(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{e}_s$



例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{e}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

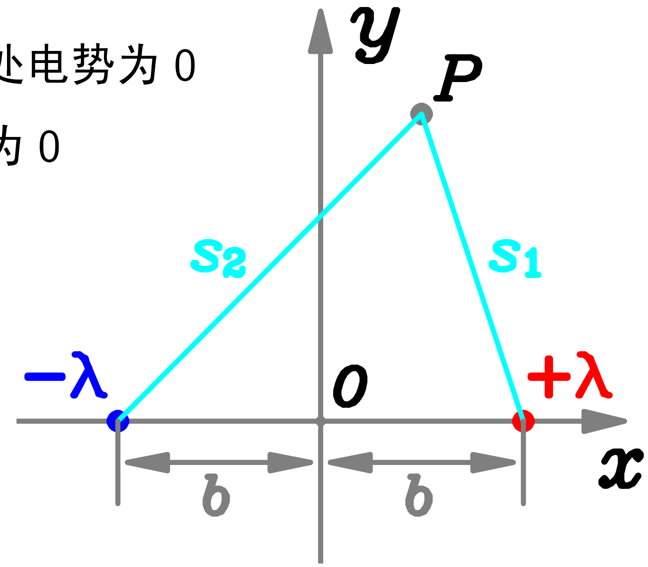
(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

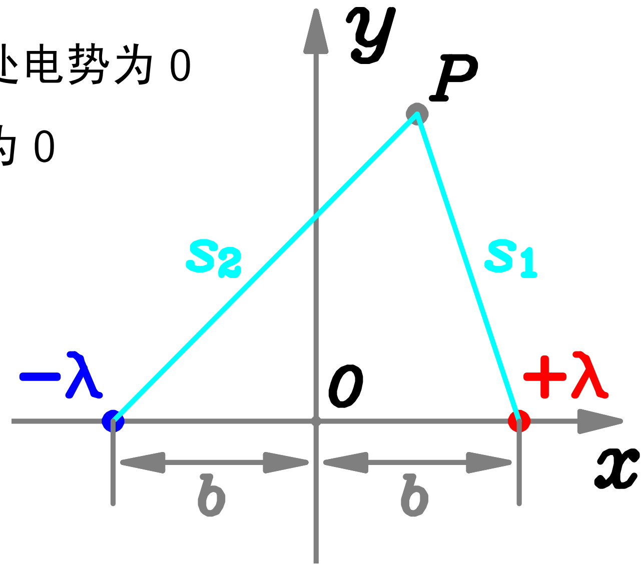
利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s}{s_0}$

其中 (s, θ, z) 为柱坐标



例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

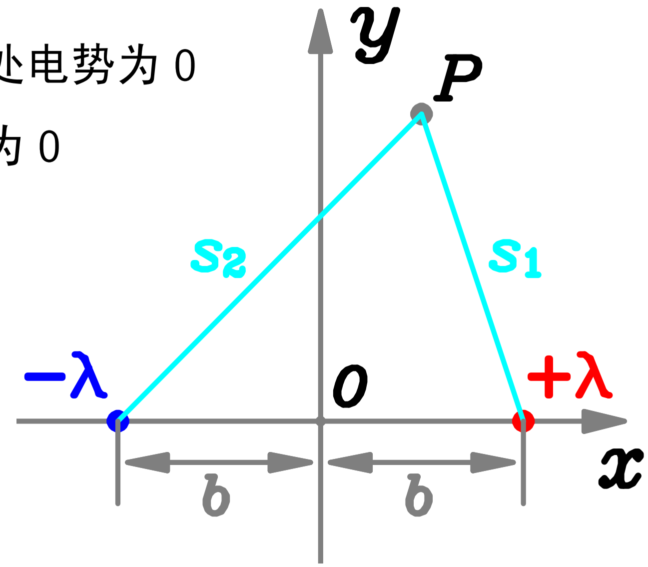
利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{e}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

其中 (s,θ,z) 为柱坐标

(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

其中 (s, θ, z) 为柱坐标

(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。

(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。

(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

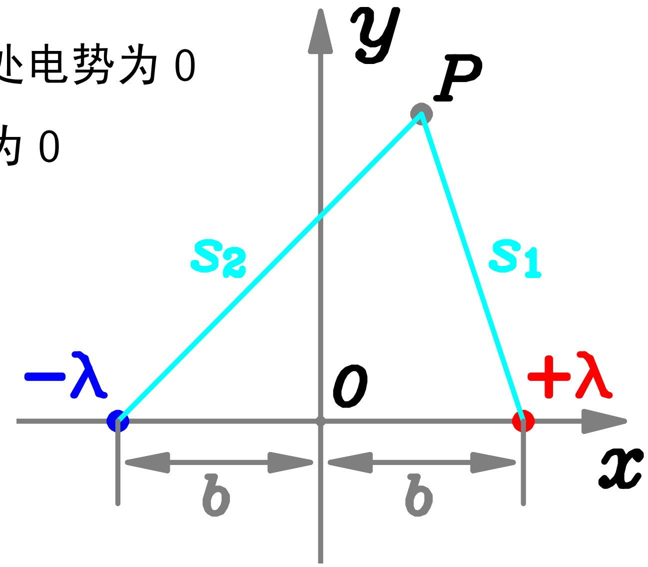
(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\,\hat{e}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

其中 (s, θ, z) 为柱坐标

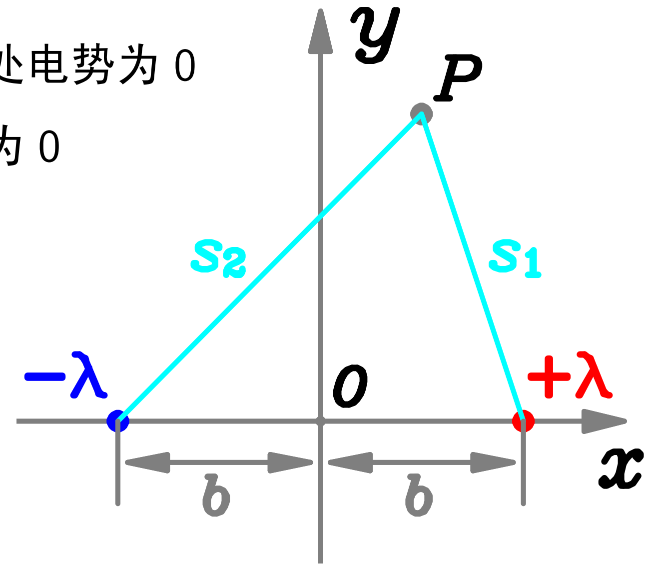


(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

其中 (s,θ,z) 为柱坐标

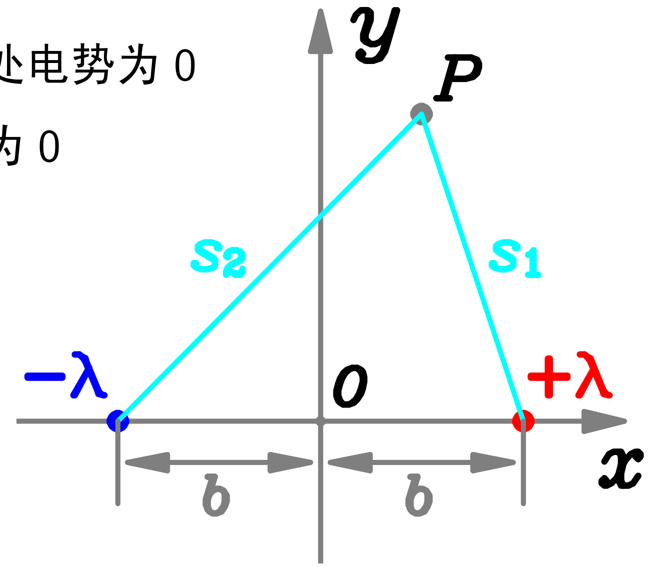
(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

$$s_1 = \sqrt{(x-b)^2+y^2},\quad s_2 = \sqrt{(x+b)^2+y^2},$$

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$ ，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{e}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s}{s_0}$

其中 (s, θ, z) 为柱坐标

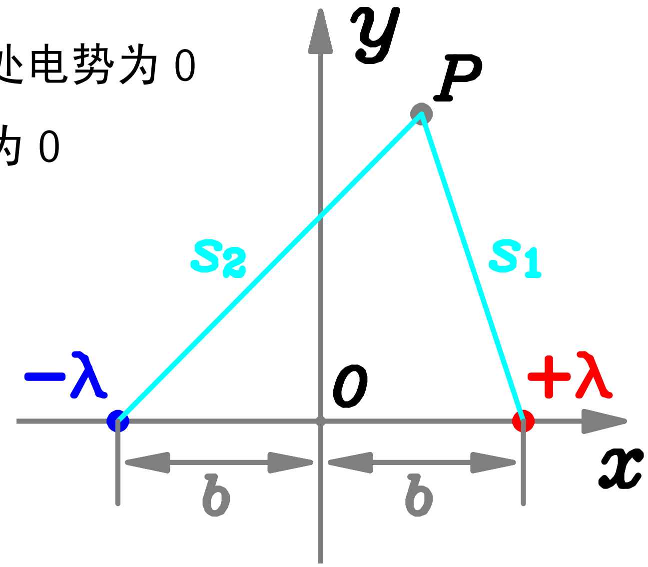
(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \implies \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

$s_1 = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}$, $\quad s_2 = \sqrt{(x+b)^2 + y^2}$, $\quad$ 等势面：$s_1/s_2 = k$

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\, s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{s_0}$

其中 (s, θ, z) 为柱坐标

(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \implies \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

$s_1 = \sqrt{(x-b)^2+y^2}$，$s_2 = \sqrt{(x+b)^2+y^2}$， 等势面：$s_1/s_2 = k$

等势面方程：$(x-h)^2+y^2 = a^2$，其中：$h = \dfrac{k^2+1}{k^2-1}\,b$，$a = \dfrac{2kb}{|k^2-1|}$

