§5.6 波导

§5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

§5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；

   内外导体绝缘性能要求

§5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；

   内外导体绝缘性能要求

3. 中空金属管：克服同轴线的一些缺点

§5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。
   缺点：辐射、干扰
2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号
   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；
   内外导体绝缘性能要求
3. 中空金属管：克服同轴线的一些缺点
   1893　J.J.Thomson 首次提出

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；

   内外导体绝缘性能要求

3. 中空金属管：克服同轴线的一些缺点

   1893　J.J.Thomson 首次提出

   1897　L. Rayleigh 奠定理论基础

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。

   缺点：辐射、干扰

2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号

   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；

   内外导体绝缘性能要求

3. 中空金属管：克服同轴线的一些缺点

   1893　J.J.Thomson 首次提出

   1897　L. Rayleigh 奠定理论基础

   1936　G.C. Southworth 实验实现

§ 5.6 波导

波导：用于引导电磁波，使之沿人们所希望的路线传播的结构

一、电磁信号的传输

1. 双线传输：用于传输直流或低频信号、能量。
   缺点：辐射、干扰
2. 同轴电缆：用于传输频率稍高的电磁信号
   缺点：导体功耗 $P \propto \sqrt{\omega}$，随频率增加，内外导体同时有功耗；
   内外导体绝缘性能要求
3. 中空金属管：克服同轴线的一些缺点
   1893 J.J.Thomson 首次提出
   1897 L. Rayleigh 奠定理论基础
   1936 G.C. Southworth 实验实现

能否传输电磁信号，看 Maxwell 方程是否有相应的解。

二、一般波导管的场方程和边界条件

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y) \neq 0$。

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\mathcal{E}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z,$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\mathcal{E}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{e}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_0 = \vec{\mathcal{H}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{e}_z$$

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \nabla_t = \hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} = \hat{\boldsymbol{e}}_s\frac{\partial}{\partial s} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \nabla_t = \hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} = \hat{\boldsymbol{e}}_s\frac{\partial}{\partial s} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\mathcal{E}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{e}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_0 = \vec{\mathcal{H}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad \nabla_t = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} = \hat{e}_s\frac{\partial}{\partial s} + \hat{e}_\phi\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

—— (s,ϕ,z) 为柱坐标

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{ik_gz-i\omega t}, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0(x,y)e^{ik_gz-i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_0 = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad \nabla_t = \hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} = \hat{\boldsymbol{e}}_s\frac{\partial}{\partial s} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

—— (s,ϕ,z) 为柱坐标

其中 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$ 都是 $\vec{\boldsymbol{r}}_t = x\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ 的函数，横向分量 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \perp \hat{\boldsymbol{e}}_z$。

二、一般波导管的场方程和边界条件

1. 横向场分量用纵向场分量表示

考虑沿 z 方向截面均匀的波导管，我们要求电磁信号能沿 z 方向传播，也即希望波导管中存在如下形式的解，k_g 应为实数

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t}, \qquad \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_0(x,y)e^{ik_g z - i\omega t} \tag{1}$$

也就是上式代入 Maxwell 方程和边界条件，要能求得非 0 解 $\vec{\mathcal{E}}_0(x,y) \neq 0$。既然 z 方向是电磁信号传输的特殊方向，我们就把它分解出来

$$\vec{\mathcal{E}}_0 = \vec{\mathcal{E}}_t + \mathcal{E}_z\,\hat{e}_z, \qquad \nabla = \nabla_t + \hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\vec{\mathcal{H}}_0 = \vec{\mathcal{H}}_t + \mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad \nabla_t = \hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y} = \hat{e}_s\frac{\partial}{\partial s} + \hat{e}_\phi\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

—— (s,ϕ,z) 为柱坐标

其中 $\vec{\mathcal{E}}_t$, $\vec{\mathcal{H}}_t$, $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$ 都是 $\vec{r}_t = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y$ 的函数，横向分量 $\vec{\mathcal{E}}_t$, $\vec{\mathcal{H}}_t \perp \hat{e}_z$。

由于考虑的是 (1) 形式的单色波解 $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} \to -i\omega\mathcal{X}$, $\qquad \dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$, $\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，　$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$　化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$, $\quad\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \tag{1}$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}},\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \tag{1}$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \tag{2}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$， $\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \tag{1}$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \tag{2}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4}$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$, $\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{e}_z}^{\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{e}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{e}_z$, $\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{e}_z$, $(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\perp\hat{e}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

$$\hat{e}_z\times(1)\quad\Longrightarrow\quad\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{e}_z}^{\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{e}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{e}_z$，$\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{e}_z$，$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\perp\hat{e}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

$\hat{e}_z\times$ (1) $\Longrightarrow$ $\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 代入 (2) 得

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$, $\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \tag{1}$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \tag{2}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4}$$

$\hat{\boldsymbol{e}}_z\times$ (1) $\Longrightarrow$ $\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 代入 (2) 得

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\,\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$, $\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{e}_z}^{\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{e}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{e}_z$, $\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{e}_z$, $(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\perp\hat{e}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

$\hat{e}_z\times$ (1) $\Longrightarrow$ $\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 代入 (2) 得

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\big[k_g\nabla_t\,\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z\big]$$

类似可得：$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\big[k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\,\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\big]$$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}},\quad \nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}^{\hat{\boldsymbol{e}}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}^{\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}=i\omega\mu(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)}_{\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z,\ \nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z,\ (\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\perp\hat{\boldsymbol{e}}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \tag{1}$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \tag{2}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3}$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4}$$

$\hat{\boldsymbol{e}}_z\times$ (1) $\Longrightarrow$ $\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 代入 (2) 得

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\big[k_g\nabla_t\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\big]$$

$$k_t^2=k^2-k_g^2=\omega^2\mu\epsilon-k_g^2$$

类似可得：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\big[k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{\boldsymbol{e}}_z\big]$

从而单色波的 Maxwell 方程：$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=i\omega\mu\vec{\mathcal{H}}$, $\nabla\times\vec{\mathcal{H}}=-i\omega\epsilon\vec{\mathcal{E}}$ 化为：

$$(\nabla_t+\overbrace{ik_g\,\hat{e}_z}^{\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z}})\times\overbrace{(\vec{\mathcal{E}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z)}^{\vec{\mathcal{E}}}=i\omega\mu(\vec{\mathcal{H}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z),$$

$$\underbrace{(\nabla_t+ik_g\,\hat{e}_z)}_{\nabla}\times\underbrace{(\vec{\mathcal{H}}_t+\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z)}_{\vec{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon(\vec{\mathcal{E}}_t+\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z),$$

利用：$\nabla_t\times\vec{\mathcal{E}}_t\,||\,\hat{e}_z$, $\nabla_t\mathcal{E}_z\perp\hat{e}_z$, $(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\perp\hat{e}_z$，比较方程两边横向和纵向分量得

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\mathcal{E}}_t=i\omega\mu\vec{\mathcal{H}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\mathcal{H}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\mathcal{E}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\mathcal{E}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\mathcal{H}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

$$\hat{e}_z\times\ (1)\quad\Longrightarrow\quad\nabla_t\mathcal{E}_z-ik_g\vec{\mathcal{E}}_t=i\omega\mu\,\hat{e}_z\times\vec{\mathcal{H}}_t$$

代入 (2) 得

$$\vec{\mathcal{E}}_t=\frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z\right]$$

类似可得：$\vec{\mathcal{H}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z\right]$

$$k_t^2=k^2-k_g^2=\omega^2\mu\epsilon-k_g^2$$

$k_t^2<\omega^2\mu\epsilon$ 以保证 k_g 为实数

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$\vec{\mathcal{H}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\mathcal{E}}_t$ 和 $\vec{\mathcal{H}}_t$ 进而 $\vec{\mathcal{E}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$，电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$, 电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{H}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i\omega\mu}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\omega\mu}{k_g}\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$, 电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{H}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i\omega\mu}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\omega\mu}{k_g}\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$$

TM 波：$\mathcal{H}_z = 0$, 磁场垂直于传播方向，称为横磁波。由 $\mathcal{E}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$, 电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{H}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i\omega\mu}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\omega\mu}{k_g}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$$

TM 波：$\mathcal{H}_z = 0$, 磁场垂直于传播方向，称为横磁波。由 $\mathcal{E}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{E}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -\frac{i\omega\epsilon}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\omega\epsilon}{k_g}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$ 进而 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$，电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{H}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i\omega\mu}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = -\frac{\omega\mu}{k_g}\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$$

TM 波：$\mathcal{H}_z = 0$，磁场垂直于传播方向，称为横磁波。由 $\mathcal{E}_z$ 确定 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$ 和 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{E}_z, \qquad \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -\frac{i\omega\epsilon}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = \frac{\omega\epsilon}{k_g}\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t$$

TEM 波：$\mathcal{E}_z = 0$，$\mathcal{H}_z = 0$，电磁场都垂直于传播方向，称为横电磁波。

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$\vec{\mathcal{H}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2, \quad k_t^2 < \omega^2\mu\epsilon$$

讨论：

(1) 对波导管，只需求得：$\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$，由上式即可求得 $\vec{\mathcal{E}}_t$ 和 $\vec{\mathcal{H}}_t$ 进而 $\vec{\mathcal{E}}$ 和 $\vec{\mathcal{H}}$

(2) 根据 $\mathcal{E}_z$ 和 $\mathcal{H}_z$ 取值不同，可将导行电磁波分为三种基本波型

TE 波：$\mathcal{E}_z = 0$，电场垂直于传播方向，称为横电波。由 $\mathcal{H}_z$ 确定 $\vec{\mathcal{E}}_t$ 和 $\vec{\mathcal{H}}_t$

$$\vec{\mathcal{H}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{H}_z, \qquad \vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i\omega\mu}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z = -\frac{\omega\mu}{k_g}\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{H}}_t$$

