§8.6 相对论力学

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

§ 8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

§ 8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

为此，应将力学方程中的各种物理量写成四维协变量。

§ 8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

为此，应将力学方程中的各种物理量写成四维协变量。

一、四维位置矢量，四维速度矢量，四维加速度矢量

§8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

为此，应将力学方程中的各种物理量写成四维协变量。

一、四维位置矢量，四维速度矢量，四维加速度矢量

四维位置矢量：$x_\mu = (\vec{\boldsymbol{r}}, ict)$

§ 8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

为此，应将力学方程中的各种物理量写成四维协变量。

一、四维位置矢量，四维速度矢量，四维加速度矢量

四维位置矢量：$x_\mu = (\vec{\boldsymbol{r}}, ict)$

四维速度矢量：$U_\mu = \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$

§ 8.6 相对论力学

牛顿力学方程在伽利略变换下是协变的，但不符合相对论要求，因为

(1) 据牛顿力学，在恒力作用下，物体速度可无限增大

(2) 牛顿力学不满足洛伦兹协变性，不是四维矢量或张量方程

寻求符合相对论要求的力学方程，要求

(1) 满足洛伦兹协变性，表为四维 n 阶张量方程

(2) 在 $v \ll c$ 时，新力学方程退化为牛顿方程

为此，应将力学方程中的各种物理量写成四维协变量。

一、四维位置矢量，四维速度矢量，四维加速度矢量

四维位置矢量：$x_\mu = (\vec{\boldsymbol{r}}, ict)$

四维速度矢量：$U_\mu = \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}t} = \gamma_u(\vec{\boldsymbol{u}}, ic)$

四维加速度矢量：$\mathrm{a}_\mu = \dfrac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\dfrac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \dfrac{\mathsf{d}U_\mu}{\mathsf{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\dfrac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \dfrac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\dfrac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \dfrac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\dfrac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \dfrac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\frac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\frac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}t} = i\gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u c)$$

利用了：$U_4 = \gamma_u\, ic$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\frac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}t} = i\gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u c)$$

利用了：$U_4 = \gamma_u\,ic$

$$= \gamma_u\,ic\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}$$

利用：$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\left(\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\; i\frac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1, \quad \frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}t} = i\gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u c)$$

利用了：$U_4 = \gamma_u\, ic$

$$= \gamma_u\, ic\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}$$

利用：$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_4 = i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$$

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \frac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\left(\vec{\boldsymbol{a}} + \frac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\frac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \implies \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}t} = i\gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u c)$$

利用了：$U_4 = \gamma_u\,ic$

$$= \gamma_u\,ic\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}$$

利用：$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) \implies \mathsf{a}_4 = i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$$

四维加速度很复杂，要将牛顿第二定律写成协变形式，还是从动量出发

四维加速度矢量：$\mathsf{a}_\mu = \dfrac{\mathrm{d}U_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u^2\Big(\vec{\boldsymbol{a}} + \dfrac{\gamma_u^2}{c^2}\,\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}),\ i\dfrac{\gamma_u^2}{c}\,\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}\Big)$

$$\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u u_1)$$

利用了：$U_1 = \gamma_u u_1$

$$= \gamma_u\left[\gamma_u\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}\right]$$

利用：$\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = a_1,\quad \dfrac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right] \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_1 = \gamma_u^2\left[a_1 + \frac{\gamma_u^2}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})u_1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u\,\frac{\mathrm{d}U_4}{\mathrm{d}t} = i\gamma_u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u c)$$

利用了：$U_4 = \gamma_u\,ic$

$$= \gamma_u\,ic\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t}$$

利用：$\dfrac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\gamma_u^3}{c^2}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$

$$= i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}) \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{a}_4 = i\frac{\gamma_u^4}{c}(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})$$

四维加速度很复杂，要将牛顿第二定律写成协变形式，还是从动量出发

$$\vec{\boldsymbol{f}} = m\vec{\boldsymbol{a}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$$

二、四维动量矢量

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量： $P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量： $P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量： $P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量： $P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量： $P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量：$P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

第二项为经典力学中的动能，故 $m_0 c^2$ 也应为能量

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量： $P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1,2,3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量： $P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

第二项为经典力学中的动能，故 $m_0 c^2$ 也应为能量 —— 静止物体的静能：W_0

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量： $P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量： $P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

第二项为经典力学中的动能，故 $m_0 c^2$ 也应为能量 —— 静止物体的静能：W_0

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 称为物体的相对论动量

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1,2,3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量：$P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

第二项为经典力学中的动能，故 $m_0 c^2$ 也应为能量 —— 静止物体的静能：W_0

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 称为物体的相对论动量

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 称为物体的相对论能量（总能量）

二、四维动量矢量

定义四维动量矢量为：$P_\mu = m_0 U_\mu$

U_μ 为四维速度矢量，m_0 为具有质量量纲的四维标量。

P_μ 的前三个分量：$P_i = \gamma_u m_0 u_i = \dfrac{m_0 u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad i = 1, 2, 3$

在低速时，$\gamma_u \approx 1$，故：$P_i = p_i = m_0 u_i$，应退化为三维动量

$\Longrightarrow \quad m_0$ 应为经典力学中的静止质量（低速运动时的质量）

P_μ 的第四个分量：$P_4 = \gamma_u m_0\, ic = \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

低速展开：$P_4 = \dfrac{i}{c}\left[m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 + \cdots\right]$

第二项为经典力学中的动能，故 $m_0 c^2$ 也应为能量 —— 静止物体的静能：W_0

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 称为物体的相对论动量

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 称为物体的相对论能量（总能量）

相对论动量能量构成四维动量矢量：

$$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c} W\right)$$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right)$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right)$

讨论

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{\boldsymbol{u}} = 0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{\boldsymbol{u}} = 0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0 c^2$ 相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2} m_0 u^2$

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \text{四维动量矢量：} P_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}W\right)$$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$
相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$ 四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$ 相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{\boldsymbol{u}} = 0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$ 相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。

在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \ \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量

表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{\boldsymbol{u}}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0 c^2$

相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2} m_0 u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，

故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。

在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求

而另一方面，仅当 W_0 项能转化成其它形式的能量时，W_0 的出现才有物理意义

因此既然相对论中物理规律的协变性要求 W_0 出现在能量表达式中

如果协变性是正确的，那么 W_0 项一定可转化成其它形式的能量

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{p},\ \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$

相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。

在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求

而另一方面，仅当 W_0 项能转化成其它形式的能量时，W_0 的出现才有物理意义

因此既然相对论中物理规律的协变性要求 W_0 出现在能量表达式中

如果协变性是正确的，那么 W_0 项一定可转化成其它形式的能量 —— 原子能的利用

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \text{四维动量矢量：} P_\mu = \left(\vec{p},\ \frac{i}{c}W\right)$$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$
相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。
在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求
而另一方面，仅当 W_0 项能转化成其它形式的能量时，W_0 的出现才有物理意义
因此既然相对论中物理规律的协变性要求 W_0 出现在能量表达式中
如果协变性是正确的，那么 W_0 项一定可转化成其它形式的能量 —— 原子能的利用

(4) P_μ 为四维矢量，$P_\mu P_\mu$ 必然为四维标量，从而 $P_\mu P_\mu = \vec{p}^{\,2} - \dfrac{1}{c^2}W^2$ 是不变量

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \qquad W = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \qquad \text{四维动量矢量：} P_\mu = \left(\vec{p}, \frac{i}{c}W\right)$$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0 = m_0c^2$
相对论中物体的动能 $T = W - W_0$，低速下退化为经典形式：$T = \frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W = T + W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。
在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求
而另一方面，仅当 W_0 项能转化成其它形式的能量时，W_0 的出现才有物理意义
因此既然相对论中物理规律的协变性要求 W_0 出现在能量表达式中
如果协变性是正确的，那么 W_0 项一定可转化成其它形式的能量 —— 原子能的利用

(4) P_μ 为四维矢量，$P_\mu P_\mu$ 必然为四维标量，从而 $P_\mu P_\mu = \vec{p}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2$ 是不变量
在相对于物体静止的惯性系，$P_\mu P_\mu = -m_0^2c^2 \implies \vec{p}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2$

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}},\qquad W=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

四维动量矢量：$P_\mu=\left(\vec{p},\ \frac{i}{c}W\right)$

讨论

(1) 经典力学中，动量和能量为量度物质运动的两个量，在相对论中构成一个统一的四维矢量表明动量能量间的内在联系

(2) 相对论能量包含了物体的动能，在 $\vec{u}=0$ 时，相对论能量退化为物体的静能：$W_0=m_0c^2$
相对论中物体的动能 $T=W-W_0$，低速下退化为经典形式：$T=\frac{1}{2}m_0u^2$