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。

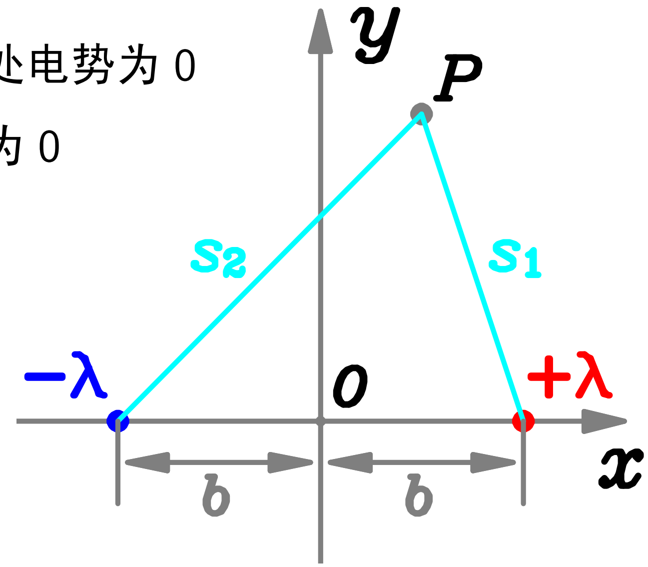
(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{\boldsymbol{E}} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s}{s_0}$

其中 (s,θ,z) 为柱坐标



(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

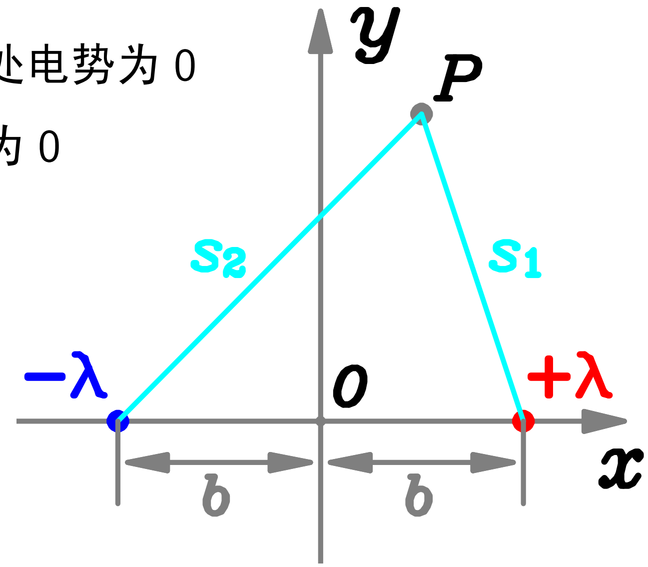
$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

$s_1 = \sqrt{(x-b)^2+y^2}$，$s_2 = \sqrt{(x+b)^2+y^2}$，　等势面：$s_1/s_2 = k$

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h = \dfrac{k^2+1}{k^2-1}b$，$a = \dfrac{2kb}{|k^2-1|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面。

例 4：(1) 无限长带电直导线的线电荷密度 λ，求空间电势。
(2) 两平行无限长直导线相距 $2b$，线电荷密度分别为 $\pm\lambda$，求空间电势。
(3) 两平行无限长导体圆柱相距 $2d$，一半径 a_1，单位长度带电 λ，另一圆柱半径 a_2，单位长度带电 $-\lambda$，求空间电势。



(1) 设导线于 z 轴，对非有限区电荷分布，不宜选取无穷远处电势为 0

选取距导线 s_0 处的一点 P_0 作为电势参考点，该点电势为 0

利用高斯定理易得导线的静电场为：$\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}\,\hat{e}_s$

静电势为：$\varphi = -\displaystyle\int_{P_0}^{P} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s}{s_0}$

其中 (s,θ,z) 为柱坐标

(2) 设两导线在 xoz 平面，与 z 轴平行，截面如图

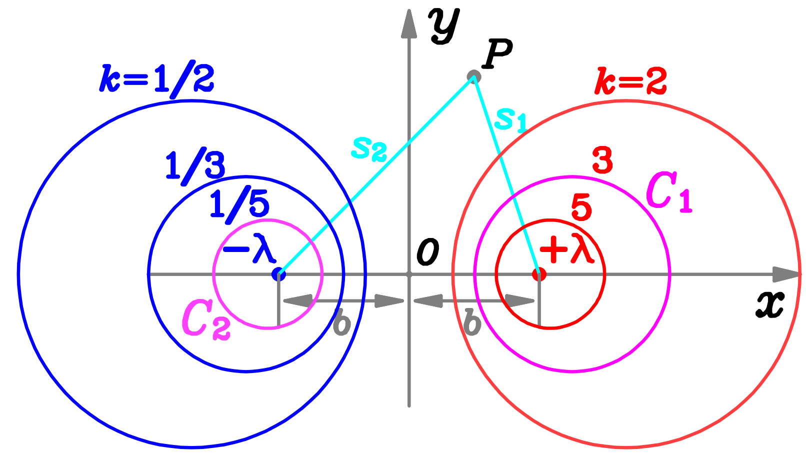
选取坐标原点 O 电势参考点，则图示两根导线的电势为：

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_1}{b} + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{b} \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s_2}{s_1}$$

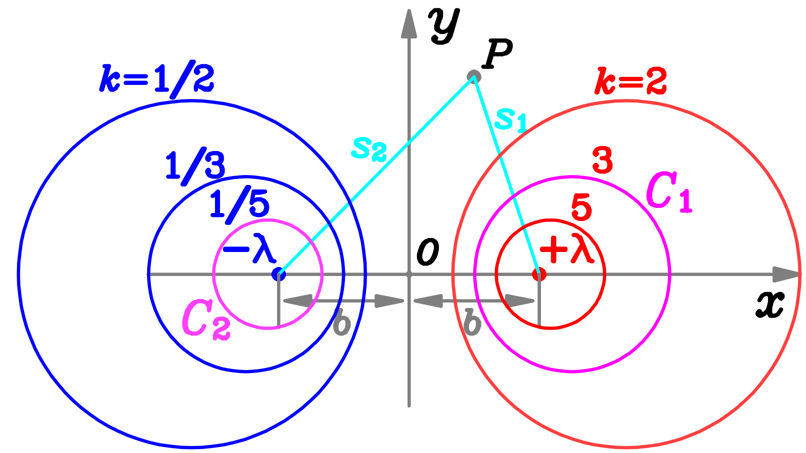
$s_1 = \sqrt{(x-b)^2+y^2}$，　$s_2 = \sqrt{(x+b)^2+y^2}$，　等势面：$s_1/s_2 = k$

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h = \dfrac{k^2+1}{k^2-1}b$，$a = \dfrac{2kb}{|k^2-1|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面。

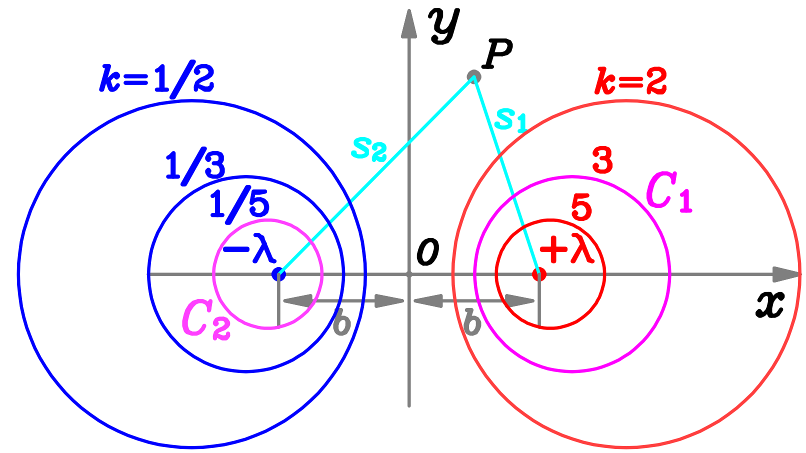

y
P
k=1/2
k=2
s_2
s_1
1/3
3
C_1
1/5
5
−λ
+λ
o
C_2
b
b
x

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$



等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

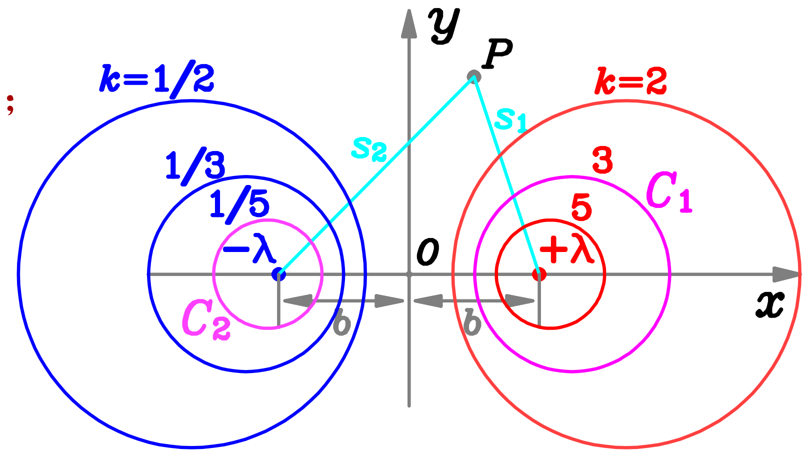
等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

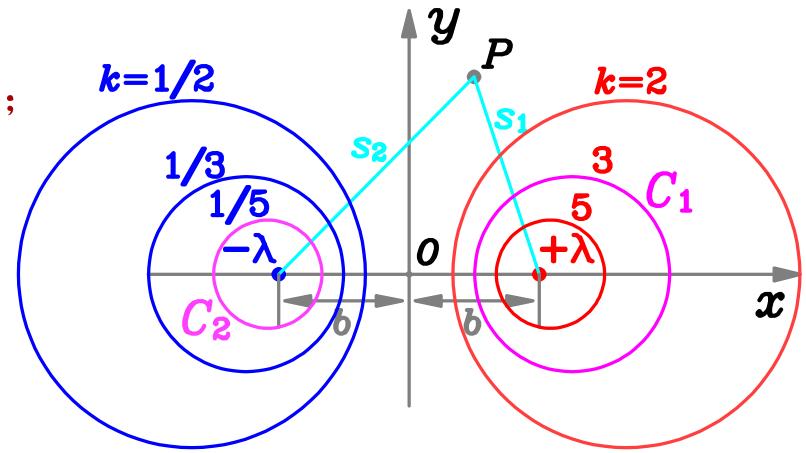


等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$



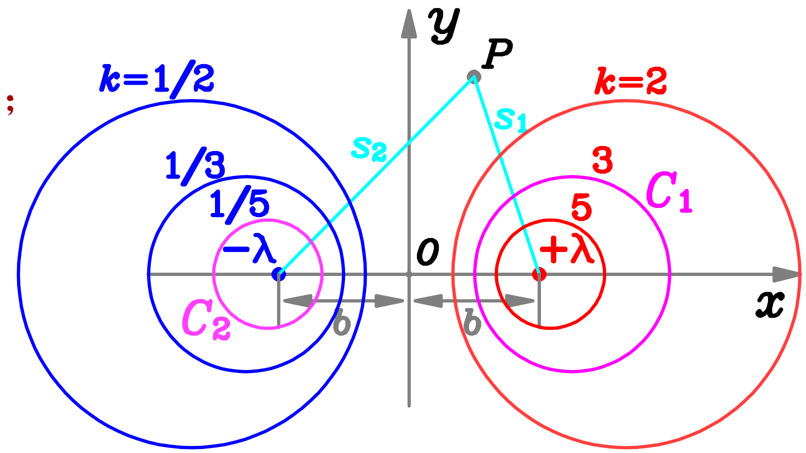
等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