TM 波：$\mathcal{H}_z = 0$，磁场垂直于传播方向，称为横磁波。由 $\mathcal{E}_z$ 确定 $\vec{\mathcal{E}}_t$ 和 $\vec{\mathcal{H}}_t$

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2} k_g \nabla_t \mathcal{E}_z, \qquad \vec{\mathcal{H}}_t = -\frac{i\omega\epsilon}{k_t^2}(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z = \frac{\omega\epsilon}{k_g}\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_t$$

TEM 波：$\mathcal{E}_z = 0$，$\mathcal{H}_z = 0$，电磁场都垂直于传播方向，称为横电磁波。

金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

(3)　金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (4)$$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \quad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \quad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{\boldsymbol{e}}_z \quad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{\boldsymbol{e}}_z \quad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t, \ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \quad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \quad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{e}_z \quad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{e}_z \quad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t, \ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \quad (5)$$

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \quad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \quad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \quad (8)$$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t,\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\frac{k_g}{\omega\epsilon} \nabla_t \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) = \frac{k_g}{\omega\epsilon} \underbrace{(\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{e}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t,\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\frac{k_g}{\omega\epsilon} \nabla_t \cdot (\hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) = \frac{k_g}{\omega\epsilon} \underbrace{(\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0} \cdot \hat{e}_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z + i k_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z + i k_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{e}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t, \ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$i k_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$i k_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：
$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\frac{k_g}{\omega\epsilon} \nabla_t \cdot (\hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) = \frac{k_g}{\omega\epsilon} \underbrace{(\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0} \cdot \hat{e}_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}}_t = i\omega\mu \vec{\mathcal{H}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\mathcal{H}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\mathcal{E}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{H}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{e}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_t, \ \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{H}}_t,$

方程退化为

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\mathcal{E}} = i\omega\mu \vec{\mathcal{H}} \qquad (5)$$

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon \vec{\mathcal{E}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{E}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\mathcal{H}} = 0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}} = -\dfrac{k_g}{\omega\epsilon} \nabla_t \cdot (\hat{e}_z \times \vec{\mathcal{H}})$

$$= \frac{k_g}{\omega\epsilon} \underbrace{(\nabla_t \times \vec{\mathcal{H}})}_{\text{由(8)式：} 0} \cdot \hat{e}_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$

$\Longrightarrow$ TEM 波的横向电场问题退化为二维静电问题 $\Longrightarrow \quad \vec{\mathcal{E}} = -\nabla\varphi$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\ \hat{\boldsymbol{e}}_z+ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z=0,\mathcal{H}_z=0,\quad\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t,\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=0 \qquad (8)$$

由 (6)：$\nabla_t\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=-\dfrac{k_g}{\omega\epsilon}\nabla_t\cdot(\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})$

$$\Longrightarrow\quad =\frac{k_g}{\omega\epsilon}\underbrace{(\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0}\cdot\ \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla_t\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$

$\Longrightarrow$ TEM 波的横向电场问题退化为二维静电问题 $\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=-\nabla\varphi$

二维静电问题：(a) $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0\ \Rightarrow\ \nabla^2\varphi=0$,

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z + ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t,\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g\, \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \qquad (8)$$

由 (6)： $\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\dfrac{k_g}{\omega\epsilon}\nabla_t \cdot (\hat{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})$

$$\Longrightarrow \quad = \frac{k_g}{\omega\epsilon}\underbrace{(\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$

$\Longrightarrow$ TEM 波的横向电场问题退化为二维静电问题 $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\nabla\varphi$

二维静电问题：(a) $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \ \Rightarrow \ \nabla^2\varphi = 0$, (b) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \ \Rightarrow \ \varphi\big|_{\text{边界}} = \text{const}$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\hat{e}_z+ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=i\omega\mu\mathcal{H}_z\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=-i\omega\mu\mathcal{E}_z\,\hat{e}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z=0,\mathcal{H}_z=0,\quad\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t,\ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=i\omega\mu\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g\,\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=-i\omega\epsilon\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：$\nabla_t\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=-\dfrac{k_g}{\omega\epsilon}\nabla_t\cdot(\hat{e}_z\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})=\dfrac{k_g}{\omega\epsilon}\underbrace{(\nabla_t\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：}0}\cdot\hat{e}_z$

$$\nabla_t\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{n}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$

$\Longrightarrow$ TEM 波的横向电场问题退化为二维静电问题 $\Longrightarrow\quad\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=-\nabla\varphi$

二维静电问题：(a) $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0\ \Rightarrow\ \nabla^2\varphi=0$, (b) $\vec{n}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0\ \Rightarrow\ \varphi\big|_{\text{边界}}=$ const

对单连通区，由 (a) 和 (b) 得：$\varphi=$ const, 即 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=-\nabla\varphi=0$，再从 (5) 得：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=0$

(3) 金属封闭单连通截面波导管不能传播 TEM 波

数学证明：

Maxwell 方程：

$$(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t \qquad (1)$$

$$(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z + ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t \qquad (2)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = i\omega\mu \mathcal{H}_z \hat{e}_z \qquad (3)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = -i\omega\mu \mathcal{E}_z \hat{e}_z \qquad (4)$$

对 TEM 波，$\mathcal{E}_z = 0, \mathcal{H}_z = 0, \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t, \ \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t,$

方程退化为

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = i\omega\mu \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} \qquad (5)$$

$$ik_g \hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \qquad (6)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \qquad (7)$$

$$\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0 \qquad (8)$$

$\Longrightarrow$ 由 (6)：

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\frac{k_g}{\omega\epsilon}\nabla_t \cdot (\hat{e}_z \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) = \frac{k_g}{\omega\epsilon}\underbrace{(\nabla_t \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}})}_{\text{由(8)式：} 0} \cdot \hat{e}_z$$

$$\nabla_t \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$$

在垂直于传播方向的平面，电场旋度、散度都为 0，加上金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$

$\Longrightarrow$ TEM 波的横向电场问题退化为二维静电问题 $\Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\nabla\varphi$

二维静电问题：(a) $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \Rightarrow \nabla^2\varphi = 0$, (b) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0 \Rightarrow \varphi\big|_{\text{边界}} = \text{const}$

对单连通区，由 (a) 和 (b) 得：$\varphi = \text{const}$, 即 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = -\nabla\varphi = 0$，再从 (5) 得：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0$

$\Longrightarrow$ 单连通截面波导管无 TEM 波

物理图像：

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f+\epsilon\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线 $\Longrightarrow$ 电场必须有 $\hat{e}_z$ 分量：$\mathcal{E}_z \neq 0$

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线 $\Longrightarrow$ 电场必须有 $\hat{e}_z$ 分量：$\mathcal{E}_z \neq 0$

与 TEM 波矛盾。

物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

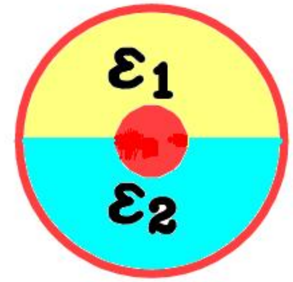
但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线 $\Longrightarrow$ 电场必须有 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ 分量：$\mathcal{E}_z \neq 0$

与 TEM 波矛盾。　　当然，对同轴电缆，因为有内导线，故可以有 TEM 波。



物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \epsilon \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

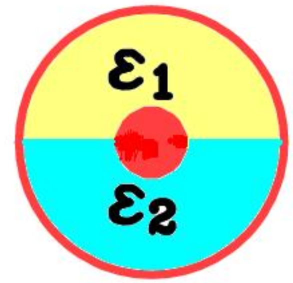
表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线 $\Longrightarrow$ 电场必须有 $\hat{e}_z$ 分量：$\mathcal{E}_z \neq 0$

与 TEM 波矛盾。 当然，对同轴电缆，因为有内导线，故可以有 TEM 波。

思考： 如图同轴电缆截面，上下两半的非磁性介质 $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$，是否可传播 TEM 波？



物理图像：

TEM 波，故磁场在垂直于传播方向的 xoy 平面。

$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$ 表明磁力线不会中断于介质区

金属表面 $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0$ 磁力线不会中断于金属壁

$\Longrightarrow$ 磁力线是 xoy 面内的闭合曲线

但：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{j}}_f+\epsilon\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$

表明闭合磁力线所包围的区域必定有电流线或电力线穿过。

对单连通截面（中空）波导管，自然没有传导电流穿过闭合磁力线

因此必然要求有电力线穿过闭合磁力线 $\Longrightarrow$ 电场必须有 $\hat{e}_z$ 分量：$\mathcal{E}_z\neq 0$

与 TEM 波矛盾。　　当然，对同轴电缆，因为有内导线，故可以有 TEM 波。

思考： 如图同轴电缆截面，上下两半的非磁性介质 $\epsilon_1\neq\epsilon_2$，是否可传播 TEM 波？

如图微带线截面，红色为金属，灰色为绝缘介质，可否传播严格意义上的 TEM 波？

2. 纵向场分量的方程和边界条件

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\quad \dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0 \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，$\dfrac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0$，$\qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0 \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

$$k_t^2 < k^2$$

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_gz-i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0 \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

$$k_t^2 < k^2$$

边值关系： 处理良导体波导管时，通常把导体视为理想导体，求出解后，

再求有限电导率导致的耗散，后者作为微扰。

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$，$\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$，$\dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0$，$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0$ $\qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

$$k_t^2 < k^2$$

边值关系：处理良导体波导管时，通常把导体视为理想导体，求出解后，

再求有限电导率导致的耗散，后者作为微扰。

对理想导体，$\sigma_c \to \infty$，透入深度 $\delta \to 0$，导体内 $\vec{\mathcal{E}} = 0$，$\vec{\mathcal{H}} = 0$，

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\quad \dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} \to ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0$, $\qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0 \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

$$k_t^2 < k^2$$

边值关系： 处理良导体波导管时，通常把导体视为理想导体，求出解后，

再求有限电导率导致的耗散，后者作为微扰。

对理想导体，$\sigma_c \to \infty$，透入深度 $\delta \to 0$，导体内 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = 0$,