(3) W_0 为静止能量，总能量 $W=T+W_0$。在非相对论情形，能量中加一常数无实际意义，故在非相对论情形考虑能量守恒时无须考虑 W_0 项。
在相对论情形，W_0 项的出现是物理规律协变性的要求
而另一方面，仅当 W_0 项能转化成其它形式的能量时，W_0 的出现才有物理意义
因此既然相对论中物理规律的协变性要求 W_0 出现在能量表达式中
如果协变性是正确的，那么 W_0 项一定可转化成其它形式的能量 —— 原子能的利用

(4) P_μ 为四维矢量，$P_\mu P_\mu$ 必然为四维标量，从而 $P_\mu P_\mu=\vec{p}^{\,2}-\frac{1}{c^2}W^2$ 是不变量
在相对于物体静止的惯性系，$P_\mu P_\mu=-m_0^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad \vec{p}^{\,2}-\frac{1}{c^2}W^2=-m_0^2c^2$

Let there be light

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \dfrac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \dfrac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2} W^2 = -m_0^2 c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v \big(P_x - \frac{v}{c^2} W \big)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v (W - v P_x)$$

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2 c^2 \implies \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \frac{v}{c^2}W\right)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

(4) $$P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P_x' = \gamma_v\left(P_x - \frac{v}{c^2}W\right)$$

$$P_y' = P_y, \qquad P_z' = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

实验表明，在相对论中，总能量和总动量守恒定律依然成立。

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{p}^{\,2} - \dfrac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2 c^2 \implies \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \frac{v}{c^2}W\right)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

实验表明，在相对论中，总能量和总动量守恒定律依然成立。

若粒子间的相互作用是瞬间发生在空间某点，则有：

总能量守恒：$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} W^a(n) = \sum_{n'=1}^{N'} W^b(n')$

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2 \implies \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \frac{v}{c^2}W\right)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

实验表明，在相对论中，总能量和总动量守恒定律依然成立。

若粒子间的相互作用是瞬间发生在空间某点，则有：

总能量守恒：$\sum_{n=1}^{N} W^a(n) = \sum_{n'=1}^{N'} W^b(n')$ 总动量守恒：$\sum_{n=1}^{N} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,a}(n) = \sum_{n'=1}^{N'} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,b}(n')$

(4) $P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2 c^2 \Longrightarrow \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2 c^4}}$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v\Big(P_x - \frac{v}{c^2}W\Big)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

实验表明，在相对论中，总能量和总动量守恒定律依然成立。

若粒子间的相互作用是瞬间发生在空间某点，则有：

总能量守恒：$\sum_{n=1}^{N} W^a(n) = \sum_{n'=1}^{N'} W^b(n')$ 总动量守恒：$\sum_{n=1}^{N} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,a}(n) = \sum_{n'=1}^{N'} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,b}(n')$

a, b 表示初态和终态。N, N' 为相互作用（碰撞）前后粒子数。

(4) $$P_\mu P_\mu = \vec{\boldsymbol{p}}^{\,2} - \frac{1}{c^2}W^2 = -m_0^2c^2 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{W = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}}$$

相对论质量、能量、动量之间的一个重要关系

(5) 四维动量矢量的变换关系

$$P'_x = \gamma_v\big(P_x - \frac{v}{c^2}W\big)$$

$$P'_y = P_y, \qquad P'_z = P_z$$

$$W' = \gamma_v(W - vP_x)$$

三、能量、动量守恒定律

实验表明，在相对论中，总能量和总动量守恒定律依然成立。

若粒子间的相互作用是瞬间发生在空间某点，则有：

总能量守恒：$$\sum_{n=1}^{N} W^a(n) = \sum_{n'=1}^{N'} W^b(n')$$ 总动量守恒：$$\sum_{n=1}^{N} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,a}(n) = \sum_{n'=1}^{N'} \vec{\boldsymbol{p}}^{\,b}(n')$$

a, b 表示初态和终态。N, N' 为相互作用（碰撞）前后粒子数。

在相对论中，可统一成四维动量守恒。

四、相对论力学方程

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程：

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$$

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程：
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$$

推广到相对论情形：
$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad (1)$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四维矢量 K_μ 的意义：

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程：
$$\vec{\boldsymbol{F}}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$$

推广到相对论情形：
$$K_\mu=\frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量：
$$K_i=\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau}=\gamma_u\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t}=\gamma_u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$$

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad (1)$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量： $$K_i = \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$$

低速时 $\gamma_u \approx 1$： $\vec{\boldsymbol{K}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0 \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{F}}$ 退化为牛顿方程

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad (1)$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量： $$K_i = \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$$

低速时 $\gamma_u \approx 1$： $\vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0 \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{F}}$ 退化为牛顿方程

因此对低速非相对论情形四维矢量 K_μ 的前三个分量退化为经典三维力矢量

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \tag{1}$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量： $K_i = \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$

低速时 $\gamma_u \approx 1$： $\vec{K} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0 \vec{u}) = \vec{F}$ 退化为牛顿方程

因此对低速非相对论情形四维矢量 K_μ 的前三个分量退化为经典三维力矢量

对高速的相对论情况： $K_i = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i) = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_i)$

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程： $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$

推广到相对论情形： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ (1)

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow$ K_μ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量： $K_i = \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$

低速时 $\gamma_u \approx 1$： $\vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0 \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{F}}$ 退化为牛顿方程

因此对低速非相对论情形四维矢量 K_μ 的前三个分量退化为经典三维力矢量

对高速的相对论情况： $K_i = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i) = \gamma_u \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_i)$

故：$\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$ $\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ $\quad \beta = u/c$

四、相对论力学方程

非相对论动力学方程：
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$$

推广到相对论情形：
$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad (1)$$

由于 $\mathrm{d}P_\mu$ 是四维矢量，$\mathrm{d}\tau$ 为标量 $\Longrightarrow K_\mu$ 是四维矢量，(1) 是相对论协变的

四维矢量 K_μ 的意义：

K_μ 的前三个分量：
$$K_i = \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}t} = \gamma_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i)$$

低速时 $\gamma_u \approx 1$：
$$\vec{\boldsymbol{K}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0 \vec{\boldsymbol{u}}) = \vec{\boldsymbol{F}}$$
退化为牛顿方程

因此对低速非相对论情形四维矢量 K_μ 的前三个分量退化为经典三维力矢量

对高速的相对论情况：
$$K_i = \gamma_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma_u m_0 u_i) = \gamma_u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P_i)$$

故：$\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$
$$\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\boldsymbol{p}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad \beta = u/c$$

相对论下的三维动力学方程。

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right), \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$, $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$, $\vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$, $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

相对论动力学方程：$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c} W\right), \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

K_μ 的前三个分量：$\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}, \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0 \vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (1)$

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

相对论动力学方程： $K_\mu = \frac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{p},\ \frac{i}{c}W\right), \quad \vec{p} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

K_μ 的前三个分量： $\vec{K} = \gamma_u \vec{F}, \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \frac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{F}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{F}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量： $K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau}$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right), \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}, \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (1)$

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量：

$$K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right), \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}, \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (1)$

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量：

$$K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0\vec{\boldsymbol{u}},$ $W = \gamma_u m_0 c^2$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$, $\quad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$, $\quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$, $\quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量：

$$K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$, $\quad W = \gamma_u m_0 c^2$

$$K_4 = \frac{i}{c}\gamma_u\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$， $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$， $\vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$，

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$， $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量：

$$K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0\vec{\boldsymbol{u}}$， $W = \gamma_u m_0 c^2$

$$K_4 = \frac{i}{c}\gamma_u\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}$$

第四个方程：$\vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$ 或 $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}, \qquad P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right), \quad \vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}},$

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}, \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \qquad (1)$

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量：

$$K_4 = \frac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \frac{i}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \frac{i}{c}\frac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$$

$$= \frac{ic\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}},$
$W = \gamma_u m_0 c^2$

$$K_4 = \frac{i}{c}\gamma_u\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}$$

第四个方程：$\vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$ 或 $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

四维力矢量： $K_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{K}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}\right) = \gamma_u\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\right)$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$, $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$, $\vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$, $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\,P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量： $K_4 = \dfrac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{i}{c}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{i}{c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \dfrac{i}{c}\dfrac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$

$= \dfrac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$ 利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0\vec{\boldsymbol{u}}$, $W = \gamma_u m_0 c^2$

$K_4 = \dfrac{i}{c}\gamma_u\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}$ 第四个方程：$\vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$ 或 $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

四维力矢量： $K_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{K}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}\right) = \gamma_u\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\right)$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$, $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$, $\vec{\boldsymbol{p}} = \dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