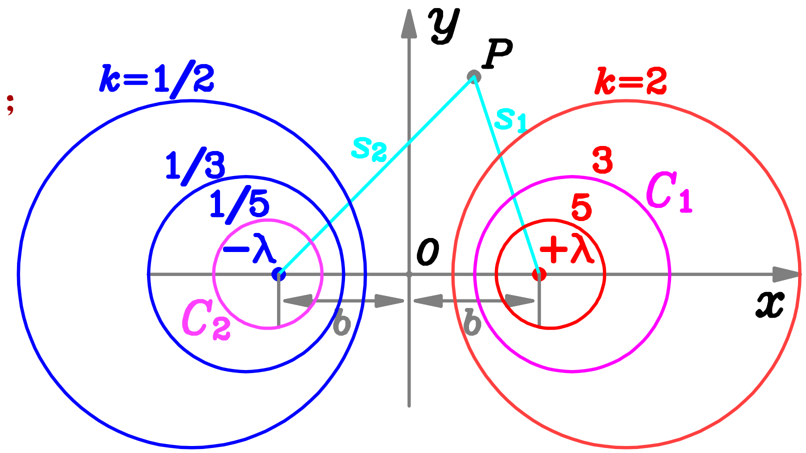


等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

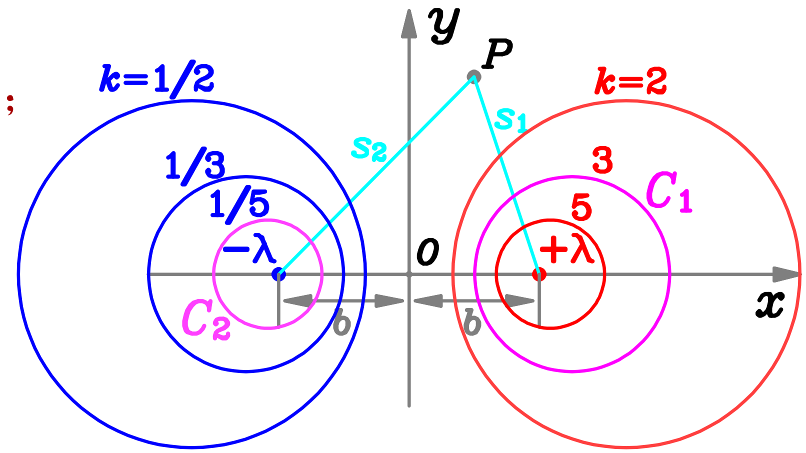


现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

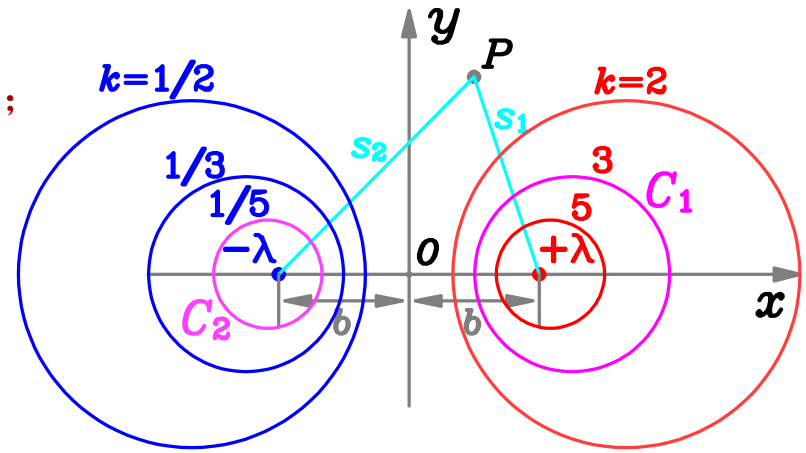
半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$



现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

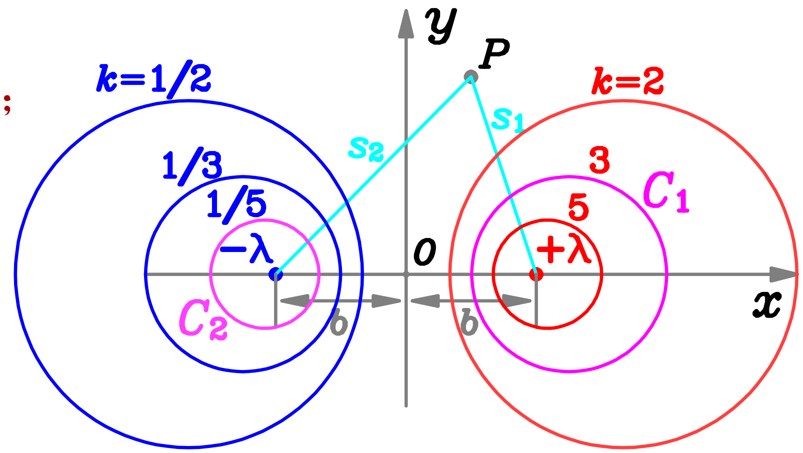
这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$



现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

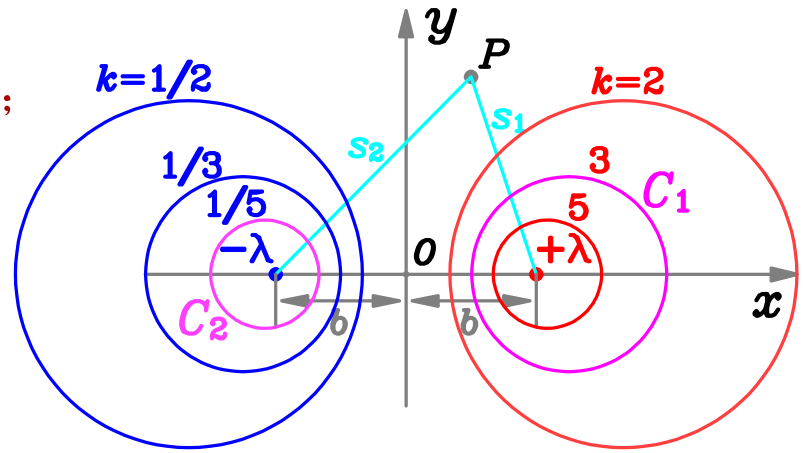
半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，又能满足单位长度导体圆柱带电 λ

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

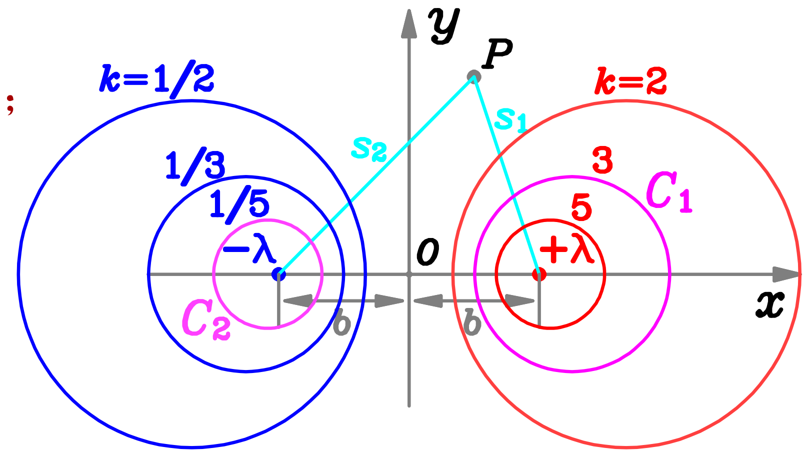
因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，
又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么？

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。

等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$



现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

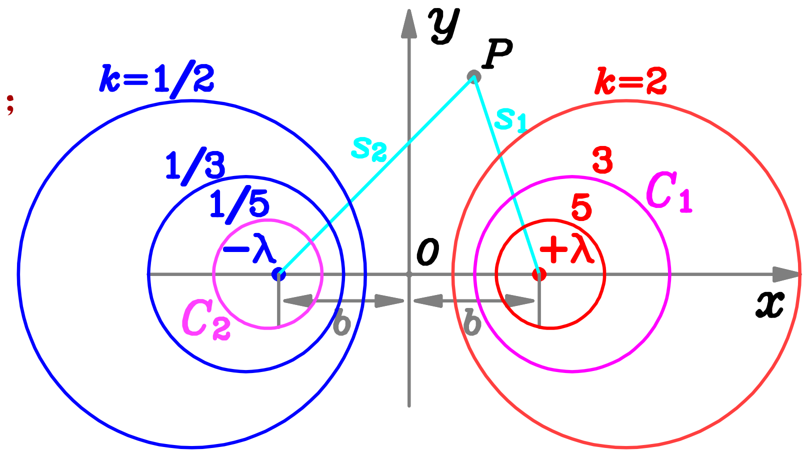
这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，
又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么?