故在导体外表面有边界条件：

2. 纵向场分量的方程和边界条件

既然电磁场的横向场分量可用纵向场分量表示，只需求 $\mathcal{E}_z$, $\mathcal{H}_z$

对单色波，在波导内的无源区，场总是满足 Helmholz 方程

$$\nabla^2\mathcal{E}_z + k^2\mathcal{E}_z = 0, \qquad \nabla^2\mathcal{H}_z + k^2\mathcal{H}_z = 0, \qquad k^2 = \omega^2\epsilon\mu$$

要求 $\mathcal{X}e^{ik_g z - i\omega t}$ 形式的解，可作代换：$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \dfrac{\partial\mathcal{X}}{\partial z} \rightarrow ik_g\mathcal{X}$

Helmholz 方程退化为：$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0 \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2$

$$k_t^2 < k^2$$

边值关系： 处理良导体波导管时，通常把导体视为理想导体，求出解后，

再求有限电导率导致的耗散，后者作为微扰。

对理想导体，$\sigma_c \rightarrow \infty$，透入深度 $\delta \rightarrow 0$，导体内 $\vec{\mathcal{E}} = 0$, $\vec{\mathcal{H}} = 0$，

故在导体外表面有边界条件：

(1) $\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$, (2) $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$, (3) $\vec{n} \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\alpha}_f$, (4) $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \sigma_f$

Let there be light

(1) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$, (2) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = 0$, (3) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$, (4) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \sigma_f$

(1) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$, (2) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = 0$, (3) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$, (4) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和 σ_f

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0,$ (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0,$ (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f,$ (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$ (E_z 为电场切向分量)

(1) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0,$ (2) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = 0,$ (3) $\vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \vec{\boldsymbol{\alpha}}_f,$ (4) $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}} = \sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z = 0,\ E_z \neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}} = 0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z = 0,\ H_z \neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ 与 H_z 无关)

(1) $\vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$, (2) $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$, (3) $\vec{n} \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\alpha}_f$, (4) $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{D}} = \sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z = 0,\ E_z \neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}} = 0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z = 0,\ H_z \neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0,$ (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0,$ (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f,$ (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

(1) $\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0,$ (2) $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0,$ (3) $\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f,$ (4) $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z-i\omega t}$

有：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$ 两边同时点乘边界法向 $\vec{\boldsymbol{n}}$

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0$, (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0$, (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f$, (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0$, $E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0$, $H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

有：$\vec{\mathcal{H}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]$ 两边同时点乘边界法向 $\vec{n}$

左边 $=\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}_t=\mathcal{H}_n=B_n/\mu=0$ (在金属边界)

右边 $=\pm k_g(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z-\omega\epsilon\,\vec{n}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]=0$ (1)

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0,$ (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0,$ (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f,$ (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{边界}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

有：$\vec{\mathcal{H}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]$ 两边同时点乘边界法向 $\vec{n}$

左边 $=\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}_t=\mathcal{H}_n=B_n/\mu=0$ (在金属边界)

右边 $=\pm k_g(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z-\omega\epsilon\,\vec{n}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]=0$ (1)

对 TE 波，$\mathcal{E}_z=0$，从而：$(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial n}=0$

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0,$ (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0,$ (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f,$ (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波　$H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$　(E_z 为电场切向分量)

TE 波　$E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系　(因为 $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

有：$\vec{\mathcal{H}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]$　两边同时点乘边界法向 $\vec{n}$

左边 $=\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}_t=\mathcal{H}_n=B_n/\mu=0$　(在金属边界)

右边 $=\pm k_g(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z-\omega\epsilon\,\vec{n}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]=0$　(1)

对 TE 波，$\mathcal{E}_z=0$，从而：$(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z \implies \dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial n}=0$

补充　一般情况下 $\nabla_t\,\mathcal{E}_z=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_1}\,\hat{e}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_2}\,\hat{e}_2$，其中 (q_1,q_2) 为 xy 面内的曲线坐标。

(1) $\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0,$ (2) $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}=0,$ (3) $\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f,$ (4) $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{D}}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\boldsymbol{\alpha}}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{边界}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

有：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$ 两边同时点乘边界法向 $\vec{\boldsymbol{n}}$

左边 $=\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\mathcal{H}_n=B_n/\mu=0$ (在金属边界)

右边 $=\pm k_g(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z-\omega\epsilon\,\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]=0$ (1)

对 TE 波，$\mathcal{E}_z=0$，从而：$(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial n}=0$

补充 一般情况下 $\nabla_t\,\mathcal{E}_z=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_1}\ \hat{\boldsymbol{e}}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_2}\ \hat{\boldsymbol{e}}_2$，其中 (q_1,q_2) 为 xy 面内的曲线坐标。

设 $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ 为法向，$\hat{\boldsymbol{e}}_2$ 为切向，由界面 $\mathcal{E}_z=0\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_2}=0\ \Rightarrow\ \nabla_t\mathcal{E}_z=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial n}\,\vec{\boldsymbol{n}}$

(1) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0,$ (2) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{B}}=0,$ (3) $\vec{n}\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\alpha}_f,$ (4) $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{D}}=\sigma_f$

在求出场量之前，波导管的面电流密度 $\vec{\alpha}_f$ 和面电荷密度 σ_f 是未知的，因而仅有 (1 – 2) 两式可用于求解电磁场，而 (3 – 4) 两式则用于求 $\vec{\alpha}_f$ 和 σ_f

TM 波 $H_z=0,\ E_z\neq 0$，由边条 (1) 得：$E_z\big|_{\text{边界}}=0$ (E_z 为电场切向分量)

TE 波 $E_z=0,\ H_z\neq 0$，边条 (2) 并非 H_z 的边值关系 (因为 $\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}$ 与 H_z 无关)

须确定 H_z 的边值关系。对于波导中的电磁波：$\vec{\mathcal{E}}=\vec{\mathcal{E}}_0(x,y)e^{\pm ik_gz-i\omega t}$

有：$\vec{\mathcal{H}}_t=\dfrac{i}{k_t^2}\left[\pm k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]$ 两边同时点乘边界法向 $\vec{n}$

左边 $=\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}_t=\mathcal{H}_n=B_n/\mu=0$ (在金属边界)

右边 $=\pm k_g(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z-\omega\epsilon\,\vec{n}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]=0$ (1)

对 TE 波，$\mathcal{E}_z=0$，从而：$(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z \implies \dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial n}=0$

补充 一般情况下 $\nabla_t\,\mathcal{E}_z=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_1}\,\hat{e}_1+\dfrac{1}{h_2}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_2}\,\hat{e}_2$，其中 (q_1,q_2) 为 xy 面内的曲线坐标。

设 $\hat{e}_1$ 为法向，$\hat{e}_2$ 为切向，由界面 $\mathcal{E}_z=0\ \Rightarrow\ \dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial q_2}=0\ \Rightarrow\ \nabla_t\mathcal{E}_z=\dfrac{1}{h_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial n}\vec{n}$

$\Rightarrow\ \vec{n}\cdot\left[(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\ \hat{e}_z\right]=0\ \Rightarrow$ 从 (1) 式仍可得到：$(\vec{n}\cdot\nabla_t)\mathcal{H}_z=\partial\mathcal{H}_z/\partial n=0$

金属波导管的边界条件：

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\mathcal{E}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\mathcal{E}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{X}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\mathcal{E}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{X}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x, y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\mathcal{E}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\mathcal{X}} = \vec{\mathcal{X}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \implies \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 q_1 =const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

对金属平面，取直角坐标系 (x,y,z)，$h_2 = h_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 q_1 =const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

对金属平面，取直角坐标系 (x,y,z)，$h_2 = h_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s,ϕ,z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_s = \hat{\boldsymbol{e}}_1$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$ 设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \implies \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

对金属平面，取直角坐标系 (x,y,z)，$h_2 = h_3 = 1 \implies \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s,ϕ,z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_s = \hat{\boldsymbol{e}}_1$

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$　磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$　　对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x,y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$　　对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$　　对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$　　在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$　　在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

对金属平面，取直角坐标系 (x,y,z)，$h_2 = h_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s,ϕ,z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_s = \hat{\boldsymbol{e}}_1$

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial(s\mathcal{E}_s)}{\partial s} = 0$$

金属波导管的边界条件：

金属视为理想导体，在金属面上

除了电场切向为 0：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_\tau = 0$ 磁场法向为 0：$\mathcal{H}_n = 0$ 对任意形状的金属面

对波导传播模式 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_0(x, y)e^{\pm ik_g z - i\omega t}$，有：$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial n} = 0$ 对任意形状波导管金属面

另外还有：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 和 $\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 对（有限或无限）金属平面

先证明：$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，电场强度的法向分量的法向导数为零

对无源线性介质区有：$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 在正交曲线坐标系即为

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0$$

设法向为 q_1 方向，金属面为 $q_1 =$const

则在界面上：$\dfrac{\partial(\mathcal{E}_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial(\mathcal{E}_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0$

对金属平面，取直角坐标系 (x, y, z)，$h_2 = h_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial q_1} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s, ϕ, z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{e}}_s = \hat{\boldsymbol{e}}_1$

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial(s\mathcal{E}_s)}{\partial s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{E}_s}{\partial s} \neq 0$$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