K_μ 的前三个分量： $\vec{\boldsymbol{K}} = \gamma_u \vec{\boldsymbol{F}}$, $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{m_0\vec{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$ (1)

K_μ 称为四维力矢量，$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}\, P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$ 的前三分量为相对论力学方程

注意三维力矢量 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 不是四维矢量 K_μ 的前三分量， $\gamma_u\vec{\boldsymbol{F}}$ 才是 K_μ 的前三分量。

K_μ 的第四个分量： $K_4 = \dfrac{\mathrm{d}P_4}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{i}{c}\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{i}{c}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{p^2c^2+m_0^2c^4} = \dfrac{i}{c}\dfrac{c^2}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau}$

$$= \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \frac{ic\,\gamma_u}{W}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}$$

利用： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0\vec{\boldsymbol{u}}$, $W = \gamma_u m_0 c^2$

$K_4 = \dfrac{i}{c}\gamma_u\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}$ 第四个方程： $\vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau}$ 或 $\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$

四维力矢量： $K_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{K}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{K}}\right) = \gamma_u\left(\vec{\boldsymbol{F}},\ \dfrac{i}{c}\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\right)$

相对论动力学方程：

$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

相对论动力学方程：$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

相对论动力学方程：
$$K_\mu = \frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} & \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} & \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{array} \right.$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}\, W\right)$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & 或 \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & 或 \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \ \dfrac{i}{c} W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2} W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P_x' = \gamma_v\big(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\big)$， $P_y' = P_y$， $P_z' = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F_y' = \frac{\mathrm{d}p_y'}{\mathrm{d}\,t'}$$

相对论动力学方程：$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c} W\right)$

四维动量矢量的变换关系：$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2} W\right)$，$P'_y = P_y$，$P'_z = P_z$，$W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\, t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma \mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \dfrac{i}{c} W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2} W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma \mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1 - \beta u_x/c)}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma \mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma \mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{K} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{K}\cdot\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{F}\cdot\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{p},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \implies F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]} = \frac{\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t - (\beta/c)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{1 - (\beta/c)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系：$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$，$P'_y = P_y$，$P'_z = P_z$，$W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \implies F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地：$F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]} = \frac{\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t - (\beta/c)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{1-(\beta/c)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}})}{1-\beta u_x/c}$$

相对论动力学方程：$K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \implies \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系：$P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$，$P'_y = P_y$，$P'_z = P_z$，$W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \implies F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地：$F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]} = \frac{\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t - (\beta/c)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{1-(\beta/c)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}})}{1-\beta u_x/c}$$

$$\implies F'_x = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}})}{1-\beta u_x/c}$$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{\boldsymbol{K}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{\boldsymbol{K}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}}, \dfrac{i}{c} W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2} W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]} = \frac{\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t - (\beta/c)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{1-(\beta/c)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}})}{1-\beta u_x/c}$$

$$\Longrightarrow \quad F'_x = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{\boldsymbol{u}}\cdot\vec{\boldsymbol{F}})}{1-\beta u_x/c}$$

若在 S 惯性系中粒子是静止的，则有： $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}'_\perp = \dfrac{1}{\gamma}\vec{\boldsymbol{F}}_\perp, \qquad F'_{||} = F_{||}}$

相对论动力学方程： $K_\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau} \Longrightarrow \begin{cases} \vec{K} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ \vec{K}\cdot\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau} & \text{或} \quad \vec{F}\cdot\vec{u} = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \end{cases}$

四维动量矢量： $P_\mu = \left(\vec{p},\ \dfrac{i}{c}W\right)$

四维动量矢量的变换关系： $P'_x = \gamma_v\left(P_x - \dfrac{v}{c^2}W\right)$， $P'_y = P_y$， $P'_z = P_z$， $W' = \gamma_v(W - vP_x)$

不同惯性系中力的变换

$$F'_y = \frac{\mathrm{d}p'_y}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\mathrm{d}p_y}{\gamma\mathrm{d}t - \dfrac{\gamma\beta}{c}\,\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p_y/\mathrm{d}t}{\gamma\left(1 - \dfrac{\beta}{c}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)} = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)} \Longrightarrow F'_y = \frac{F_y}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$$

类似地： $F'_z = \dfrac{F_z}{\gamma(1-\beta u_x/c)}$

$$F'_x = \frac{\mathrm{d}p'_x}{\mathrm{d}\,t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}p_x + i\beta\mathrm{d}P_4)}{\gamma[\mathrm{d}t - (\beta/c)\,\mathrm{d}x]} = \frac{\mathrm{d}p_x/\mathrm{d}t - (\beta/c)(\mathrm{d}W/\mathrm{d}t)}{1-(\beta/c)\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{u}\cdot\vec{F})}{1-\beta u_x/c}$$

$$\Longrightarrow \quad F'_x = \frac{F_x - (\beta/c)(\vec{u}\cdot\vec{F})}{1-\beta u_x/c}$$

若在 S 惯性系中粒子是静止的，则有： $\boxed{\vec{F}'_\perp = \dfrac{1}{\gamma}\vec{F}_\perp, \qquad F'_{||} = F_{||}}$

§ 8.5 p15, 例 1 用到这个公式

四、质速关系　动能公式　质能关系

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$,　$W = mc^2$　与低速相似

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$,　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{p} = m\vec{u}$,　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{p} = \gamma_u m_0 \vec{u}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{p} = m\vec{u}$，　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

(1)　从质量速度关系可知，物体的质量不是常数，而是随速度增加

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量：$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$，　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

(1)　从质量速度关系可知，物体的质量不是常数，而是随速度增加

(2)　因而在经典力学中，方程 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 等价

在相对论中，由于质量与速度有关，仍有 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$，但 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 不成立

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$，　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

(1)　从质量速度关系可知，物体的质量不是常数，而是随速度增加

(2)　因而在经典力学中，方程 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 等价

在相对论中，由于质量与速度有关，仍有 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$，但 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 不成立

(3)　一个质速关系的简单物理事例

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量： $\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量： $W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$,　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

(1)　从质量速度关系可知，物体的质量不是常数，而是随速度增加

(2)　因而在经典力学中，方程 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 等价

在相对论中，由于质量与速度有关，仍有 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$，但 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 不成立

(3)　一个质速关系的简单物理事例

有两个惯性系：实验室惯性系 S 和相对与 S 以速度 v 沿 $+x$ 向运动的惯性系 S'

四、质速关系　动能公式　质能关系

质速关系

相对论动量：　$\vec{\boldsymbol{p}} = \gamma_u m_0 \vec{\boldsymbol{u}}$　　相对论能量：　$W = \gamma_u m_0 c^2$

令：$m = \gamma_u m_0$，m 称为物体运动质量，则：$\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{u}}$,　$W = mc^2$　与低速相似

$$\boxed{m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2},\qquad \text{质量速度关系式}}$$

讨论

(1)　从质量速度关系可知，物体的质量不是常数，而是随速度增加

(2)　因而在经典力学中，方程 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$ 和 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 等价

在相对论中，由于质量与速度有关，仍有 $\vec{\boldsymbol{F}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t}$，但 $\vec{\boldsymbol{F}} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}t}$ 不成立

(3)　一个质速关系的简单物理事例

有两个惯性系：实验室惯性系 S 和相对与 S 以速度 v 沿 $+x$ 向运动的惯性系 S'

A, B 两个静止质量都为 m_0 的粒子，在 S' 系中速度分别为 $\pm v\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$，作完全非弹性碰撞

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v + v}{1 - v^2/c^2}$ (1)

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

动量守恒：$P_a = P_b \quad \Longrightarrow \quad mu = (m+m_0)v$ (2)

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

动量守恒：$P_a = P_b \quad \Longrightarrow \quad mu = (m+m_0)v$ (2)

由 (1 - 2) 得：$m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ —— 相对论质速关系

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

动量守恒：$P_a = P_b \quad \Longrightarrow \quad mu = (m+m_0)v$ (2)

由 (1 - 2) 得：$m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ —— 相对论质速关系

动能定理： 相对论动能：$T = W - W_0 = (m-m_0)c^2$

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

动量守恒：$P_a = P_b \quad \Longrightarrow \quad mu = (m+m_0)v$ (2)

由 (1 - 2) 得：$m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ —— 相对论质速关系

动能定理：

相对论动能：$T = W - W_0 = (m-m_0)c^2$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}c^2 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$$

(3) 一个质速关系的简单物理事例（续）

在 S' 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 0，相对于 S' 系静止

在 S 系，完全非弹性碰撞后两粒子合二为一，速度为 v

在 S 系，碰撞前 A, B 两粒子速度分别为 u 和 0，质量分别为：m 和 m_0

由速度变换公式：$u = \dfrac{v+v}{1-v^2/c^2}$ (1)