同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线,

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

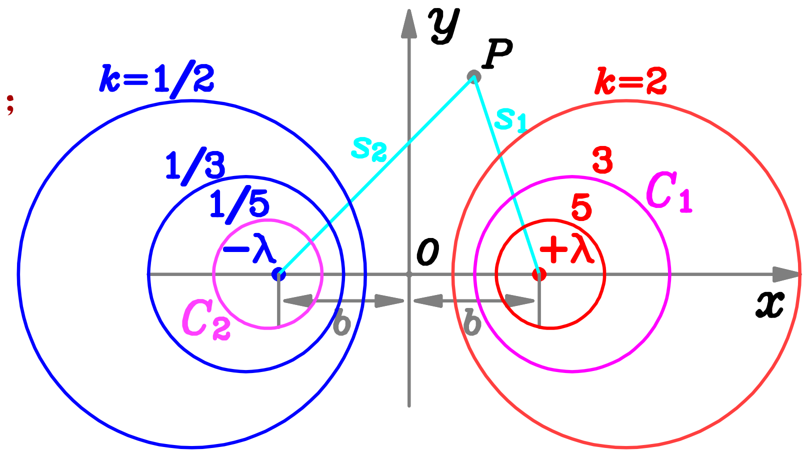
这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，
又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么？

同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

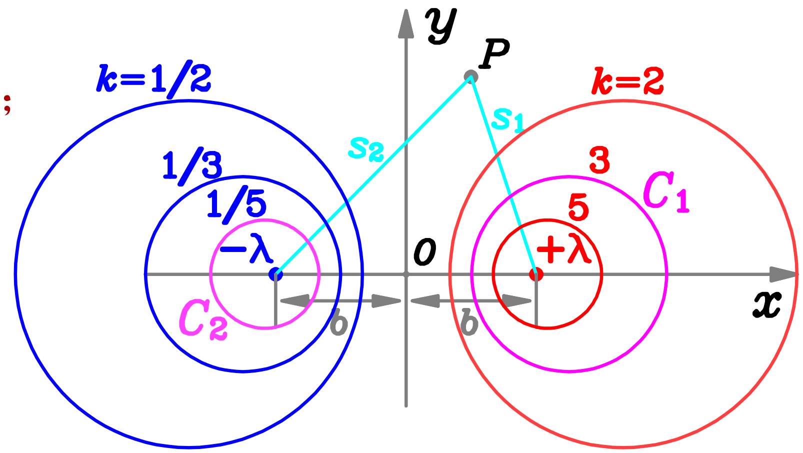
因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，
又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么？

同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

半径为 $a_2=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=1/5}$，单位长度带电 $-\lambda$ 的导体圆柱 C_2，这时空间电势还是 φ

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么？

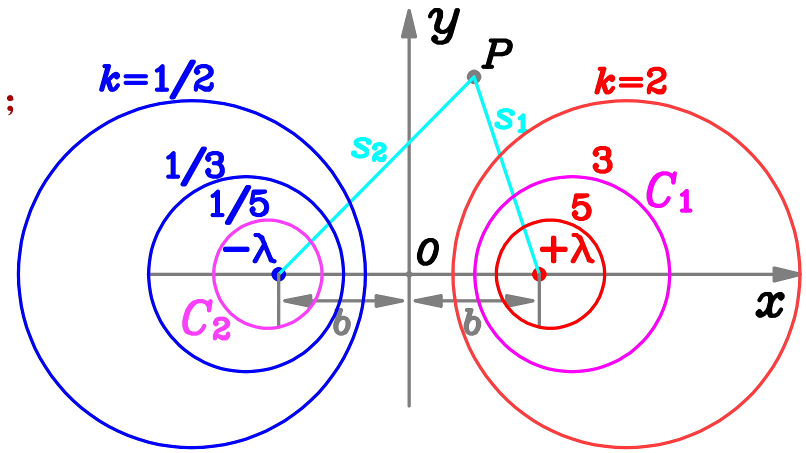
同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

半径为 $a_2=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=1/5}$，单位长度带电 $-\lambda$ 的导体圆柱 C_2，这时空间电势还是 φ

这就暗示了：

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么?

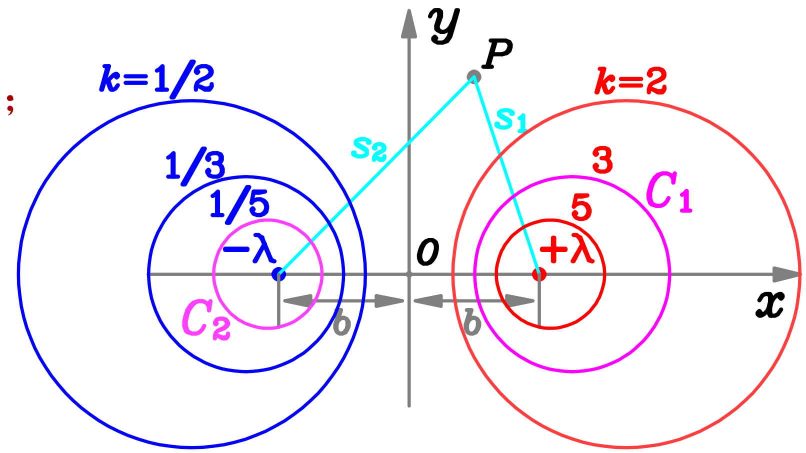
同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

半径为 $a_2=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=1/5}$，单位长度带电 $-\lambda$ 的导体圆柱 C_2，这时空间电势还是 φ

这就暗示了：半径为 a_1，a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$，相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱的电势

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，
又能满足单位长度导体圆柱带电 λ 为什么?

同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

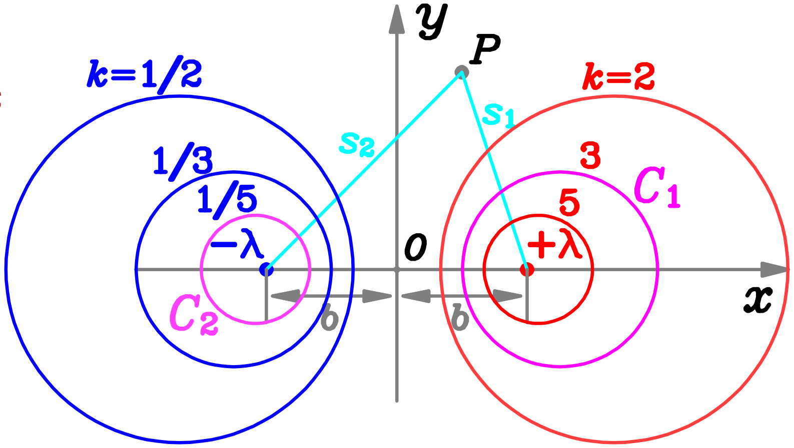
半径为 $a_2=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=1/5}$，单位长度带电 $-\lambda$ 的导体圆柱 C_2，这时空间电势还是 φ

这就暗示了：半径为 a_1, a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$，相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱的电势

可由两平行导线的电势给定。

等势面方程：$(x-h)^2+y^2=a^2$，其中：$h=\dfrac{k+k^{-1}}{k-k^{-1}}b$，$a=\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}$

等势面为半径a，轴心在 $(h,0)$ 的圆柱面,如图所示。



等势面性质：$k=k_0$ 与 $k=k_0^{-1}$ 对应的等势面对称；

a、b 和 h 满足：$h^2=a^2+b^2$

现在，移去线密度为 λ 的导线

放置轴心在 $h_1=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=3}$

半径为 $a_1=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=3}$，单位长度带电 λ 的导体圆柱 C_1

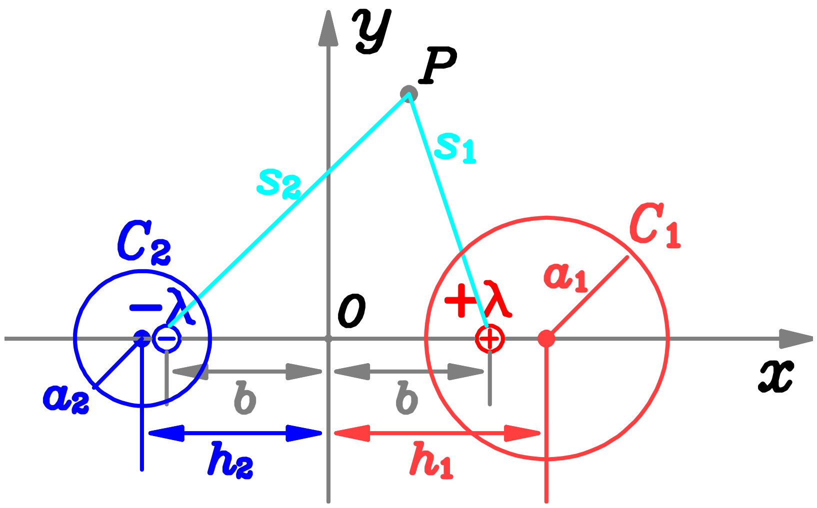
这时空间电势仍为：$\boxed{\varphi=\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{s_2}{s_1}}$

因为此 φ 既保证导体圆柱上电势为常数，又能满足单位长度导体圆柱带电 λ　为什么?

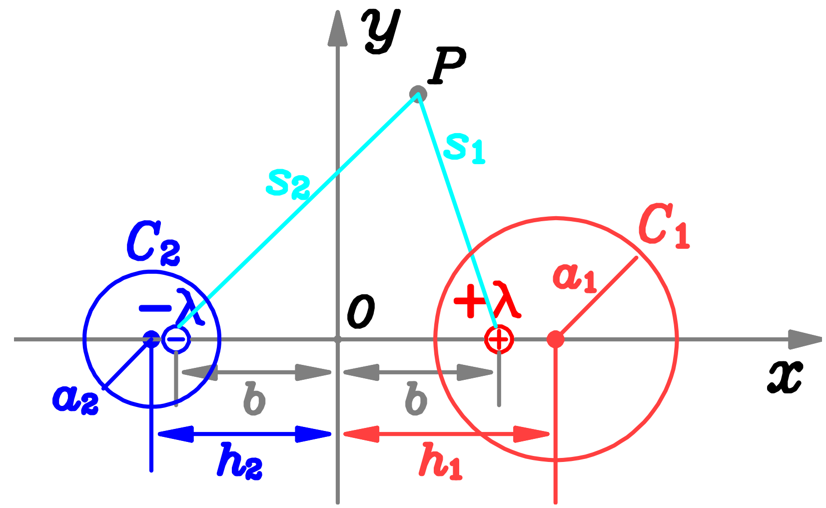
同理，如再移去线密度为 $-\lambda$ 的导线，代之以轴心在 $h_2=\left[\dfrac{(k+k^{-1})b}{k-k^{-1}}\right]_{k=1/5}$，

半径为 $a_2=\left[\dfrac{2b}{|k-k^{-1}|}\right]_{k=1/5}$，单位长度带电 $-\lambda$ 的导体圆柱 C_2，这时空间电势还是 φ

这就暗示了：半径为 a_1, a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$，相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱的电势可由两平行导线的电势给定。