Let there be light

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_\tau}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \quad \Longrightarrow \quad$ 金属面：$\vec{\boldsymbol{n}} \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}) \sim \vec{\boldsymbol{n}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 　在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow \quad$ 金属面：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \sim \vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla(\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}) - (\vec{n} \cdot \nabla)\vec{\mathcal{H}}$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla\times\vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \Longrightarrow$ 金属面：$\vec{n}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}) \sim \vec{n}\times\vec{\mathcal{E}} = 0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{H}}) = \nabla(\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}) - (\vec{n}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \quad \nabla\mathcal{H}_n - \frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_1}\vec{\tau}_1 + \frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_2}\vec{\tau}_2 - \frac{\partial\vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} - \frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} = 0$$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n}=0$　　在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}=-i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \quad\Longrightarrow\quad$ 金属面：$\vec{n}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{H}})\sim\vec{n}\times\vec{\mathcal{E}}=0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n}\times(\nabla\times\vec{\mathcal{H}})=\nabla(\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}})-(\vec{n}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow\quad \nabla\mathcal{H}_n-\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial n}=0\quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n}+\frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_1}\vec{\tau}_1+\frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_2}\vec{\tau}_2-\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n}-\frac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n}=0$$

在界面 $\mathcal{H}_n=0 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_1}=\dfrac{\partial\mathcal{H}_n}{\partial\tau_2}=0\quad\Longrightarrow\quad\dfrac{\partial\vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n}=0$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$　　在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow \quad$ 金属面：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \sim \vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla(\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}) - (\vec{n} \cdot \nabla)\vec{\mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \mathcal{H}_n - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1}\vec{\tau}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2}\vec{\tau}_2 - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} = 0$$

在界面 $\mathcal{H}_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s, ϕ, z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{n} = \hat{e}_s = \hat{e}_1$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow$ 金属面：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \sim \vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla(\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{H}}) - (\vec{n} \cdot \nabla)\vec{\mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \mathcal{H}_n - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1}\vec{\tau}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2}\vec{\tau}_2 - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} = 0$$

在界面 $\mathcal{H}_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s, ϕ, z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{n} = \hat{e}_s = \hat{e}_1$

$$h_1 h_2 h_3 \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon_{ijk} h_k\, \hat{e}_k \partial_i (h_j \mathcal{H}_j),$$

ϵ_{ijk} 为 Levi-civita 张量

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ijk} h_k (\hat{e}_1 \times \hat{e}_k) \partial_i (h_j \mathcal{H}_j) = \epsilon_{ijk} h_k \epsilon_{1kl}\, \hat{e}_l\, \partial_i (h_j \mathcal{H}_j) = 0$$

再证明：$\dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$ 在金属平面上，磁场强度的切向分量的法向导数为零

无源线性介质区：$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = -i\omega\epsilon\,\vec{\mathcal{E}} \quad \Longrightarrow$ 金属面：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \sim \vec{n} \times \vec{\mathcal{E}} = 0$

对金属平面，$\vec{n}$ 是常矢量，则：$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \nabla(\vec{n}\cdot\vec{\mathcal{H}}) - (\vec{n}\cdot\nabla)\vec{\mathcal{H}}$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \mathcal{H}_n - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1}\vec{\tau}_1 + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2}\vec{\tau}_2 - \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n}\vec{n} = 0$$

在界面 $\mathcal{H}_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1} = \dfrac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\partial \vec{\mathcal{H}}_\tau}{\partial n} = 0$

反例：对金属圆柱面，取柱坐标系 (s, ϕ, z)，$h_1 = h_3 = 1$，$h_2 = s$，$\vec{n} = \hat{e}_s = \hat{e}_1$

$h_1 h_2 h_3 \nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \epsilon_{ijk} h_k\, \hat{e}_k \partial_i (h_j \mathcal{H}_j)$， ϵ_{ijk} 为 Levi-civita 张量

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ijk} h_k (\hat{e}_1 \times \hat{e}_k) \partial_i (h_j \mathcal{H}_j) = \epsilon_{ijk} h_k \epsilon_{1kl}\, \hat{e}_l\, \partial_i (h_j \mathcal{H}_j) = 0$$

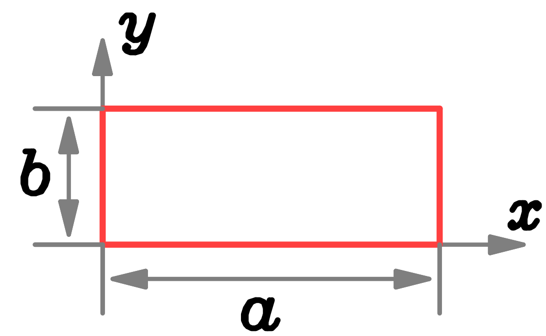
取 $l = 2 \Rightarrow k = 3$，有：$\epsilon_{ij3} h_3 \partial_i (h_j \mathcal{H}_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \partial_1 (s\,\mathcal{H}_2) - \partial_2 (\mathcal{H}_1) = 0$

$$\Rightarrow \quad \partial_s (s\,\mathcal{H}_\phi) - \underbrace{\partial_\phi (\mathcal{H}_s)}_{\text{沿界面切向，}\mathcal{H}_n\text{ 总为 }0} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial (s\mathcal{H}_\phi)}{\partial s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{H}_\tau}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{H}_\phi}{\partial s} \neq 0$$

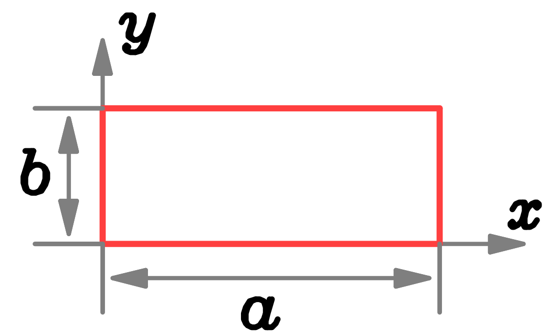
三、矩形波导管

三、矩形波导管

1. 矩形波导管内的电磁场



三、矩形波导管

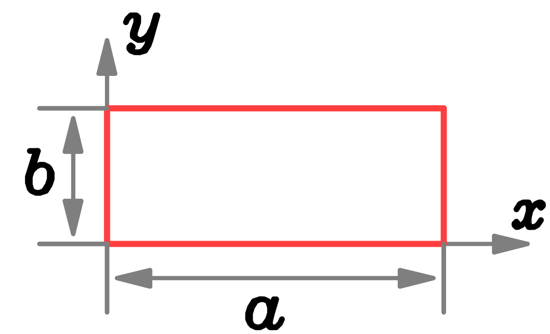


1. 矩形波导管内的电磁场

波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0, \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2, \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu, \quad k_t^2 < k^2$$

三、矩形波导管



1. 矩形波导管内的电磁场

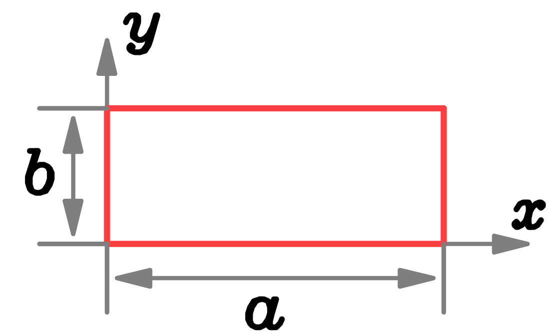
波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

$$(\nabla_t^2+k_t^2)\mathcal{E}_z=0,\qquad (\nabla_t^2+k_t^2)\mathcal{H}_z=0,\qquad k_t^2=k^2-k_g^2,\quad k^2=\omega^2\epsilon\mu,\quad k_t^2<k^2$$

对截面矩形取直角坐标，二维 Helmholtz 方程化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u+k_t^2u=0,\qquad u=\mathcal{E}_z,\ \text{或}\quad \mathcal{H}_z$$

三、矩形波导管



1. 矩形波导管内的电磁场

波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

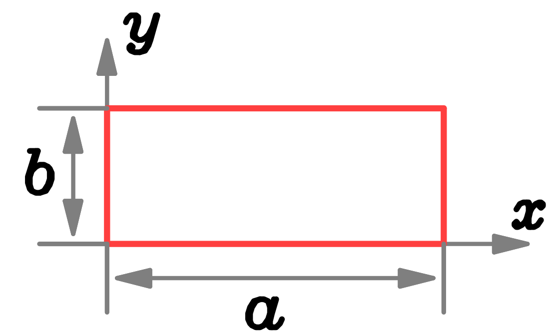
$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0, \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon\mu, \quad k_t^2 < k^2$$

对截面矩形取直角坐标，二维 Helmholtz 方程化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u + k_t^2 u = 0, \qquad u = \mathcal{E}_z, \text{ 或 } \mathcal{H}_z$$

分离变量：$u = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mathcal{X}'' + k_x^2 \mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + k_y^2 \mathcal{Y} = 0 \end{array}$ 其中：$k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 < k^2$

三、矩形波导管



1. 矩形波导管内的电磁场

波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0, \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2, \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu, \quad k_t^2 < k^2$$

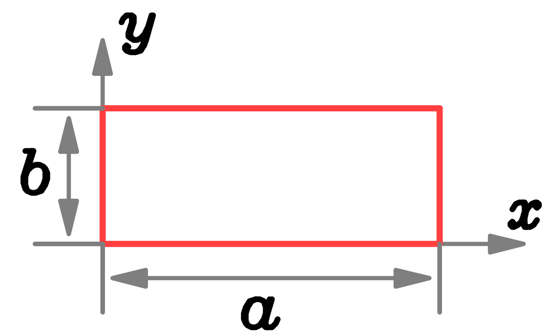
对截面矩形取直角坐标，二维 Helmholtz 方程化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + k_t^2 u = 0, \qquad u = \mathcal{E}_z, \text{ 或 } \mathcal{H}_z$$

分离变量：$u = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \mathcal{X}'' + k_x^2\,\mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + k_y^2\,\mathcal{Y} = 0 \end{matrix}$ 其中：$k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 < k^2$

可解得：$u = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$

三、矩形波导管



1. 矩形波导管内的电磁场

波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0, \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2, \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu, \quad k_t^2 < k^2$$