在 S 系，碰撞前动量：$P_a = mu + m_0\,0$，碰撞后两粒子合二为一，速度为 v。

在 S 系，碰撞后动量：$P_b = (m+m_0)v$，

动量守恒：$P_a = P_b \quad \Longrightarrow \quad mu = (m+m_0)v$ (2)

由 (1 - 2) 得：$m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ —— 相对论质速关系

动能定理：

相对论动能：$T = W - W_0 = (m-m_0)c^2$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}c^2 = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}}$$

相对论中，动能定理仍然成立：$\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$ 静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

质能关系：

$$\text{运动物体能量：} W = mc^2 \qquad \text{静止物体能量：} W_0 = m_0c^2$$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量
而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量
而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量
在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2$$

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量

而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量

在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2 = \sum_i m_{i0}c^2 + \sum_i T_i + U \neq \sum_i m_{i0}c^2$$

包括各粒子的静止能量，相对于质心运动的动能，和粒子间的相互作用能

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量

而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量

在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2 = \sum_i m_{i0}c^2 + \sum_i T_i + U \neq \sum_i m_{i0}c^2$$

包括各粒子的静止能量，相对于质心运动的动能，和粒子间的相互作用能

$$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{i0}c^2$$ 称为物体的结合能

$\Delta W < 0$ 表示复合粒子是稳定的，$|\Delta W|$ 越大表示复合粒子越稳定

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量

而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量

在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2 = \sum_i m_{i0}c^2 + \sum_i T_i + U \neq \sum_i m_{i0}c^2$$

包括各粒子的静止能量，相对于质心运动的动能，和粒子间的相互作用能

$$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{i0}c^2$$ 称为物体的结合能

$\Delta W < 0$ 表示复合粒子是稳定的，$|\Delta W|$ 越大表示复合粒子越稳定

从 $|\Delta W|$ 较小的粒子到 $|\Delta W|$ 较大的粒子的转变而释放的能量即为核能

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$　　静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量
而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量
在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2 = \sum_i m_{i0}c^2 + \sum_i T_i + U \neq \sum_i m_{i0}c^2$$

包括各粒子的静止能量，相对于质心运动的动能，和粒子间的相互作用能

$$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{i0}c^2 \quad \text{称为物体的结合能}$$

$\Delta W < 0$ 表示复合粒子是稳定的，$|\Delta W|$ 越大表示复合粒子越稳定
从 $|\Delta W|$ 较小的粒子到 $|\Delta W|$ 较大的粒子的转变而释放的能量即为核能

复合粒子的质量：$M_0 = W_0/c^2 \neq \sum_i m_{i0}$

质能关系：

运动物体能量：$W = mc^2$ 静止物体能量：$W_0 = m_0c^2$

讨论

(1) 质能关系反映了一定质量的粒子具有一定的内部运动能量

而带有一定内部运动能量的粒子则表现出有一定的惯性质量

(2) 质能关系同样适合于复合粒子。对复合粒子，W_0 是物体质心静止时的总内部能量

在质心惯性系，复合粒子能量为 $W_0 = M_0c^2$，M_0 为物体总质量。

$$W_0 = M_0c^2 = \sum_i m_{i0}c^2 + \sum_i T_i + U \neq \sum_i m_{i0}c^2$$

包括各粒子的静止能量，相对于质心运动的动能，和粒子间的相互作用能

$\Delta W = W_0 - \sum_i m_{i0}c^2$ 称为物体的结合能

$\Delta W < 0$ 表示复合粒子是稳定的，$|\Delta W|$ 越大表示复合粒子越稳定

从 $|\Delta W|$ 较小的粒子到 $|\Delta W|$ 较大的粒子的转变而释放的能量即为核能

复合粒子的质量：$M_0 = W_0/c^2 \neq \sum_i m_{i0}$

$\Delta M = M_0 - \sum_i m_{i0} = \Delta W/c^2$ 称为质量亏损。$\Delta M > 0$ 的粒子将发生自发衰变。

五、四维波矢量　Doppler 效应

五、四维波矢量　Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

五、四维波矢量　Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \dfrac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1)　从量子力学的角度看

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

五、四维波矢量　Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1)　从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$

五、四维波矢量　Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1)　从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$　从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看

对平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$， $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看

对平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}^0_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

五、四维波矢量　Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1)　从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$　从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2)　从平面电磁波的电磁场张量看

对平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，　$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，　$\Longrightarrow$　$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}^0_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

由于 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，在另一惯性系：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}_{\lambda\tau} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}^0_{\lambda\tau}}_{\mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega\right)$ 从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看

对平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$, $\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$, $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}^0_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

由于 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，在另一惯性系：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}_{\lambda\tau} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}^0_{\lambda\tau}}_{\mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

五、四维波矢量 Doppler 效应

从经典力学中得知：

当波源靠近观察者时，观察者测到的频率总是高于波源相对于观察者静止时测得的频率

当波源远离观察者时，观察者测到的频率总是低于波源相对于观察者静止时测得的频率

在相对论中涉及不同惯性系之间频率的变换关系，四维波矢量问题。

$k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量

(1) 从量子力学的角度看

光子的动量 $\vec{\boldsymbol{p}} = \hbar\vec{\boldsymbol{k}}$，光子能量：$W = \hbar\omega$

两者构成四维动量矢量：$P_\mu = \left(\vec{\boldsymbol{p}},\ \frac{i}{c}W\right) = \hbar\left(\vec{\boldsymbol{k}},\frac{i}{c}\omega\right)$ 从而：$\left(\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega\right)$ 是四维矢量

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看

对平面电磁波：$\vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{E}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，$\vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \vec{\boldsymbol{\mathcal{B}}}_0 e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$，$\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}^0_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

由于 $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 是四维二阶张量，在另一惯性系：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}_{\lambda\tau} = \underbrace{a_{\mu\lambda}a_{\nu\tau}\mathcal{F}^0_{\lambda\tau}}_{\mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu}} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$　　利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu}x'_{nu} = a_{\nu\mu}x'_\nu$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - i\omega t}$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\big(t + \dfrac{\beta x'}{c}\big) \end{cases}$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t + \dfrac{\beta x'}{c}\right) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}'\cdot\vec{\boldsymbol{r}}'-i\omega' t'}$$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t + \dfrac{\beta x'}{c}\right) \end{cases}$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}'\cdot\vec{\boldsymbol{r}}'-i\omega' t'} \qquad \text{其中：} \begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\big(t + \dfrac{\beta x'}{c}\big) \end{cases}$

$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}\,'-i\omega' t'}$ 其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\big(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\big), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - vk_x) \end{cases} \Longrightarrow k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

$k_u = \big(\vec{k}, \dfrac{i}{c}\,\omega\big)$

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}} - i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\big(t + \dfrac{\beta x'}{c}\big) \end{cases}$

$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}'\cdot\vec{\boldsymbol{r}}' - i\omega' t'}$ 其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\big(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\big), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

$$k_u = \big(\vec{\boldsymbol{k}}, \frac{i}{c}\,\omega\big)$$

(3) 从一个简单的物理事例看

(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

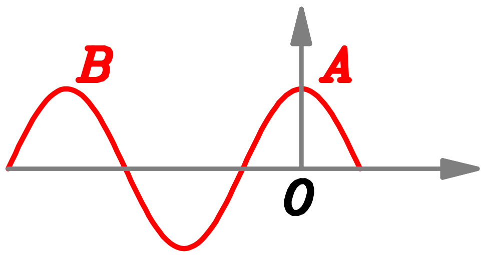
即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即
$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$$

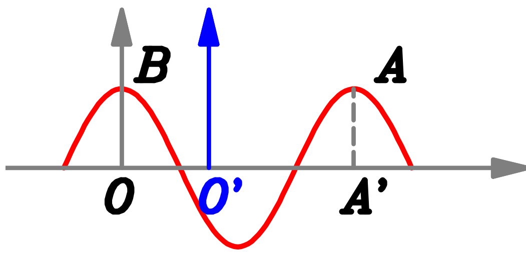
$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}\,'-i\omega' t'}$$

其中：
$$\begin{cases} k'_x = \gamma\big(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\big)\,, \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases} \Longrightarrow \quad k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$$

$$k_u = (\vec{k}, \frac{i}{c}\,\omega)$$

(3) 从一个简单的物理事例看





(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

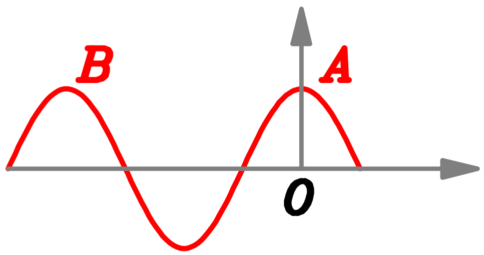
$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'} \quad \text{其中：} \begin{cases} k'_x = \gamma\big(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\big), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases} \Longrightarrow \quad k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$$