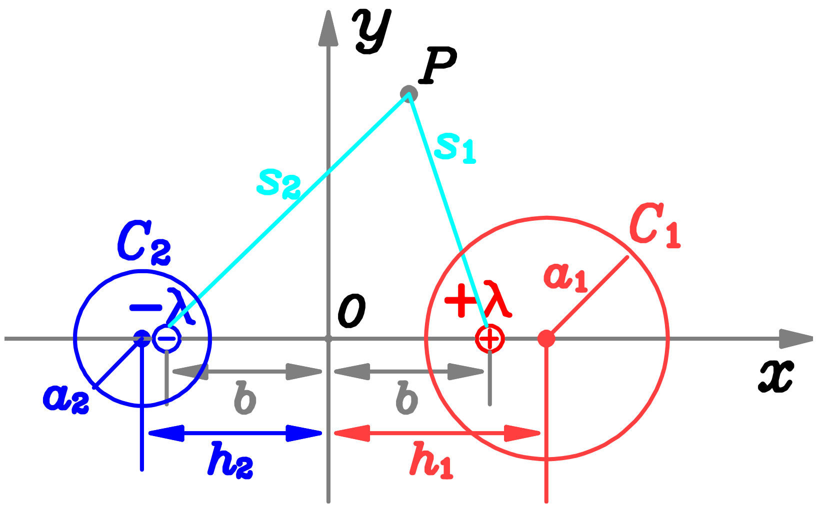

y
P
s_1
s_2
C_2
C_1
a_1
$-\lambda$
$+\lambda$
O
x
a_2
b
b
h_2
h_1

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系



(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

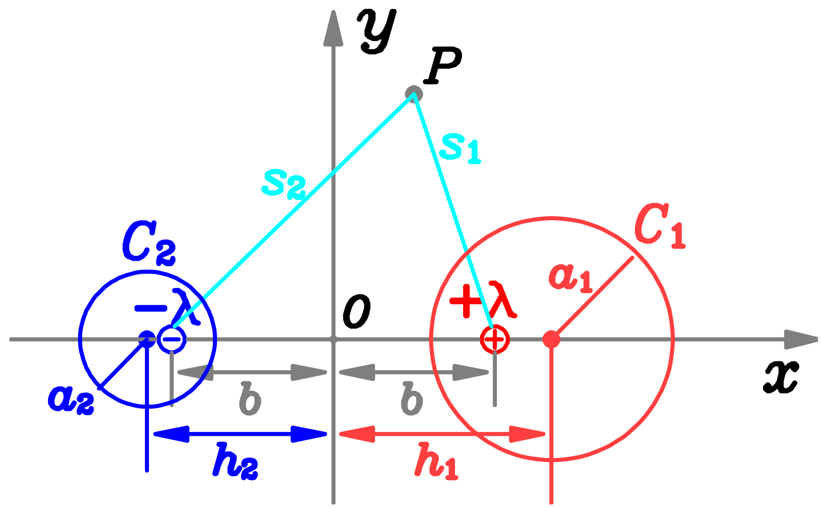
也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2



(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

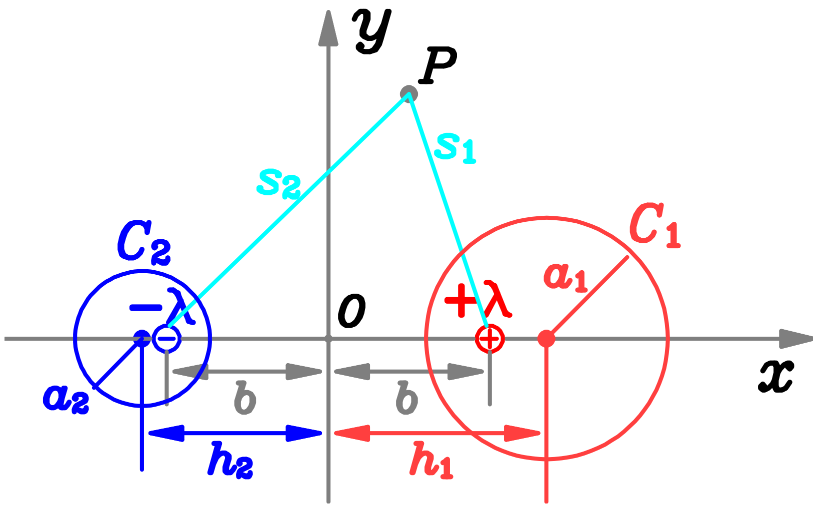


(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$



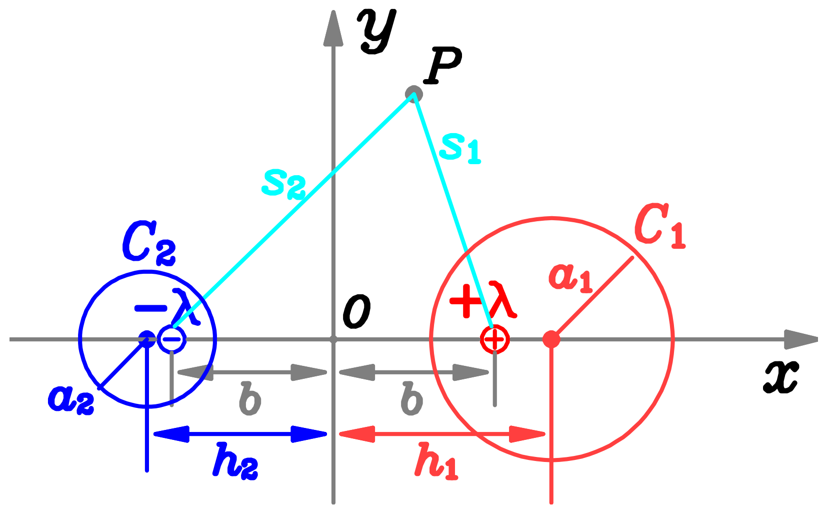
(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。



(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

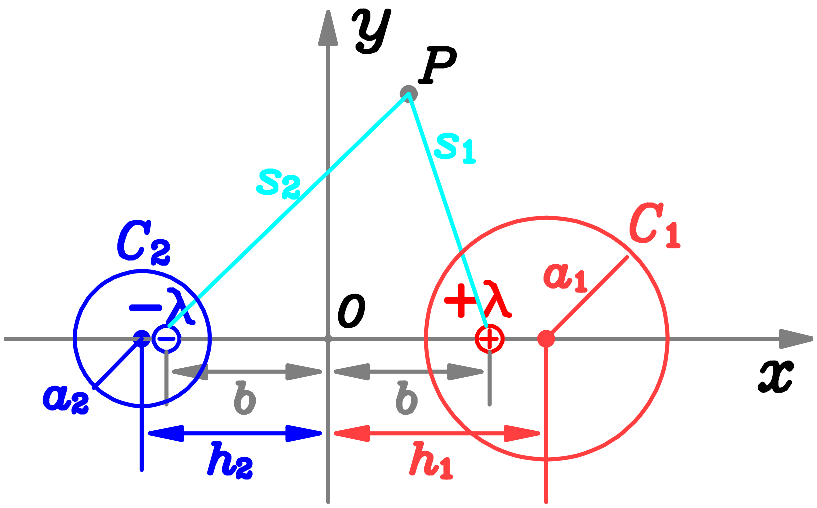
也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。



(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

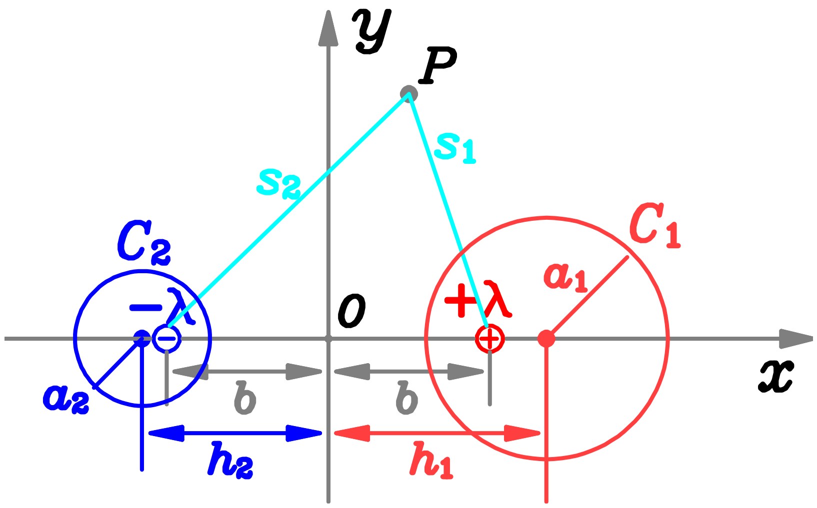
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (=h_1+h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

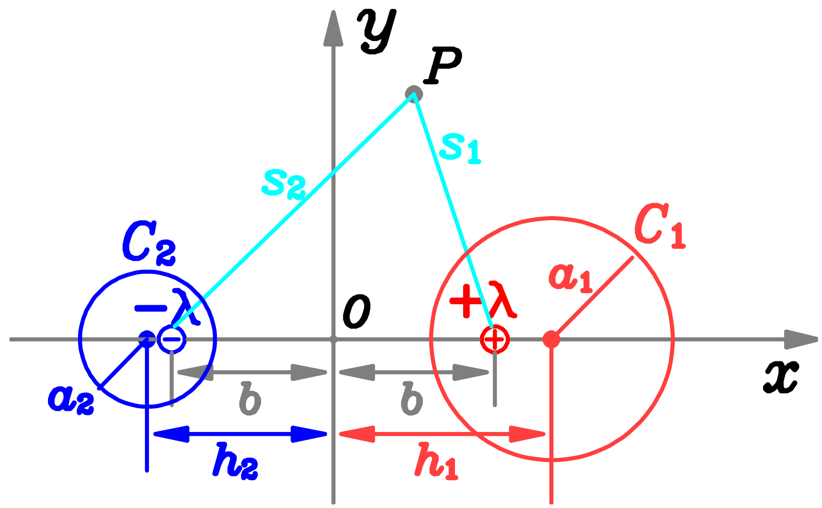
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$， 其中 h，a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