对截面矩形取直角坐标，二维 Helmholtz 方程化为

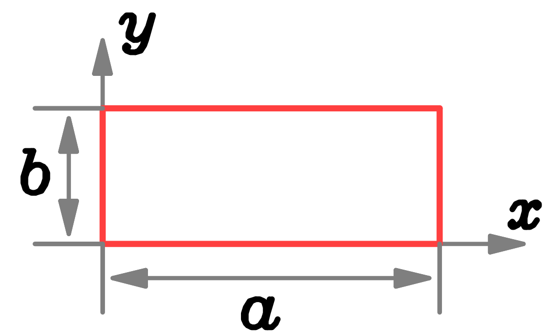
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + k_t^2 u = 0, \qquad u = \mathcal{E}_z, \text{ 或 } \mathcal{H}_z$$

分离变量：$u = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \implies \begin{array}{l} \mathcal{X}'' + k_x^2\,\mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + k_y^2\,\mathcal{Y} = 0 \end{array}$ 其中：$k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 < k^2$

可解得：$u = (C_1 \cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$

对 TM 波，$u = \mathcal{E}_z$ $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ 和 } y = 0 \text{ 处，} \mathcal{E}_z = 0 \implies C_1 = C_2 = 0 \\ \\ \end{array} \right.$

三、矩形波导管



1. 矩形波导管内的电磁场

波导管内电磁场总是满足二维 Helmholtz 方程：

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{E}_z = 0, \qquad (\nabla_t^2 + k_t^2)\mathcal{H}_z = 0, \qquad k_t^2 = k^2 - k_g^2, \quad k^2 = \omega^2\epsilon\mu, \quad k_t^2 < k^2$$

对截面矩形取直角坐标，二维 Helmholtz 方程化为

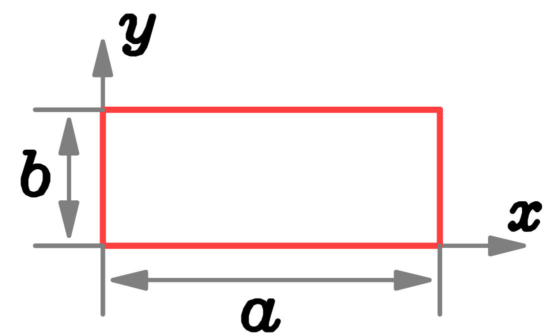
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + k_t^2 u = 0, \qquad u = \mathcal{E}_z, \text{ 或 } \mathcal{H}_z$$

分离变量：$u = \mathcal{X}(x)\mathcal{Y}(y) \implies \begin{array}{l} \mathcal{X}'' + k_x^2\mathcal{X} = 0 \\ \mathcal{Y}'' + k_y^2\mathcal{Y} = 0 \end{array}$ 其中：$k_x^2 + k_y^2 = k_t^2 < k^2$

可解得：$u = (C_1\cos k_x x + D_1 \sin k_x x)(C_2 \cos k_y y + D_2 \sin k_y y)$

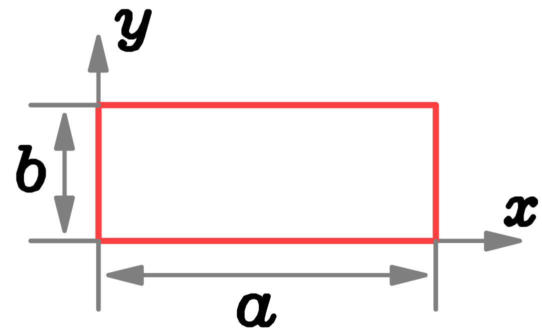
对 TM 波，$u = \mathcal{E}_z$ $\left\{\begin{array}{lll} x = 0 \text{ 和 } y = 0 \text{ 处，} \mathcal{E}_z = 0 & \implies & C_1 = C_2 = 0 \\ x = a \text{ 和 } y = b \text{ 处，} \mathcal{E}_z = 0 & \implies & k_x = \dfrac{m\pi}{a}, \quad k_y = \dfrac{n\pi}{b} \end{array}\right.$

对 TM 波：
$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z-\omega t)}$$



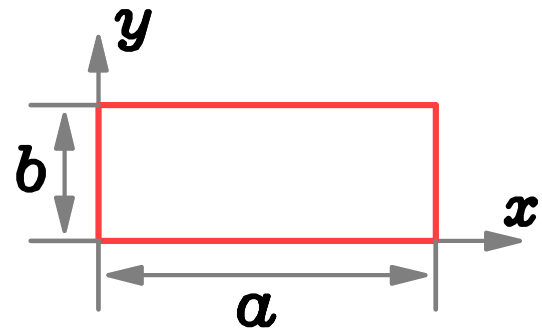
对 TM 波：
$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x = 0$，$a, y = 0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$



对 TM 波：
$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z-\omega t)}$$

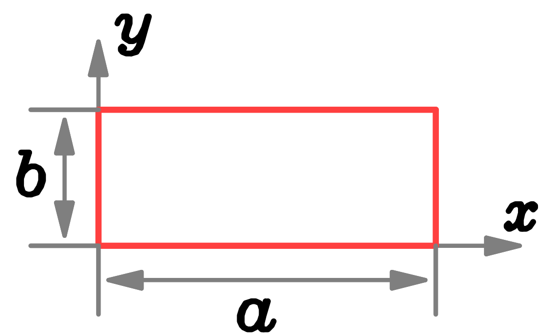
利用的边条：在 $x=0,\ a, y=0,\ b$，$\mathcal{E}_z=0$



对 TE 波：
$$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z-\omega t)}$$

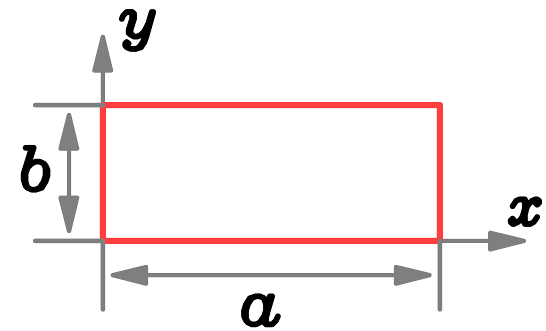
对 TM 波：
$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x = 0$，$a, y = 0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$



对 TE 波：
$$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x = 0$，a，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = 0$，在 $y = 0$，b，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = 0$



对 TM 波： $$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$$

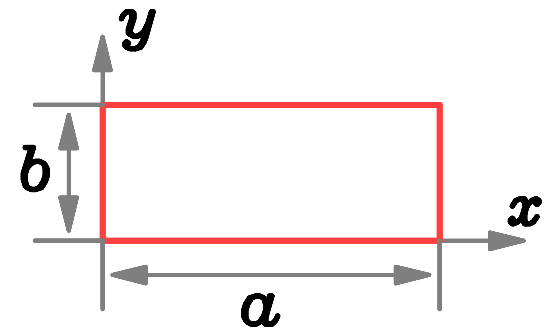
利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$

对 TE 波： $$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = 0$，在 $y=0$，b，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = 0$

TE、TM 波： $$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$$

对 TM 波：$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z - \omega t)}$



利用的边条：在 $x = 0$，$a, y = 0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$

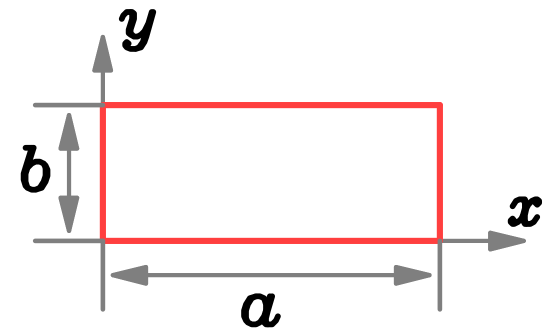
对 TE 波：$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z - \omega t)}$

利用的边条：在 $x = 0$，a，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = 0$，在 $y = 0$，b，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = 0$

TE、TM 波：$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$

再由下式求出其它场分量：

$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2} \left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu (\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z \right]$$



对 TM 波： $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$

利用的边条：在 $x = 0$，$a, y = 0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$

对 TE 波： $\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z - \omega t)}$

利用的边条：在 $x = 0$，a，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} = 0$，在 $y = 0$，b，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} = 0$

TE、TM 波： $k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$

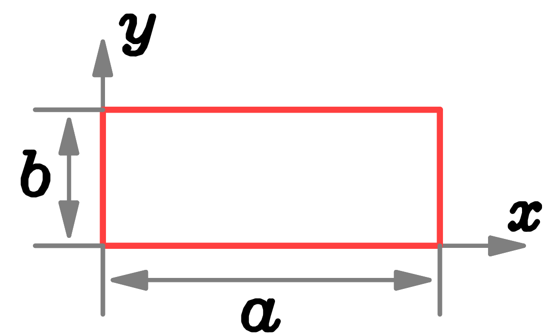
再由下式求出其它场分量：

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

对 TM 波：
$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{i(k_g z-\omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z=0$



对 TE 波：
$$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{i(k_g z-\omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x}=0$，在 $y=0$，b，$\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y}=0$

TE、TM 波：
$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b},\quad k_g^2=k^2-k_t^2,\quad k_t^2=k_x^2+k_y^2$$

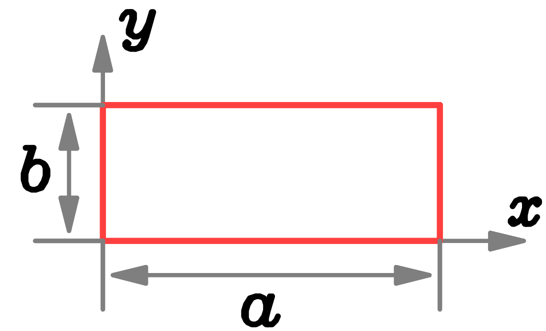
再由下式求出其它场分量：

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$
$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t=\frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\,\hat{\boldsymbol{e}}_z\right]$$

$$k_t^2=k^2-k_g^2=\omega^2\mu\epsilon-k_g^2$$

对 TM 波：$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z = 0$



对 TE 波：$$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z - \omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x} = 0$，在 $y=0$，b，$\dfrac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y} = 0$