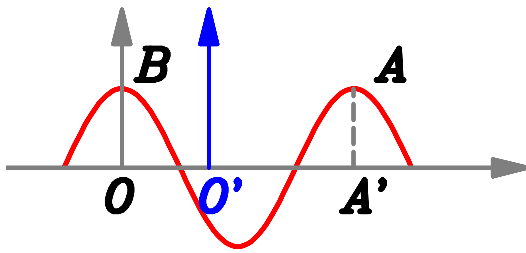
$$k_u = (\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$$

(3) 从一个简单的物理事例看

S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$





(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'}$ 其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

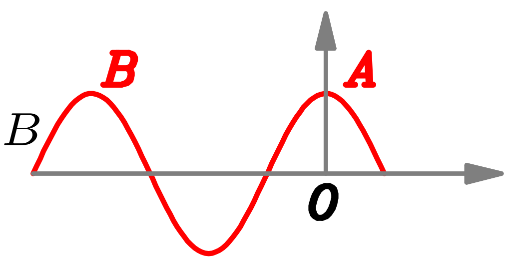
$k_u = (\vec{k}, \dfrac{i}{c}\,\omega)$

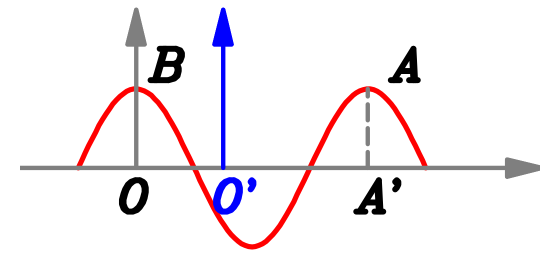
(3) 从一个简单的物理事例看

S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$

波峰 A 到达 S 系原点为事件 A，波峰 B 到达 S 系原点为事件 B





(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'}$$

其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases} \Longrightarrow \quad k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

$$k_u = (\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$$

(3) 从一个简单的物理事例看

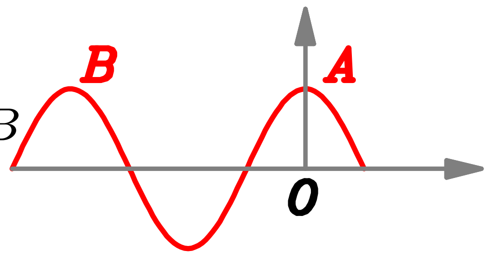
S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

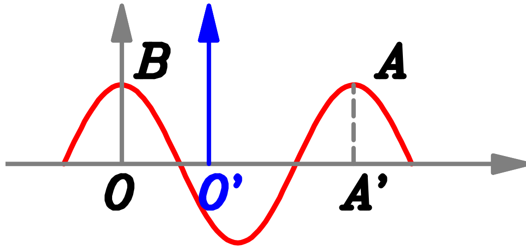
平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$

波峰 A 到达 S 系原点为事件 A，波峰 B 到达 S 系原点为事件 B

事件 A 的时空坐标：$(x = x' = 0,\ t = t' = 0)$

事件 B 的时空坐标：$(x = 0,\ t = T)$，(x', t')





(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

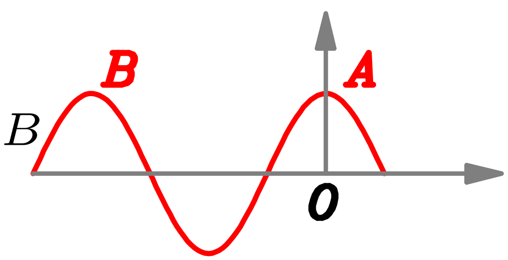
$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'}$ 其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

$k_u = (\vec{k}, \dfrac{i}{c}\omega)$

(3) 从一个简单的物理事例看

S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$

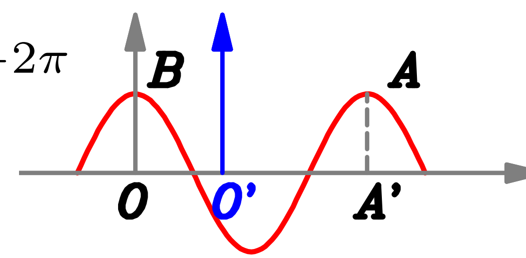


波峰 A 到达 S 系原点为事件 A，波峰 B 到达 S 系原点为事件 B

事件 A 的时空坐标：$(x = x' = 0,\ t = t' = 0)$

事件 B 的时空坐标：$(x = 0,\ t = T)$，(x', t')

在 S 系，事件 B 对应的电磁波相位为：$kx - \omega t = -\omega T = -2\pi$



(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$ 利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$ 即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'}$ 其中：$\begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

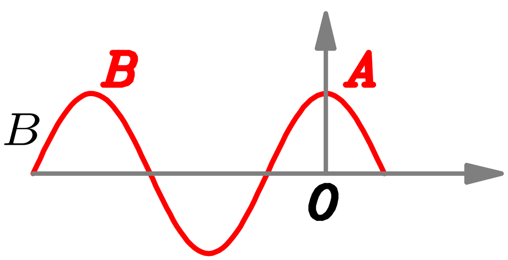
$k_u = (\vec{k}, \dfrac{i}{c}\omega)$

(3) 从一个简单的物理事例看

S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$

波峰 A 到达 S 系原点为事件 A，波峰 B 到达 S 系原点为事件 B

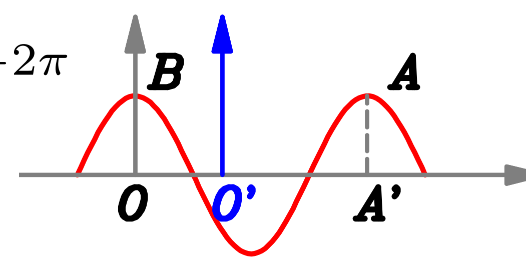


事件 A 的时空坐标：$(x = x' = 0,\ t = t' = 0)$

事件 B 的时空坐标：$(x = 0,\ t = T)$，(x', t')

在 S 系，事件 B 对应的电磁波相位为：$kx - \omega t = -\omega T = -2\pi$

在 S' 系，事件 B 对应的电磁波相位为：$k'x' - \omega' t'$



(2) 从平面电磁波的电磁场张量看 (续)

即：$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$　　利用：$x_\mu = [a^{-1}]_{\mu\nu} x'_{nu} = a_{\nu\mu} x'_\nu$　即 $\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t + \dfrac{\beta x'}{c}) \end{cases}$

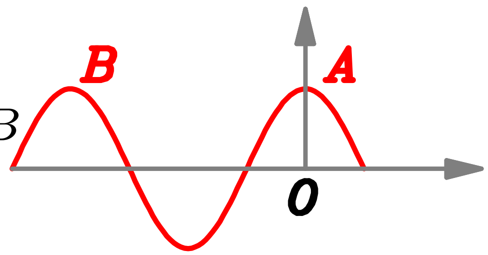
$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = \mathcal{F}^{0\,\prime}_{\mu\nu} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}'-i\omega' t'} \quad \text{其中：} \begin{cases} k'_x = \gamma\left(k_x - \beta\,\dfrac{\omega}{c}\right), \\ k'_y = k_y, \\ k'_z = k_z, \\ \omega' = \gamma(\omega - v k_x) \end{cases} \Longrightarrow \quad k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$$

$$k_u = (\vec{k}, \frac{i}{c}\omega)$$

(3) 从一个简单的物理事例看

S' 相对于 S 系以速度 v 沿 $+x$ 向运动，$t = t' = 0$ 时原点重合

平面电磁波：$\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$

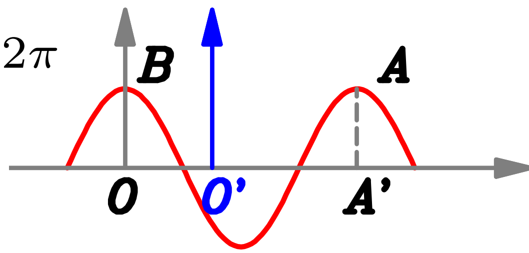


波峰 A 到达 S 系原点为事件 A，波峰 B 到达 S 系原点为事件 B

事件 A 的时空坐标：$(x = x' = 0,\ t = t' = 0)$

事件 B 的时空坐标：$(x = 0,\ t = T)$，(x', t')