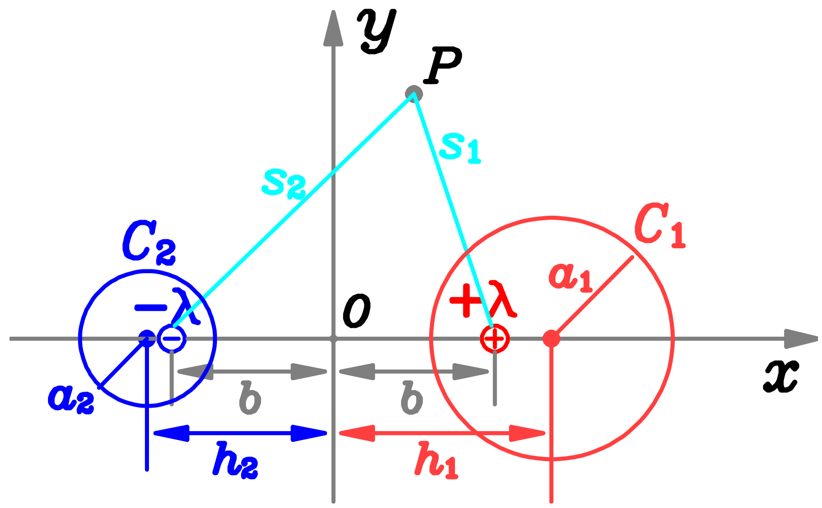
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$， 其中 h, a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

因此有：

$$h_1^2 = a_1^2 + b^2 \qquad (1)$$
$$h_2^2 = a_2^2 + b^2 \qquad (2)$$
$$h_1 + h_2 = 2d \qquad (3)$$

$\Rightarrow$

(1)−(2)：$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = a_1^2 - a_2^2$

即：$h_1 - h_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(2d)$ (4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

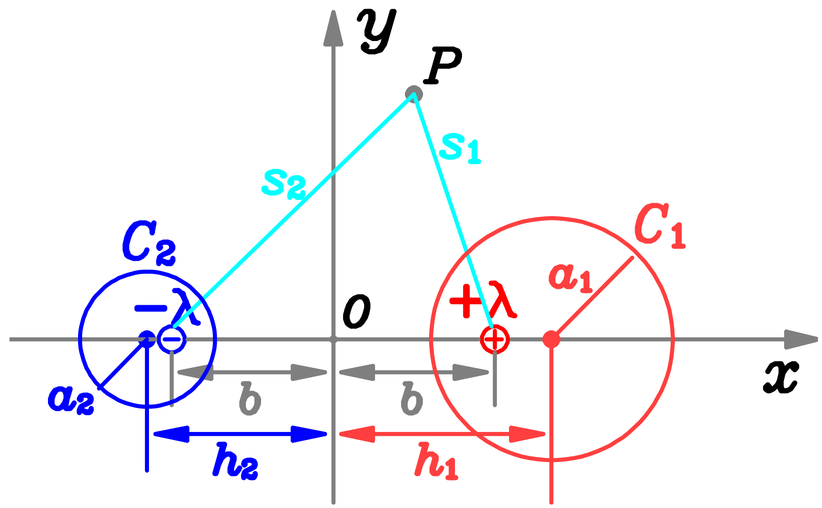
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$， 其中 h，a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

因此有：
$$h_1^2 = a_1^2 + b^2 \qquad (1)$$
$$h_2^2 = a_2^2 + b^2 \qquad (2)$$
$$h_1 + h_2 = 2d \qquad (3)$$

$\Rightarrow$

(1)−(2)：$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = a_1^2 - a_2^2$

即：$h_1 - h_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(2d)$ (4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

类似问题：

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

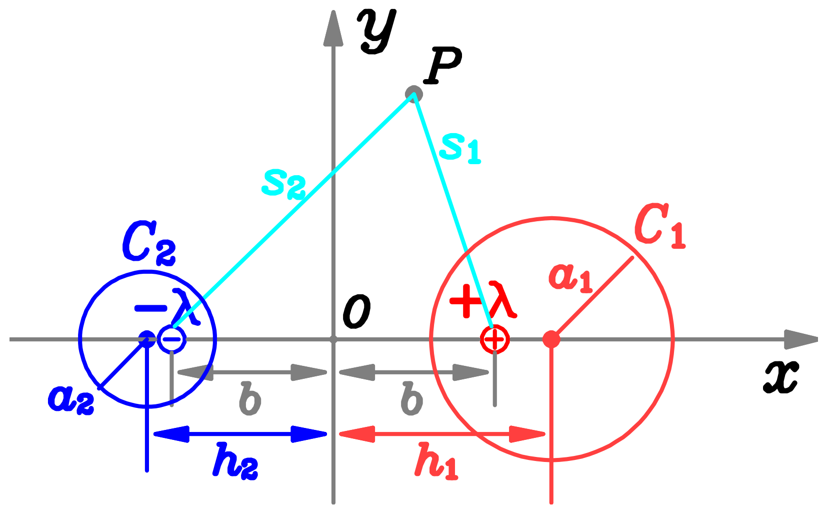
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$，　其中 h, a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

$$h_1^2 = a_1^2 + b^2 \qquad (1)$$

因此有：
$$h_2^2 = a_2^2 + b^2 \qquad (2)$$

$$h_1 + h_2 = 2d \qquad (3)$$

$\Rightarrow$

(1)−(2)：$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = a_1^2 - a_2^2$

即：$h_1 - h_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(2d)$ (4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

类似问题：

内外导体圆柱壳平行但不同轴（偏心电缆问题），单位长度分别带电 $\pm\lambda$

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

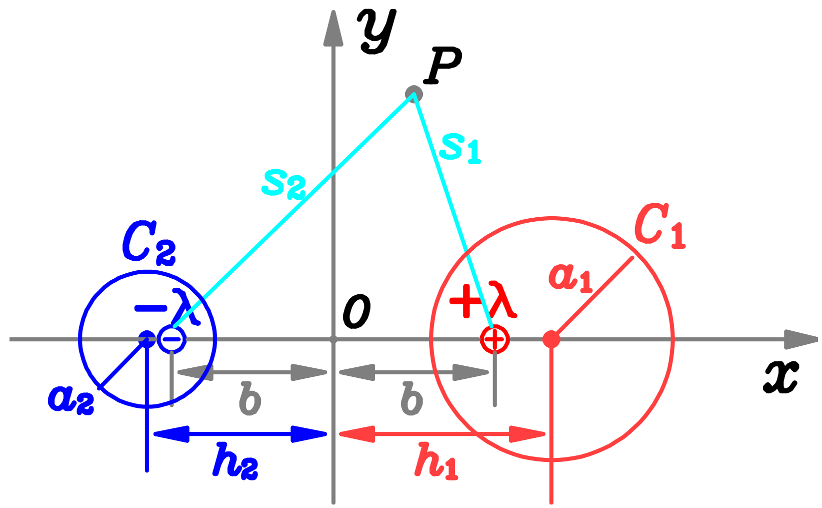
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$，　其中 h, a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

因此有：

$$h_1^2 = a_1^2 + b^2 \quad (1)$$
$$h_2^2 = a_2^2 + b^2 \quad (2)$$
$$h_1 + h_2 = 2d \quad (3)$$

$\Rightarrow$

(1)−(2)：$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = a_1^2 - a_2^2$

即：$h_1 - h_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(2d)$　　(4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

类似问题：

内外导体圆柱壳平行但不同轴（偏心电缆问题），单位长度分别带电 $\pm\lambda$

单位长度带电 λ 的导体圆柱体，在无限大导体平面附近，圆柱轴平行于平面

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

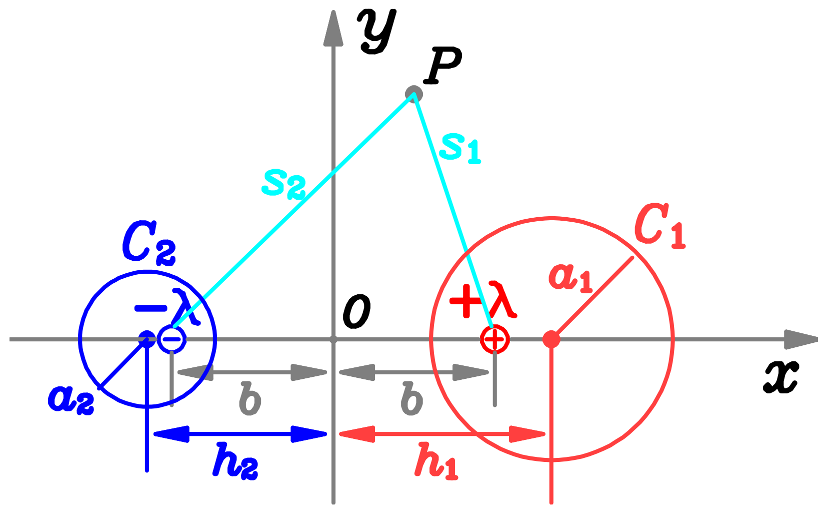
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 h_1+h_2 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (=h_1+h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2=a^2+b^2$， 其中 h, a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

因此有：
$$h_1^2=a_1^2+b^2 \qquad (1)$$
$$h_2^2=a_2^2+b^2 \qquad (2)$$
$$h_1+h_2=2d \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ (1)−(2)：$(h_1-h_2)(h_1+h_2)=a_1^2-a_2^2$

即：$h_1-h_2=(a_1^2-a_2^2)/(2d)$ (4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