TE、TM 波：$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$$

再由下式求出其它场分量：

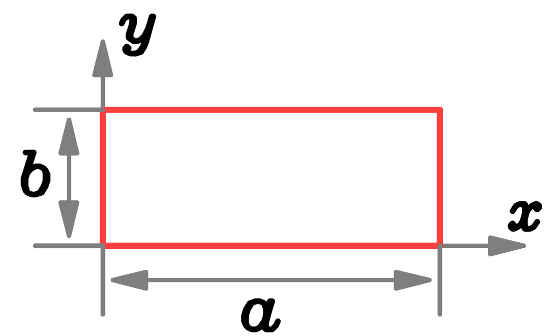
$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$\vec{\mathcal{H}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2 = k^2 - k_g^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2$$

讨论与说明：

对 TM 波： $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z-\omega t)}$



利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z=0$

对 TE 波： $\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} e^{i(k_g z-\omega t)}$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}=0$，在 $y=0$，b，$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}=0$

TE、TM 波： $k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$

再由下式求出其它场分量：

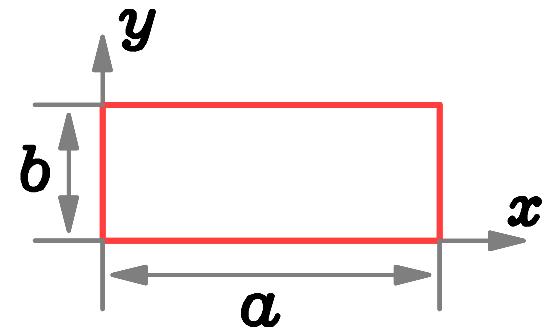
$$\vec{\mathcal{E}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$\vec{\mathcal{H}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2 = k^2 - k_g^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2$$

讨论与说明：

(1) 对 TE 和 TM 波，按 m，n 取值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模



对 TM 波： $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{i(k_g z-\omega t)}$

利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z=0$

对 TE 波： $\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{i(k_g z-\omega t)}$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x}=0$，在 $y=0$，b，$\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial y}=0$

TE、TM 波： $k_x=\frac{m\pi}{a},\quad k_y=\frac{n\pi}{b},\quad k_g^2=k^2-k_t^2,\quad k_t^2=k_x^2+k_y^2$

再由下式求出其它场分量：

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{E}_z+\omega\mu(\nabla_t\mathcal{H}_z)\times\,\hat{e}_z\right]$$

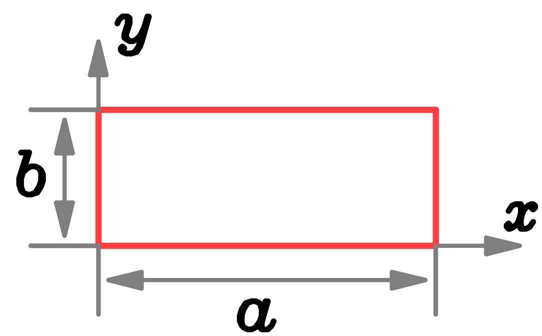
$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g\nabla_t\mathcal{H}_z-\omega\epsilon(\nabla_t\mathcal{E}_z)\times\,\hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2=k^2-k_g^2=\omega^2\mu\epsilon-k_g^2$$

讨论与说明：

(1) 对 TE 和 TM 波，按 m，n 取值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模

(2) 对 TM 模，$\mathcal{H}_z=0$，如 m，n 中再有一个为零，必导致 $\mathcal{E}_z=0 \implies \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=0$



对 TM 波：

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{z0} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z-\omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，$a, y=0$，b，$\mathcal{E}_z=0$

对 TE 波：

$$\mathcal{H}_z = \mathcal{E}_{z0} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(k_g z-\omega t)}$$

利用的边条：在 $x=0$，a，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x}=0$，在 $y=0$，b，$\dfrac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y}=0$

TE、TM 波：

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$$

再由下式求出其它场分量：

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{E}_z + \omega\mu(\nabla_t \mathcal{H}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}_t = \frac{i}{k_t^2}\left[k_g \nabla_t \mathcal{H}_z - \omega\epsilon(\nabla_t \mathcal{E}_z) \times \hat{e}_z\right]$$

$$k_t^2 = k^2 - k_g^2 = \omega^2\mu\epsilon - k_g^2$$

讨论与说明：

(1) 对 TE 和 TM 波，按 m，n 取值不同分为 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模

(2) 对 TM 模，$\mathcal{H}_z=0$，如 m，n 中再有一个为零，必导致 $\mathcal{E}_z=0 \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=0$

故：不存在 TM_{0n} 或 TM_{m0} 模

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x = 0$，a 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y = 0$，b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0$，a 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y=0$，b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE$_{mn}$ 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x = 0$，a 面，$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y = 0$，b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE$_{mn}$ 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0} \cos\dfrac{m\pi x}{a} \sin\dfrac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$

以满足在 $x = 0$，a 面，$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y = 0$，b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na} \sin\dfrac{m\pi x}{a} \cos\dfrac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = \frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0,\ a$ 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y=0,\ b$ 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z} = \frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE$_{mn}$ 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0,\ a$ 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y=0,\ b$ 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z} = \frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega\mu n\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0$, a 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y=0$, b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z} = \frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega\mu n\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

令：$\mathcal{B}_0 = -\dfrac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega n\pi} = \mu\mathcal{H}_0$ 即与教材一致。

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE$_{mn}$ 模，已知 $\mathcal{E}_z = 0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x = E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0$，a 面，$\dfrac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial n} = \dfrac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = 0$，而在 $y=0$，b 面，$\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_x = 0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = 0$ 求得 $\mathcal{E}_y = -E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = \frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_y = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} = -\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_z = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega\mu n\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\, e^{ik_g z}$$

令：$\mathcal{B}_0 = -\dfrac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega n\pi} = \mu\mathcal{H}_0$ 即与教材一致。

(4) 一般情况，波导中的场是各种 TE$_{mn}$ 和 TM$_{mn}$ 模的叠加。

(3) 对有平面边界的场，利用补充边界条件可直接写出各场分量

例如：对 TE_{mn} 模，已知 $\mathcal{E}_z=0$，可直接写出 $\mathcal{E}_x=E_{x0}\cos\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

以满足在 $x=0,\ a$ 面，$\dfrac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial n}=\dfrac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial x}=0$，而在 $y=0,\ b$ 面，$\mathcal{E}_\tau=\mathcal{E}_x=0$

再通过 $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}=0$ 求得 $\mathcal{E}_y=-E_{x0}\dfrac{mb}{na}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$

再由 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}=\dfrac{\nabla\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}}{i\omega\mu}$，求得 $\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}$，如

$$\mathcal{H}_x=-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial z}=\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\frac{mb}{na}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_y=-\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial z}=-\frac{ik_g}{i\omega\mu}E_{x0}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

$$\mathcal{H}_z=\frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y}\right)=-\frac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega\mu n\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\,e^{ik_g z}$$

令：$\mathcal{B}_0=-\dfrac{bE_{x0}k_s^2}{i\omega n\pi}=\mu\mathcal{H}_0$ 即与教材一致。

(4) 一般情况，波导中的场是各种 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模的叠加。如何只以一种模式传播？

2. 矩形波导管的传输特性

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m，n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ 确定，

如果 m，n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$，$k_g$ 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m，n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ 确定，

如果 m，n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$，$k_g$ 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2,\quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m，n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ 确定，

如果 m，n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad\Longrightarrow\quad k_g^2 < 0$，$k_g$ 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

反过来，给定一种模式，m，n 确定，k_t^2 确定，电磁波频率须满足 $\omega^2\epsilon\mu - k_t^2 > 0$

相应的模式才能传播。

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2$, $\quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m，n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ 确定，

如果 m，n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$，$k_g$ 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

反过来，给定一种模式，m，n 确定，k_t^2 确定，电磁波频率须满足 $\omega^2\epsilon\mu - k_t^2 > 0$

相应的模式才能传播。称 $\omega_{c,mn}^2 \epsilon\mu = k_t^2$ 为相应模式的截止频率 。

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m，n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2 \epsilon\mu$ 确定，

如果 m，n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$，$k_g$ 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

反过来，给定一种模式，m，n 确定，k_t^2 确定，电磁波频率须满足 $\omega^2\epsilon\mu - k_t^2 > 0$

相应的模式才能传播。称 $\omega_{c,mn}^2 \epsilon\mu = k_t^2$ 为相应模式的截止频率 。

故，对 m，n 模式，$k_t^2 < k^2 \quad \Longrightarrow \quad$ 截止频率：$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2}$

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2, \quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m, n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ 确定，

如果 m, n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$, k_g 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

反过来，给定一种模式，m, n 确定，k_t^2 确定，电磁波频率须满足 $\omega^2\epsilon\mu - k_t^2 > 0$

相应的模式才能传播。称 $\omega_{c,mn}^2\epsilon\mu = k_t^2$ 为相应模式的截止频率 。

故，对 m, n 模式，$k_t^2 < k^2 \quad \Longrightarrow$ 截止频率：$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2}$

角频率 $\omega < \omega_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播，

2. 矩形波导管的传输特性

截止频率

矩形波导有：$k_g^2 = k^2 - k_t^2$, $\quad k_t^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

一种模式对应于一组 m, n。给定一电磁波频率，$k^2 = \omega^2\epsilon\mu$ 确定，

如果 m, n 足够大，使得 $k^2 - k_t^2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad k_g^2 < 0$, k_g 为纯虚数