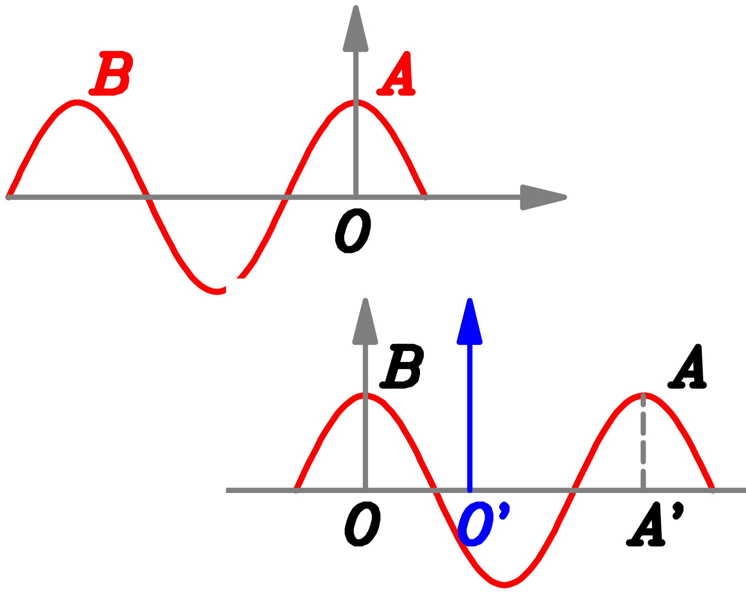
在 S 系，事件 B 对应的电磁波相位为：$kx - \omega t = -\omega T = -2\pi$



在 S' 系，事件 B 对应的电磁波相位为：$k'x' - \omega' t'$

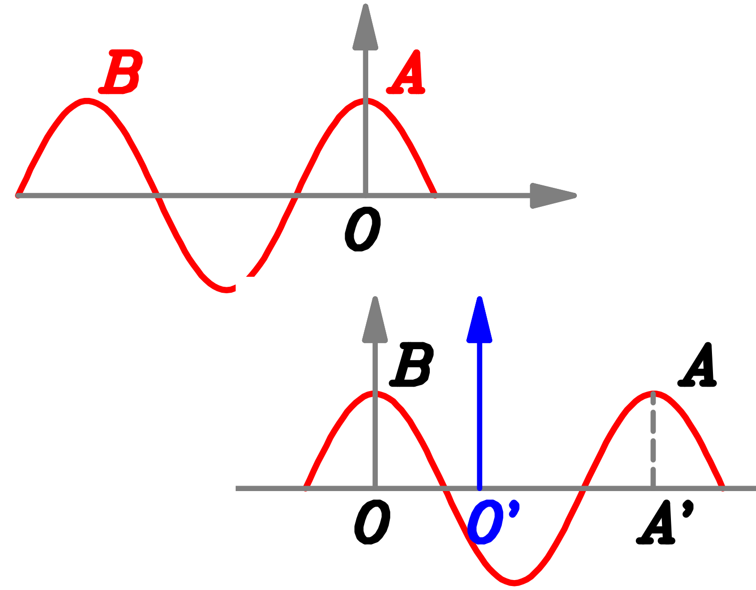
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)



(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

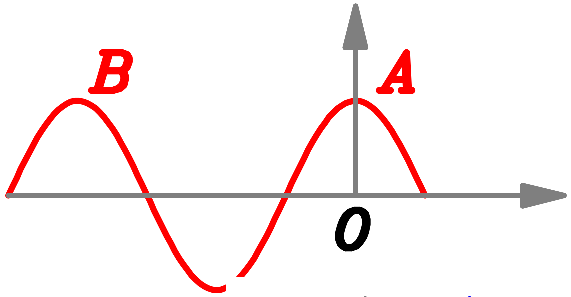
S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

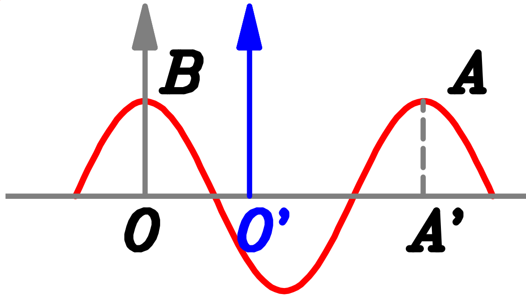


(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



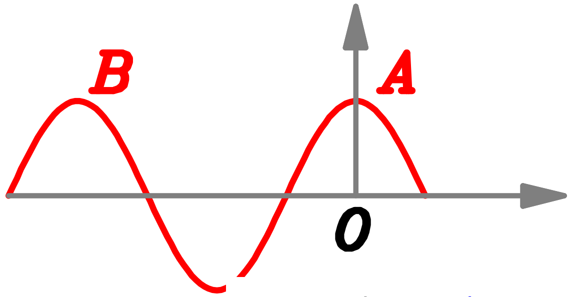


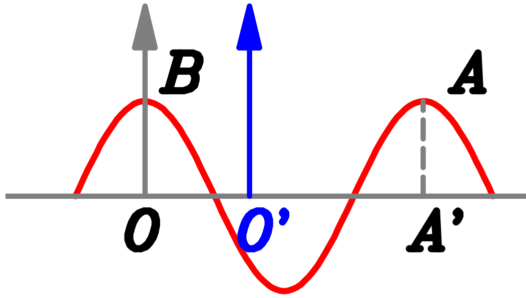
(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$　　S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点

电磁波波长为两个波峰之间的间距





(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

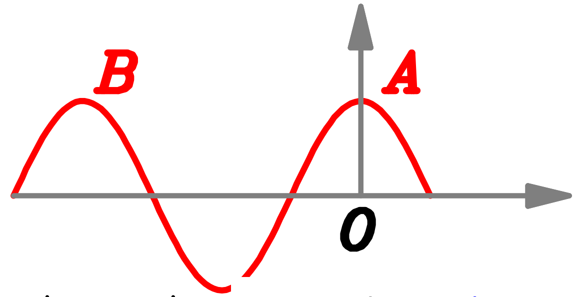
S 系，事件 B 对应相位 $kx-\omega t=-2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x'-\omega' t'$

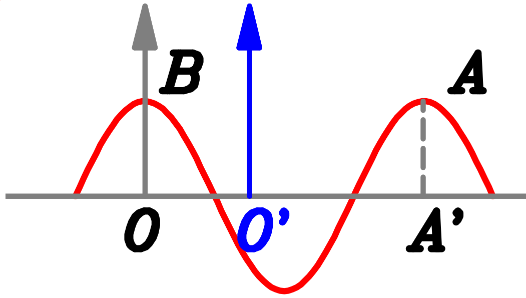
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点

电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$

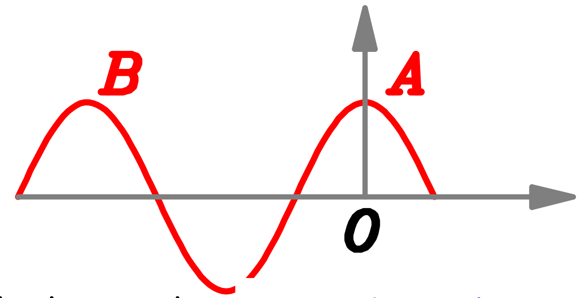




(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

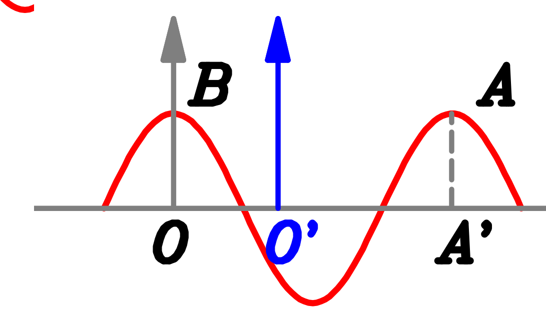
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

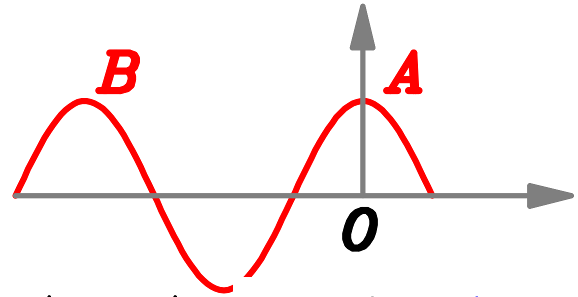
(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点

电磁波波长为两个波峰之间的间距

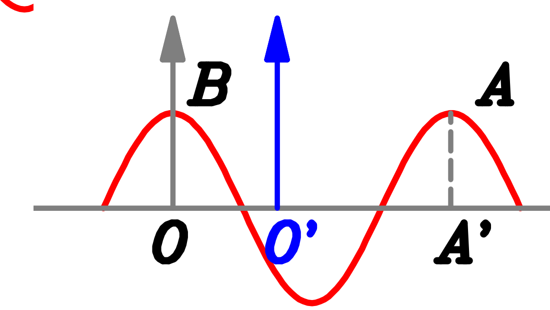
在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$