类似问题：

内外导体圆柱壳平行但不同轴（偏心电缆问题），单位长度分别带电 $\pm\lambda$

单位长度带电 λ 的导体圆柱体，在无限大导体平面附近，圆柱轴平行于平面

平行导体圆柱壳之电势差V_0（平行导线的电容）

(3) 上述做法是先求平行导线的电势，再求平行导线所能描述的平行圆柱体系

也即：从 b，k_1，k_2 求 a_1，a_2，h_1，h_2

问题当然可以反过来提：

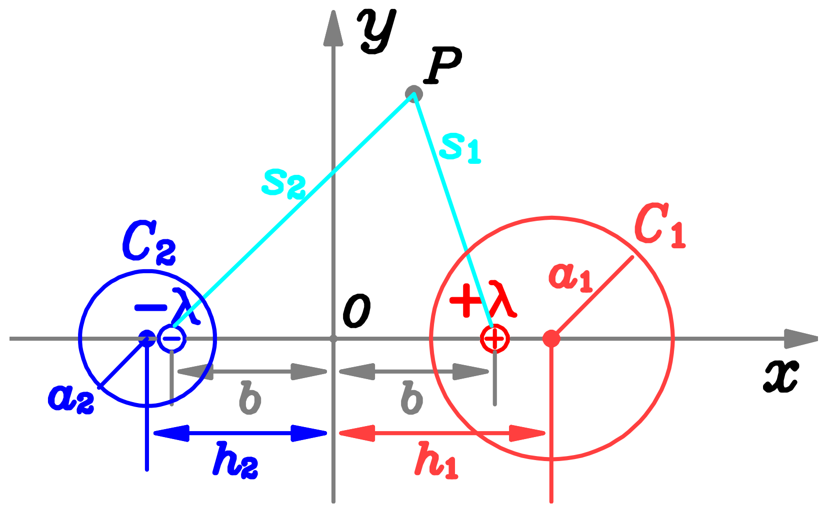
已知半径分别为 a_1 和 a_2，单位长度带电 $\pm\lambda$

相距 $h_1 + h_2$ 的两平行导体圆柱，求空间电势。

上述分析表明空间电势可用平行导线电势描述。

问题变成：从 a_1，a_2，$2d\ (= h_1 + h_2)$

反过来求 b，k，h_1，h_2



出发点：$h^2 = a^2 + b^2$，　其中 h, a 为等势圆柱面轴心位置和半径，$2b$ 为两平行导线距离

因此有：
$$h_1^2 = a_1^2 + b^2 \qquad (1)$$
$$h_2^2 = a_2^2 + b^2 \qquad (2)$$
$$h_1 + h_2 = 2d \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ (1)−(2)：$(h_1 - h_2)(h_1 + h_2) = a_1^2 - a_2^2$

即：$h_1 - h_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(2d)$　　(4)

由 (3) 和 (4) 解得 h_1，代入 (1) 求得 b

类似问题：

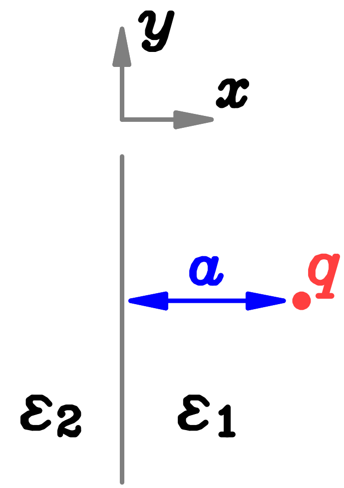
内外导体圆柱壳平行但不同轴（偏心电缆问题），单位长度分别带电 $\pm\lambda$

单位长度带电 λ 的导体圆柱体，在无限大导体平面附近，圆柱轴平行于平面

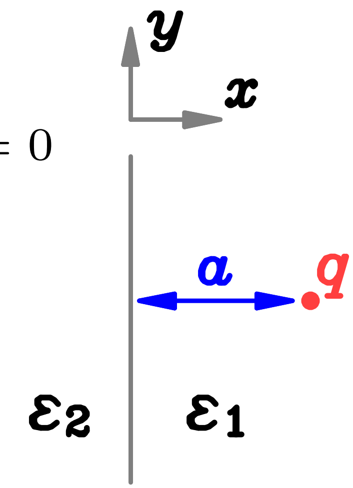
平行导体圆柱壳之电势差 V_0（平行导线的电容）

思考：半径相同单位长度带电 $\pm\lambda$ 的两平行介质圆柱，设电荷分布于柱表面，问面电荷如何分布体系静电能极小？

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布

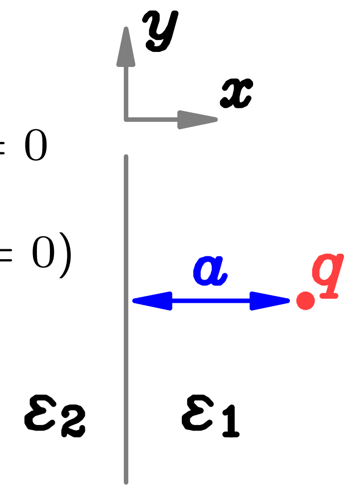


例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件： (1) $x > 0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $x < 0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

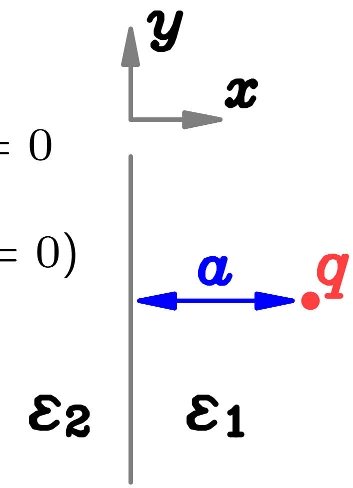
例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\quad$ $x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2$, $\quad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f = 0$)

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



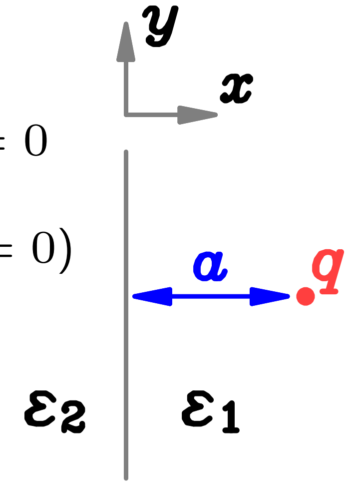
定解条件：

(1) $x > 0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\qquad x < 0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x = 0$ 界面：$\varphi_1 = \varphi_2$, $\qquad \epsilon_1 \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2 \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f = 0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty} = 0$, $\qquad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty} = 0$

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

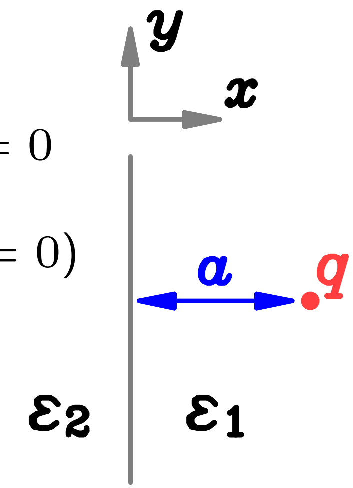
(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\quad$ $x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2,\quad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f=0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec r\to\infty} = 0,\quad \varphi_2\Big|_{\vec r\to-\infty} = 0$

分析： φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\qquad x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2=0$

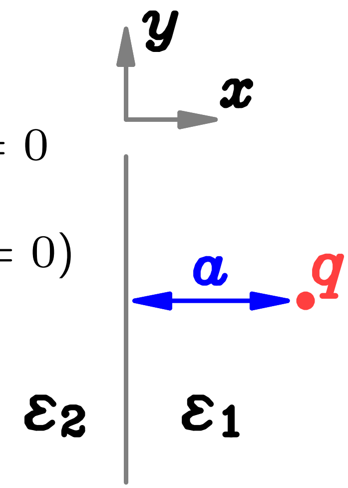
(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2,\qquad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ (因为 $\sigma_f=0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec r\to\infty}=0,\qquad \varphi_2\Big|_{\vec r\to-\infty}=0$

分析：φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x>0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x=-a<0$ 的象电荷 q' 代替

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\qquad x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2,\qquad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$(因为 $\sigma_f = 0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty} = 0,\qquad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty} = 0$

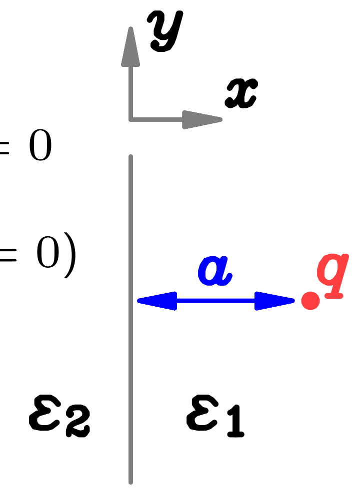
分析：

φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x>0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x=-a<0$ 的象电荷 q' 代替

对 $x<0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x=a>0$ 的象电荷 q'' 代替

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$　　$x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2=0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2,\quad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$　(因为 $\sigma_f=0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty}=0,\quad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty}=0$

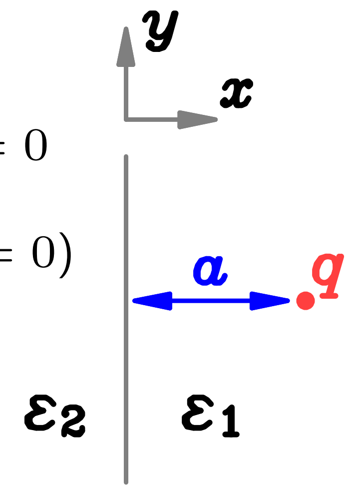
分析：φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x>0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x=-a<0$ 的象电荷 q' 代替

对 $x<0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x=a>0$ 的象电荷 q'' 代替

注意象电荷 q' 和 q'' 都在相应的求解区之外，保证电势满足原定解条件 (1)

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x > 0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\quad$ $x < 0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x = 0$ 界面：$\varphi_1 = \varphi_2$， $\quad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f = 0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty} = 0$， $\quad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty} = 0$

分析：

φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

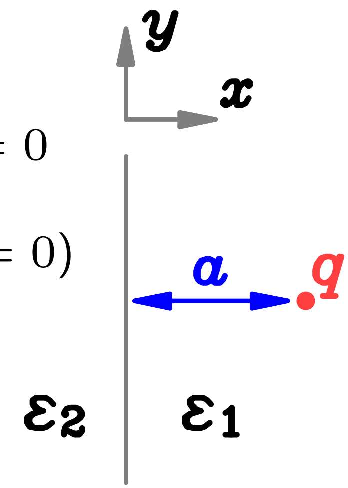
对 $x > 0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x = -a < 0$ 的象电荷 q' 代替

对 $x < 0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x = a > 0$ 的象电荷 q'' 代替

注意象电荷 q' 和 q'' 都在相应的求解区之外，保证电势满足原定解条件 (1)

只要象电荷是有限电荷体系，定解条件 (3) 是自然满足的

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\qquad x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2=0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2$, $\qquad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f=0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty}=0,\qquad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty}=0$

分析：

φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x>0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x=-a<0$ 的象电荷 q' 代替