对应的波型为衰减波 $\sim e^{-|k_g|z}$，不能在波导中传播。

即，给定一电磁波频率，在波导中能传播的模式是有限的。

反过来，给定一种模式，m, n 确定，k_t^2 确定，电磁波频率须满足 $\omega^2\epsilon\mu - k_t^2 > 0$

相应的模式才能传播。称 $\omega_{c,mn}^2\epsilon\mu = k_t^2$ 为相应模式的截止频率 。

故，对 m, n 模式，$k_t^2 < k^2 \quad \Longrightarrow \quad$ 截止频率：$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^{1/2}$

角频率 $\omega < \omega_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播，因为对应的 k_g 为纯虚数。

截止波长

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right) + \left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right) + \left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE$_{mn}$ 或 TM$_{mn}$ 模式在波导中传播

讨论：

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a > b$）为 $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10} = 2a$

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right) + \left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a > b$）为 $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10} = 2a$
波长大于 $2a$ 的电磁波不能在波导中传播

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a > b$）为 $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10} = 2a$

波长大于 $2a$ 的电磁波不能在波导中传播

(2) 如何让电磁波在波导中以单一种模式传播

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a > b$）为 $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10} = 2a$

波长大于 $2a$ 的电磁波不能在波导中传播

(2) 如何让电磁波在波导中以单一种模式传播

对给定频率的电磁波 ω，设计波导尺寸，使之满足：$\omega_{c,10} < \omega < \min\{\omega_{c,20},\ \omega_{c,11}\}$

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}} = \dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda > \lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE_{mn} 或 TM_{mn} 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a > b$）为 $\omega_{10} = \dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10} = 2a$

波长大于 $2a$ 的电磁波不能在波导中传播

(2) 如何让电磁波在波导中以单一种模式传播

对给定频率的电磁波 ω，设计波导尺寸，使之满足：$\omega_{c,10} < \omega < \min\{\omega_{c,20},\ \omega_{c,11}\}$

相速度

截止波长

对应于截止频率，有截止波长：$\lambda_{c,mn}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}\,\omega_{c,mn}}=\dfrac{2}{\left[\left(\dfrac{m}{a}\right)+\left(\dfrac{n}{b}\right)\right]^{1/2}}$

波长 $\lambda>\lambda_{c,mn}$ 的电磁波，不能以 TE$_{mn}$ 或 TM$_{mn}$ 模式在波导中传播

讨论：

(1) 最低的截止频率（设 $a>b$）为 $\omega_{10}=\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$，最长的截止波长：$\lambda_{c,10}=2a$

波长大于 $2a$ 的电磁波不能在波导中传播

(2) 如何让电磁波在波导中以单一种模式传播

对给定频率的电磁波 ω，设计波导尺寸，使之满足：$\omega_{c,10}<\omega<\min\{\omega_{c,20},\ \omega_{c,11}\}$

相速度

波导中电磁波写成：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{X}}}(x,y)e^{ik_gz-i\omega t}$，等相面 $k_gz=$const 为垂直于 z 轴的平面。

等相面传播速度：$v_p=\omega/k_g=\omega/\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-k_t^2}>v_p^{(0)}=1/\sqrt{\mu\epsilon}$

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

波导波长

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

波导波长

空间中沿相速度方向相位相差 2π 的点的距离称为波长，也称相波长

在波导中：相位 $\Phi = k_g z - \omega t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{k_g} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1-(k_s/k)^2}} > \frac{2\pi}{k}$

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

波导波长

空间中沿相速度方向相位相差 2π 的点的距离称为波长，也称相波长

在波导中：相位 $\Phi = k_g z - \omega t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{k_g} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1-(k_s/k)^2}} > \frac{2\pi}{k}$

3. 矩形波导管主模 TE_{10} 的特性

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$

波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

波导波长

空间中沿相速度方向相位相差 2π 的点的距离称为波长，也称相波长

在波导中：相位 $\Phi = k_g z - \omega t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_g = \dfrac{2\pi}{k_g} = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{1}{\sqrt{1-(k_s/k)^2}} > \dfrac{2\pi}{k}$

3. 矩形波导管主模 TE$_{10}$ 的特性

电磁场：
$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0, \qquad \mathcal{H}_y = 0 \\ \mathcal{E}_y = \dfrac{i\omega\mu}{k_s^2}\dfrac{\pi}{a}\mathcal{H}_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \\ \mathcal{H}_x = -\dfrac{ik_g}{k_s^2}\dfrac{\pi}{a}\mathcal{H}_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \\ \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 \cos\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \end{cases}$$

$$k_s = \frac{\pi}{a}, \quad k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$$

如果波导内为真空，则：$v_p = \omega/k_g = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0 - k_s^2/\omega^2} > 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c$
波导中电磁波的相速度大于真空中的光速。（相速度并非能量或信号传播速度）

波导波长

空间中沿相速度方向相位相差 2π 的点的距离称为波长，也称相波长

在波导中：相位 $\Phi = k_g z - \omega t \quad \Longrightarrow \quad \lambda_g = \dfrac{2\pi}{k_g} = \dfrac{2\pi}{k}\dfrac{1}{\sqrt{1-(k_s/k)^2}} > \dfrac{2\pi}{k}$

3. 矩形波导管主模 TE$_{10}$ 的特性

电磁场：

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0, \qquad \mathcal{H}_y = 0 \\ \mathcal{E}_y = \dfrac{i\omega\mu}{k_s^2}\dfrac{\pi}{a}\mathcal{H}_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \\ \mathcal{H}_x = -\dfrac{ik_g}{k_s^2}\dfrac{\pi}{a}\mathcal{H}_0 \sin\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \\ \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_0 \cos\dfrac{\pi x}{a}\, e^{ik_g z - i\omega t} \end{cases} \qquad k_s = \frac{\pi}{a}, \quad k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$$

面电流：

$$\begin{cases} x = 0,\ a \text{ 面} \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y = 0,\ b \text{ 面} \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\Big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big] \end{cases}$$

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\text{ 面} \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\text{ 面} \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\left[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \end{cases}$$

面电流：

$$\begin{cases} x=0,\ a\,\text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\,\text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\Big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi xa\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big] \end{cases}$$

特点：

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a \text{ 面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b \text{ 面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\Big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\Big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0,\ a$，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0,\ b$，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ 面 & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ 面 & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\left[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：
$$\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] = \frac{\omega\mu a^2}{2\pi^2}|\mathcal{H}_0|^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\ k_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ 面 \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ 面 \quad \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：
$$\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] = \frac{\omega\mu a^2}{2\pi^2}|\mathcal{H}_0|^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\,k_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

传输功率：

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\left[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\right] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0,\ a$，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0,\ b$，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：
$$\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] = \frac{\omega\mu a^2}{2\pi^2}|\mathcal{H}_0|^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\,k_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

传输功率：
$$P = \int_{\text{截面}}\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$$

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：
$$\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] = \frac{\omega\mu a^2}{2\pi^2}|\mathcal{H}_0|^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\,k_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

传输功率：
$$P = \int_{\text{截面}}\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$$

单位长度损耗：

面电流：
$$\begin{cases} x=0,\ a\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \\ y=0,\ b\ \text{面} & \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \pm\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}} = \pm\mathcal{H}_0\big[\cos\dfrac{\pi x}{a}\ \hat{\boldsymbol{e}}_x + \dfrac{iak_g}{\pi}\sin\pi x a\ \hat{\boldsymbol{e}}_z\big] \end{cases}$$

特点：

(1) 在窄边 $x=0$，a，电流横向，面上电流大小方向相同

(2) 在宽边 $y=0$，b，电流有纵向分量，宽边中线横向电流为零

(3) 窄边横向开缝，宽边中线纵向开缝，对波导电磁场影响较小

能流、传输功率、损耗

能流：
$$\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} \times \vec{\boldsymbol{\mathcal{H}}}^*\right] = \frac{\omega\mu a^2}{2\pi^2}|\mathcal{H}_0|^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\ k_g\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

传输功率：
$$P = \int_{\text{截面}} \langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle\,\mathrm{d}\sigma$$

单位长度损耗：
$$P_{\text{耗}} = \frac{1}{2\delta\sigma_c}\int_{\text{内壁一周}} \alpha_{f0}^2\,\mathrm{d}l,$$
δ 为透入深度。

4. 群速度

4. 群速度

对单色平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，已求得能量传播速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_E$ 为

$$\vec{\boldsymbol{v}}_E\equiv\frac{\langle\vec{\boldsymbol{S}}\rangle}{\langle u_{em}\rangle}=\vec{\boldsymbol{v}}_p=\frac{\omega}{k}\frac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}$$

对单色平面波，能量传布速度等于向速度

4. 群速度

对单色平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - i\omega t}$，已求得能量传播速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_E$ 为

$$\vec{\boldsymbol{v}}_E \equiv \frac{\langle \vec{\boldsymbol{S}} \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = \vec{\boldsymbol{v}}_p = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k}$$

对单色平面波，能量传布速度等于向速度

但平面波实际上不存在，只是一种模型或数学工具。

实际的电磁波是在空间或时间上是有限的。称为波包。

4. 群速度

对单色平面电磁波：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$，已求得能量传播速度 $\vec{v}_E$ 为

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\langle \vec{S} \rangle}{\langle u_{em} \rangle} = \vec{v}_p = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}$$

对单色平面波，能量传布速度等于向速度

但平面波实际上不存在，只是一种模型或数学工具。

实际的电磁波是在空间或时间上是有限的。称为波包。

波包包含不同频率的波，如果相速度与频率有关（色散），波包的 $\vec{v}_E = ?$

4. 群速度

对单色平面电磁波：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{E}}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$，已求得能量传播速度 $\vec{v}_E$ 为

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\langle\vec{S}\rangle}{\langle u_{em}\rangle}=\vec{v}_p=\frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}$$ 对单色平面波，能量传布速度等于向速度