此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$

$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

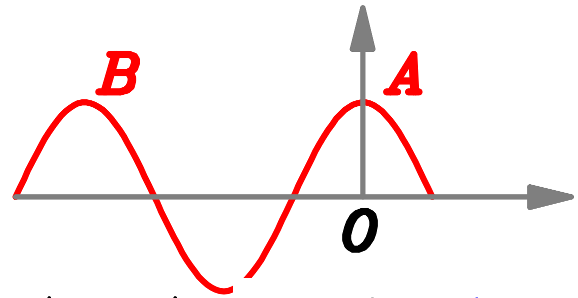
而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi v c/\omega'}{v+c}$



(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx-\omega t=-2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x'-\omega' t'$

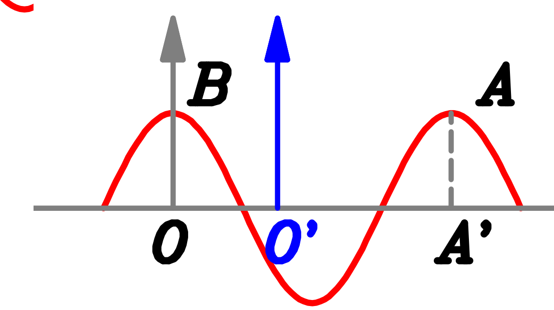
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda'=OO'+O'A'=vt'+ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A'=ct'$



$$\lambda'=2\pi c/\omega' \quad\Longrightarrow\quad t'=\frac{\lambda'}{v+c}=\frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

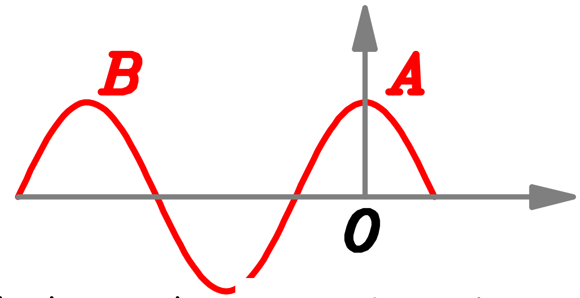
而 $x'=-OO'=-vt'=-\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x'-\omega' t'$ 并利用 $k'=\omega'/c \quad\Longrightarrow\quad k'x'-\omega' t'=-2\pi$

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

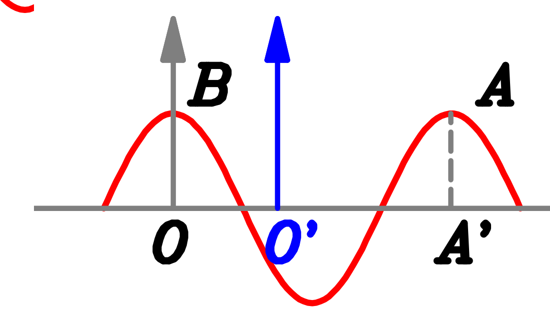
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

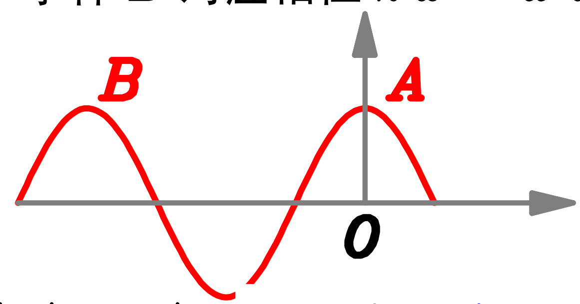
x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$　　S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

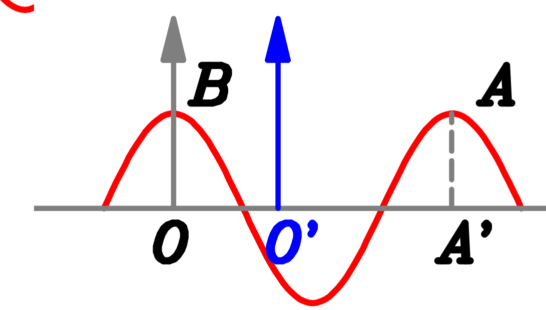
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

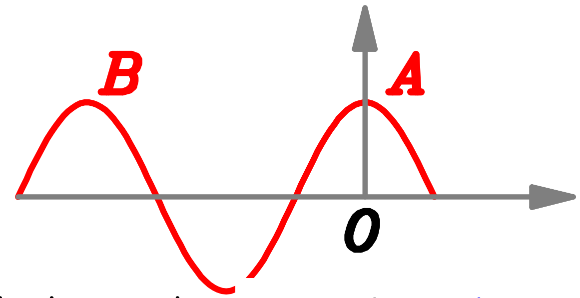
即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

但：$kx - \omega t = k_\mu x_\mu$，　x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

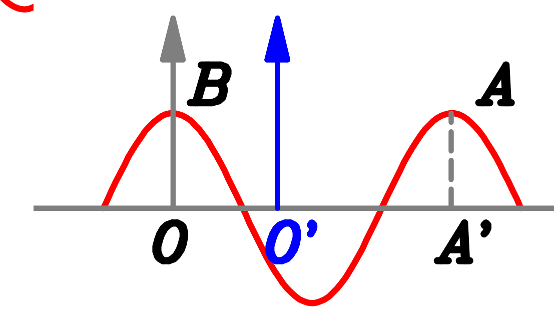
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

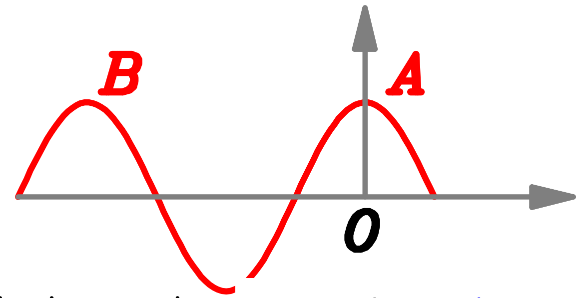
但：$kx - \omega t = k_\mu x_\mu$， x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

从上分析得知，相位不变性来自光速不变。

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx-\omega t=-2\pi$　　S' 系，事件 B 对应相位 $k'x'-\omega' t'$

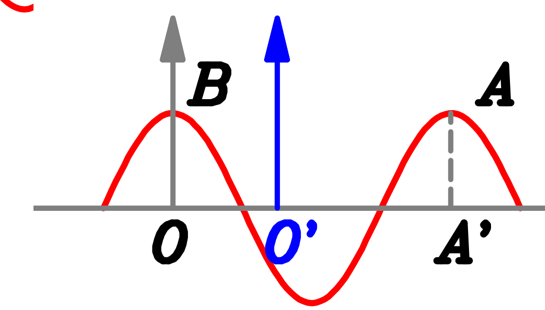
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda'=OO'+O'A'=vt'+ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A'=ct'$



$$\lambda'=2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t'=\frac{\lambda'}{v+c}=\frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x'=-OO'=-vt'=-\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x'-\omega' t'$ 并利用 $k'=\omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x'-\omega' t'=-2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx-\omega t$ 是不变量

但：$kx-\omega t=k_\mu x_\mu$，　x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

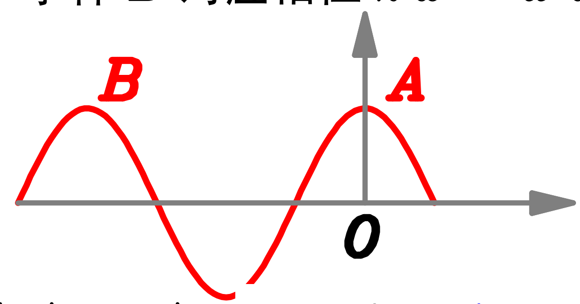
从上分析得知，相位不变性来自光速不变。

另外，在 S 系，事件 A，B 发生于同地，其时间间隔，也即电磁波周期 T 必然是固有时

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

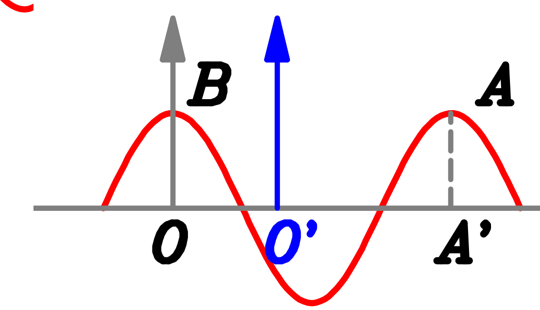
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

但：$kx - \omega t = k_\mu x_\mu$， x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