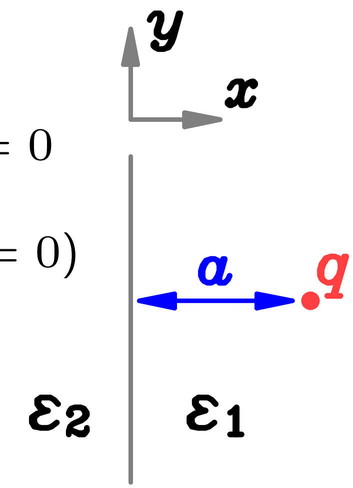
对 $x<0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x=a>0$ 的象电荷 q'' 代替

注意象电荷 q' 和 q'' 都在相应的求解区之外，保证电势满足原定解条件 (1)

只要象电荷是有限电荷体系，定解条件 (3) 是自然满足的

因此应利用 (2) 来确定 q'，q''

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x>0$ 区：$\nabla^2\varphi_1=-\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$　　$x<0$ 区：$\nabla^2\varphi_2=0$

(2) $x=0$ 界面：$\varphi_1=\varphi_2$,　　$\epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$　(因为 $\sigma_f=0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty}=0,\qquad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty}=0$

分析：

φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x>0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x=-a<0$ 的象电荷 q' 代替

对 $x<0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x=a>0$ 的象电荷 q'' 代替

注意象电荷 q' 和 q'' 都在相应的求解区之外，保证电势满足原定解条件 (1)

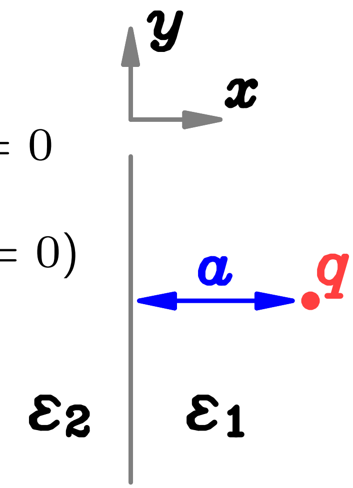
只要象电荷是有限电荷体系，定解条件 (3) 是自然满足的

因此应利用 (2) 来确定 q'，q''

求解：

$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]\qquad x\geq 0$$

例 5：两种均匀介质的介电常数分别为 ϵ_1，ϵ_2，其界界面为无穷大平面，在介质 1 中距界面 a 处放置一点电荷，求空间电势分布



定解条件：

(1) $x > 0$ 区：$\nabla^2\varphi_1 = -\dfrac{q}{\epsilon_1}\delta(x-a)$ $\qquad$ $x < 0$ 区：$\nabla^2\varphi_2 = 0$

(2) $x = 0$ 界面：$\varphi_1 = \varphi_2$, $\qquad \epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}$ $\quad$ (因为 $\sigma_f = 0$)

(3) 整个求解区边界：$\varphi_1\Big|_{\vec{r}\to\infty} = 0$, $\qquad \varphi_2\Big|_{\vec{r}\to-\infty} = 0$

分析：

φ_1 和 φ_2 都应包含 q 的贡献和界面极化电荷的贡献

对 $x > 0$ 区的 φ_1，界面极化电荷的影响用位于 $x = -a < 0$ 的象电荷 q' 代替

对 $x < 0$ 区的 φ_2，原 q 和界面极化电荷的贡献用位于 $x = a > 0$ 的象电荷 q'' 代替

注意象电荷 q' 和 q'' 都在相应的求解区之外，保证电势满足原定解条件 (1)

只要象电荷是有限电荷体系，定解条件 (3) 是自然满足的

因此应利用 (2) 来确定 q'，q''

求解：

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0$$

求解：$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

求解： $$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x\geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x\leq 0 \qquad (b)$$

求解：$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$，$\epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$，这里 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial x}$

求解：$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$， $\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式：
$$\epsilon_2(q+q') = \epsilon_1 q''$$
$$-q+q' = -q''$$

求解： $$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$， $\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式： $$\begin{aligned} \epsilon_2(q+q') &= \epsilon_1 q'' \\ -q+q' &= -q'' \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \end{aligned}$$ 得解

求解：
$$\varphi_1=\frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}+\frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right]\qquad x\geq 0\qquad (a)$$

$$\varphi_2=\frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\qquad x\leq 0\qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0}=\varphi_2\Big|_{x=0}$， $\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0}=\epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式：
$$\begin{aligned}\epsilon_2(q+q')&=\epsilon_1 q''\\ -q+q'&=-q''\end{aligned}\quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned}q'&=\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q\\ q''&=\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q\end{aligned}$$
得解

例 6：半径为 a 的中性导体球位于坐标原点，在球外 x 轴上的 $x=b$ 与 $x=c$ 分别放一点电荷 q_b 和 q_c，求位于 q_c 的受力。

象电荷： 在 $x=\frac{a^2}{b}$ 处放 $q_b'=-\frac{a}{b}q_b$，

求解：$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$，$\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式：
$$\begin{aligned} \epsilon_2(q+q') &= \epsilon_1 q'' \\ -q+q' &= -q'' \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \end{aligned}$$ 得解

例 6：半径为 a 的中性导体球位于坐标原点，在球外 x 轴上的 $x=b$ 与 $x=c$ 分别放一点电荷 q_b 和 q_c，求位于 q_c 的受力。

象电荷： 在 $x=\frac{a^2}{b}$ 处放 $q_b' = -\frac{a}{b}q_b$， 在 $x=\frac{a^2}{c}$ 处放 $q_c' = -\frac{a}{c}q_c$，

求解：$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \ge 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \le 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$，$\epsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式： $$\begin{aligned} \epsilon_2(q+q') &= \epsilon_1 q'' \\ -q+q' &= -q'' \end{aligned} \quad\Longrightarrow\quad \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \end{aligned}$$ 得解

例 6：半径为 a 的中性导体球位于坐标原点，在球外 x 轴上的 $x=b$ 与 $x=c$ 分别放一点电荷 q_b 和 q_c，求位于 q_c 的受力。

象电荷： 在 $x=\frac{a^2}{b}$ 处放 $q_b' = -\frac{a}{b}q_b$， 在 $x=\frac{a^2}{c}$ 处放 $q_c' = -\frac{a}{c}q_c$，

在坐标原点放 $q' = -(q_b'+q_c')$，

求解：$\varphi_1 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\dfrac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$， $\epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式： $\begin{aligned} \epsilon_2(q+q') &= \epsilon_1 q'' \\ -q+q' &= -q'' \end{aligned} \implies \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \end{aligned}$ 得解

例 6：半径为 a 的中性导体球位于坐标原点，在球外 x 轴上的 $x=b$ 与 $x=c$ 分别放一点电荷 q_b 和 q_c，求位于 q_c 的受力。

象电荷： 在 $x = \dfrac{a^2}{b}$ 处放 $q_b' = -\dfrac{a}{b}q_b$， 在 $x = \dfrac{a^2}{c}$ 处放 $q_c' = -\dfrac{a}{c}q_c$，

在坐标原点放 $q' = -(q_b' + q_c')$， 从而使导体球面为等势体且总象电荷为 0

求解：
$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}}\right] \qquad x \geq 0 \qquad (a)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}} \qquad x \leq 0 \qquad (b)$$

定解条件 (2) 要求：$\varphi_1\Big|_{x=0} = \varphi_2\Big|_{x=0}$， $\epsilon_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\Big|_{x=0} = \epsilon_2\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\Big|_{x=0}$， 这里 $\dfrac{\partial}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial x}$

代入 (a) 和 (b) 式：
$$\begin{aligned} \epsilon_2(q+q') &= \epsilon_1 q'' \\ -q+q' &= -q'' \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} q' &= \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}q \end{aligned}$$
得解

例 6：半径为 a 的中性导体球位于坐标原点，在球外 x 轴上的 $x=b$ 与 $x=c$ 分别放一点电荷 q_b 和 q_c，求位于 q_c 的受力。

象电荷： 在 $x=\dfrac{a^2}{b}$ 处放 $q_b' = -\dfrac{a}{b}q_b$， 在 $x=\dfrac{a^2}{c}$ 处放 $q_c' = -\dfrac{a}{c}q_c$，

在坐标原点放 $q' = -(q_b'+q_c')$， 从而使导体球面为等势体且总象电荷为 0

q_c 的受力即为： q_c 受 q_b，q_b'，q_c'，q'四个点电荷的总作用力

静电势参考点只允许有一个

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

$q' = -Rq/(R+a)$ 距球心 $b = R^2/(R+a)$，$q'' = Q + Rq/(R+a)$ 在球心

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

$q' = -Rq/(R+a)$ 距球心 $b = R^2/(R+a)$，$q'' = Q + Rq/(R+a)$ 在球心

球面电势：$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q''}{R}$，　　对有限的 Q 和 q，$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi = 0$

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0 ？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

$q' = -Rq/(R+a)$ 距球心 $b = R^2/(R+a)$，$q'' = Q + Rq/(R+a)$ 在球心

球面电势：$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q''}{R}$，　　对有限的 Q 和 q，$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi = 0$

地球看成 $R \to \infty$ 的导体球，故地面上的电势：$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi = 0$

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0 ?

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d=R+a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

$q'=-Rq/(R+a)$ 距球心 $b=R^2/(R+a)$，$q''=Q+Rq/(R+a)$ 在球心

球面电势：$\varphi=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q''}{R}$,　　　对有限的 Q 和 q，$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi=0$

地球看成 $R\to\infty$ 的导体球，故地面上的电势：$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi=0$

接地导体与地面等势，故接地导体电势也为 0，与选取无穷远电势为 0 不矛盾。

静电势参考点只允许有一个

对有限电荷分布，选取无穷远电势为 0 之后，是否还可以选取接地电势为 0？

物理上的理解：

选取接地电势为 0 的物理基础：地球看成一个半径很大的导体。

在一半径为 R 带电 Q 的导体球外距导体球的球心 $d = R + a$ 处放置一点电荷 q

这时空间电势由 q 和两个像电荷 q' 和 q'' 描述，

$q' = -Rq/(R+a)$ 距球心 $b = R^2/(R+a)$，$q'' = Q + Rq/(R+a)$ 在球心

球面电势：$\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q''}{R}$，　　对有限的 Q 和 q，$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi = 0$

地球看成 $R \to \infty$ 的导体球，故地面上的电势：$\lim\limits_{R\to\infty}\varphi = 0$

接地导体与地面等势，故接地导体电势也为 0，与选取无穷远电势为 0 不矛盾。

对非有限电荷分布，相当于 $q \to \infty$，若选取无穷远电势为 0，一般不宜再选取接地电势为 0。