但平面波实际上不存在，只是一种模型或数学工具。

实际的电磁波是在空间或时间上是有限的。称为波包。

波包包含不同频率的波，如果相速度与频率有关（色散），波包的 $\vec{v}_E=?$

由 Fourier 分析，一个波包可表为一组单色平面波的叠加

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数（此函数关系称为色散关系），如真空中：$\omega=k/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$。

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{k}})e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

$$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\vec{\boldsymbol{k}})e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{\boldsymbol{k}} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$，波矢相近 $\vec{\boldsymbol{k}}\sim\vec{\boldsymbol{k}}_0$ 的单色平面波构成。

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$ ，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \qquad (1)$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$ ，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

其中：$\nabla_{\vec{k}}\,\omega=\dfrac{\partial\omega}{\partial k_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$ ，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

其中：$\nabla_{\vec{k}}\,\omega=\dfrac{\partial\omega}{\partial k_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

上式代入 (1) 得：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}-i\omega_0 t}$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$ ，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

其中：$\nabla_{\vec{k}}\,\omega=\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x+\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

上式代入 (1) 得：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}-i\omega_0 t}$

其中：$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\left[\vec{r}-\left(\nabla_{\vec{k}}\,\omega\big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right)t\right]}\mathrm{d}^3\vec{k}$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \qquad (1)$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

其中：$\nabla_{\vec{k}}\,\omega=\dfrac{\partial\omega}{\partial k_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

上式代入 (1) 得：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}-i\omega_0 t}$

其中：$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\left[\vec{r}-\left(\nabla_{\vec{k}}\,\omega\big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right)t\right]}\mathrm{d}^3\vec{k}$

对任意时刻，空间等振幅面为：$\left[\vec{r}-\left(\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right)t\right]=\text{const}$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

其中 ω 是 $\vec{k}$ 的函数，此函数关系称为色散关系。

波包是由若干频率相近 $\omega\sim\omega_0$，波矢相近 $\vec{k}\sim\vec{k}_0$ 的单色平面波构成。

因此，$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ 仅在 $\vec{k}_0$ 附近的一个小区域取值较大，在此区域之外基本可略。

在 $\vec{k}_0$ 附近的小区域内，$\omega(\vec{k})$ 也会少许偏离 $\omega_0=\omega(\vec{k}_0)$，在 $\vec{k}_0$ 附近展开：

$$\omega(\vec{k})=\omega(\vec{k}_0)+\left[\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right](\vec{k}-\vec{k}_0)$$

其中：$\nabla_{\vec{k}}\,\omega=\dfrac{\partial\omega}{\partial k_x}\hat{\boldsymbol{e}}_x+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_y}\hat{\boldsymbol{e}}_y+\dfrac{\partial\omega}{\partial k_z}\hat{\boldsymbol{e}}_z$

上式代入 (1) 得：$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}-i\omega_0 t}$

其中：$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\left[\vec{r}-\left(\nabla_{\vec{k}}\,\omega|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right)t\right]}\mathrm{d}^3\vec{k}$

对任意时刻，空间等振幅面为：$\left[\vec{r}-\left(\nabla_{\vec{k}}\,\omega|_{\vec{k}=\vec{k}_0}\right)t\right]=\text{const}$

$$\Longrightarrow\quad \text{等振幅面移动速度：}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}=\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$$

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{\boldsymbol{k}})$ =const 表示 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{\boldsymbol{k}})$ =const 表示 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

例如：真空中色散曲面为球面：$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} =$ const

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad\Longrightarrow\quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{\boldsymbol{k}})$ =const 表示 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

例如：真空中色散曲面为球面：$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ = const

由于群速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega$，因此 $\vec{\boldsymbol{v}}_g$ 沿着色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{\boldsymbol{k}})$ =const 表示 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

例如：真空中色散曲面为球面：$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ = const

由于群速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega$，因此 $\vec{\boldsymbol{v}}_g$ 沿着色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

可以证明：对无耗频率色散介质，群速度就等于能量传播速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_g = \vec{\boldsymbol{v}}_E$

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{k}}\,\omega\Big|_{\vec{k}=\vec{k}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{k}}\,k = v_p\dfrac{\vec{k}}{k} = \vec{v}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{k})$ =const 表示 $\vec{k}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

例如：真空中色散曲面为球面：$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} =$ const

由于群速度 $\vec{v}_g = \nabla_{\vec{k}}\,\omega$，因此 $\vec{v}_g$ 沿着色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

可以证明：对无耗频率色散介质，群速度就等于能量传播速度 $\vec{v}_g = \vec{v}_E$

因此，能量传播速度沿色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

等振幅面移动速度：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t} = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega\Big|_{\vec{\boldsymbol{k}}=\vec{\boldsymbol{k}}_0}$ 也记为：$\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$

等振幅面移动速度即空间振幅极大点所构成的的曲面之移动速度，

也即波包峰值的移动速度，就是波包的移动速度：称为群速度 ，因此

$$\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{\boldsymbol{k}}}$$

真空中：$\omega = kv_p \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega = v_p\nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,k = v_p\dfrac{\vec{\boldsymbol{k}}}{k} = \vec{\boldsymbol{v}}_p,$ 真空中群速等于相速

对于一般介质，$\omega(\vec{\boldsymbol{k}})$ =const 表示 $\vec{\boldsymbol{k}}$ 空间的一个曲面，称为色散曲面。

例如：真空中色散曲面为球面：$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} =$ const

由于群速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_g = \nabla_{\vec{\boldsymbol{k}}}\,\omega$，因此 $\vec{\boldsymbol{v}}_g$ 沿着色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

可以证明：对无耗频率色散介质，群速度就等于能量传播速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_g = \vec{\boldsymbol{v}}_E$

因此，能量传播速度沿色散曲面的法线方向，指向 ω 增加的方向

频率色散介质：空间某点的极化（磁化）强度仅决定于该点的电磁场，与其它点的电磁场无关

讨论：

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}, \quad \left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}, \quad v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - k_s^2}, \quad \left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}, \quad v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - k_s^2}$, $\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$, $v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$, $\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$, $v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k}$ $\Longrightarrow$ $\omega = kv_p$， 两边对 ω 求导： $\Longrightarrow$ $1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$，$\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$，$v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \omega = k v_p$，两边对 ω 求导：$\Longrightarrow 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$, $\quad \left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$, $\quad v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \quad \Longrightarrow \quad \omega = k v_p$, 两边对 ω 求导： $\Longrightarrow \quad 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$， $\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$， $v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \quad \Longrightarrow \quad \omega = k v_p$， 两边对 ω 求导： $\Longrightarrow \quad 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

对均匀的频率、空间色散介质，可证明能量传输速度等于群速度 —— Am. J. Phy. **68**, 482

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$，$\quad \left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$，$\quad v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \quad \Longrightarrow \quad \omega = k v_p$，两边对 ω 求导：$\quad \Longrightarrow \quad 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

对均匀的频率、空间色散介质，可证明能量传输速度等于群速度 —— Am. J. Phy. **68**, 482

(5) 除相速度、群速度、能量传播速度，还有信号传播速度等多种速度 —— Am. J. Phy. **45**, 538

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2 \epsilon\mu - k_s^2}$， $\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$， $v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \quad \Longrightarrow \quad \omega = k v_p$， 两边对 ω 求导： $\Longrightarrow \quad 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

对均匀的频率、空间色散介质，可证明能量传输速度等于群速度 —— Am. J. Phy. **68**, 482

(5) 除相速度、群速度、能量传播速度，还有信号传播速度等多种速度 —— Am. J. Phy. **45**, 538

(6) 在某些特殊情况，群速度可以大于光速 —— Am. J. Phy. **56**, 129

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$，$\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$，$v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \omega = k v_p$，两边对 ω 求导：$\Longrightarrow 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

对均匀的频率、空间色散介质，可证明能量传输速度等于群速度 —— Am. J. Phy. **68**, 482

(5) 除相速度、群速度、能量传播速度，还有信号传播速度等多种速度 —— Am. J. Phy. **45**, 538

(6) 在某些特殊情况，群速度可以大于光速 —— Am. J. Phy. **56**, 129

(7) 关于群速度的更深层物理原因，物理图像 —— Am. J. Phy. **58**, 1044

讨论：

(1) 群速度只适用于窄频带波。

(2) 在矩形波导管中：$k_g = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu - k_s^2}$，$\left(v_p^{(0)}\right)^2 = \dfrac{1}{\epsilon\mu}$，$v_p = \dfrac{\omega}{k_g}$

$$\Longrightarrow \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_g} = \left(\frac{\mathrm{d}k_g}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \left(\frac{\omega\epsilon\mu}{k_g}\right)^{-1} = \frac{\left(v_p^{(0)}\right)^2}{v_p} \quad \Longrightarrow \quad v_g v_p = \left(v_p^{(0)}\right)^2$$

v_g，v_p，$v_p^{(0)}$ 分别为波导中的群速度、相速度和自由空间中的相速度

(3) 相速度：$v_p = \dfrac{\omega}{k} \Longrightarrow \omega = kv_p$，两边对 ω 求导：$\Longrightarrow 1 = \dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} v_p + \dfrac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} k$

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)^{-1} = \frac{1}{v_g} \quad \Longrightarrow \quad v_g = \frac{v_p}{1 - \mathrm{d}v_p/\mathrm{d}\omega},$$

仅在存在色散时，$v_g \neq v_p$

(4) 可以验证波导中能量传输速度等于波导中的群速度 (教材 § 9.4)

对均匀的频率、空间色散介质，可证明能量传输速度等于群速度 —— Am. J. Phy. **68**, 482

(5) 除相速度、群速度、能量传播速度，还有信号传播速度等多种速度 —— Am. J. Phy. **45**, 538

(6) 在某些特殊情况，群速度可以大于光速 —— Am. J. Phy. **56**, 129

(7) 关于群速度的更深层物理原因，物理图像 —— Am. J. Phy. **58**, 1044

(8) 负群速度概念 —— Am. J. Phy. **69**, 607