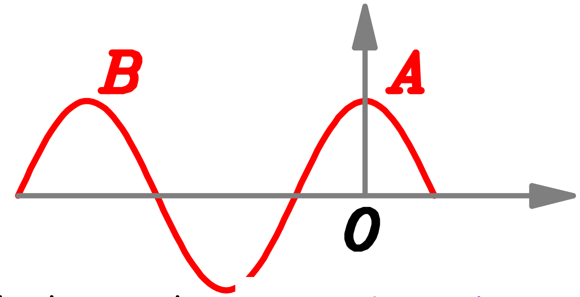
从上分析得知，相位不变性来自光速不变。

另外，在 S 系，事件 A，B 发生于同地，其时间间隔，也即电磁波周期 T 必然是固有时

而在 S' 系，事件 A，B 发生于异地，其时间间隔 t' 必然是运动时间：

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

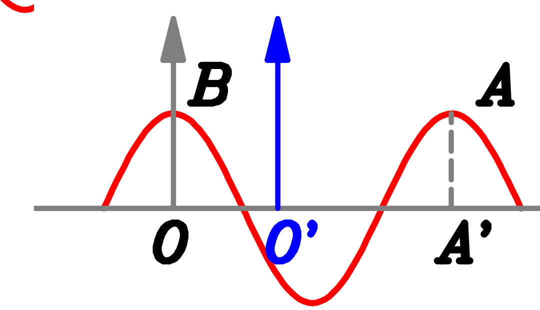


在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点

电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

$$\text{而 } x' = -OO' = -vt' = -\frac{2\pi v c/\omega'}{v+c}$$

x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

但：$kx - \omega t = k_\mu x_\mu$， x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

从上分析得知，相位不变性来自光速不变。

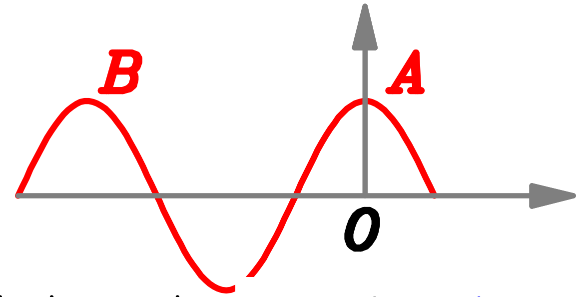
另外，在 S 系，事件 A，B 发生于同地，其时间间隔，也即电磁波周期 T 必然是固有时

而在 S' 系，事件 A，B 发生于异地，其时间间隔 t' 必然是运动时间：$t' = \gamma T = \gamma \dfrac{2\pi}{\omega}$

(3) 从一个简单的物理事例看 (续)

S 系，事件 B 对应相位 $kx - \omega t = -2\pi$ S' 系，事件 B 对应相位 $k'x' - \omega' t'$

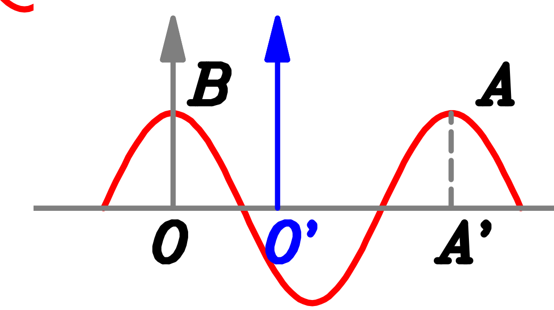
在 S' 系观察，事件 B 发生时，波峰 A 已到达 A' 点



电磁波波长为两个波峰之间的间距

在 S' 系观察，波长 $\lambda' = OO' + O'A' = vt' + ct'$

此处利用了电磁波在任何惯性系的速度都为 c，故 $O'A' = ct'$



$$\lambda' = 2\pi c/\omega' \quad \Longrightarrow \quad t' = \frac{\lambda'}{v+c} = \frac{2\pi c/\omega'}{v+c}$$

而 $x' = -OO' = -vt' = -\dfrac{2\pi vc/\omega'}{v+c}$

x'，t' 代入 $k'x' - \omega' t'$ 并利用 $k' = \omega'/c \quad \Longrightarrow \quad k'x' - \omega' t' = -2\pi$

即：事件 B 对应的电磁波相位对 S 和 S' 系都是 -2π，相位 $kx - \omega t$ 是不变量

但：$kx - \omega t = k_\mu x_\mu$， x_μ 是四维矢量，$k_\mu x_\mu$ 是四维标量 $\Longrightarrow$ k_μ 必为四维矢量。

从上分析得知，相位不变性来自光速不变。

另外，在 S 系，事件 A，B 发生于同地，其时间间隔，也即电磁波周期 T 必然是固有时

而在 S' 系，事件 A，B 发生于异地，其时间间隔 t' 必然是运动时间：$t' = \gamma T = \gamma \dfrac{2\pi}{\omega}$

联立 $t' = \dfrac{\lambda'}{v+c} = \dfrac{2\pi c/\omega'}{v+c}$ 得：$\omega' = \gamma\omega(1 - v/c) = \gamma(\omega - vk)$

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

Let there be light

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}}, \dfrac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$k_x = k\cos\theta \qquad k_y = k\sin\theta$$
$$k'_x = k'\cos\theta' \quad k'_y = k'\sin\theta$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$k_x = k\cos\theta \qquad k_y = k\sin\theta$$

$$k'_x = k'\cos\theta' \quad k'_y = k'\sin\theta$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\left(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\right)$$

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\theta \qquad & k_y &= k\sin\theta \\ k'_x &= k'\cos\theta' \qquad & k'_y &= k'\sin\theta \end{aligned}$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\Big(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\Big) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta)$$

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \dfrac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$k_x = k\cos\theta \qquad k_y = k\sin\theta$$
$$k'_x = k'\cos\theta' \quad k'_y = k'\sin\theta$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\left(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\right) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta) \implies \boxed{\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\theta \qquad & k_y &= k\sin\theta \\ k'_x &= k'\cos\theta' \qquad & k'_y &= k'\sin\theta \end{aligned}$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\left(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\right) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta) \implies \boxed{\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

若在 S' 系中光源静止，则 $f' = \dfrac{\omega'}{2\pi} = f_0$ 称为 固有频率，上式表明

在相对于光源运动的 S 系中，$f = \dfrac{\omega}{2\pi} \neq f_0$ —— 相对论 Doppler 效应

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\theta \qquad & k_y &= k\sin\theta \\ k'_x &= k'\cos\theta' \qquad & k'_y &= k'\sin\theta \end{aligned}$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\Big(\,\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\Big) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta) \implies \boxed{\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

若在 S' 系中光源静止，则 $f' = \dfrac{\omega'}{2\pi} = f_0$ 称为 固有频率，上式表明

在相对于光源运动的 S 系中，$f = \dfrac{\omega}{2\pi} \neq f_0$ —— 相对论 Doppler 效应

讨论

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\theta \qquad & k_y &= k\sin\theta \\ k'_x &= k'\cos\theta' \qquad & k'_y &= k'\sin\theta \end{aligned}$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\Big(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\Big) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta) \implies \boxed{\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

若在 S' 系中光源静止，则 $f' = \dfrac{\omega'}{2\pi} = f_0$ 称为 固有频率，上式表明

在相对于光源运动的 S 系中，$f = \dfrac{\omega}{2\pi} \neq f_0$ —— 相对论 Doppler 效应

讨论

(1) 若在 S 系 $\theta = 0$，则 $f = \dfrac{f_0}{\gamma(1-\beta)} = f_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} > f_0$

称为紫移，即光源向观察者靠近时频率发生紫移

既然 $k_\mu = (\vec{\boldsymbol{k}},\ \frac{i}{c}\omega)$ 是四维矢量，则有：$k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$

设 S 和 S' 为特殊相关惯性系

在 S' 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}'$ 与 x' 轴成 θ' 角，在 S 系中，$\vec{\boldsymbol{k}}$ 与 x 轴成 θ 角，则

$$\begin{aligned} k_x &= k\cos\theta \qquad & k_y &= k\sin\theta \\ k'_x &= k'\cos\theta' \qquad & k'_y &= k'\sin\theta \end{aligned}$$

代入 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$ 得：

$$\frac{i}{c}\omega' = \gamma\left(\frac{i}{c}\omega - i\beta k_x\right) \implies \omega' = \gamma\,\omega(1-\beta\cos\theta) \implies \boxed{\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}}$$

若在 S' 系中光源静止，则 $f' = \dfrac{\omega'}{2\pi} = f_0$ 称为 固有频率，上式表明

在相对于光源运动的 S 系中，$f = \dfrac{\omega}{2\pi} \neq f_0$ —— 相对论 Doppler 效应

讨论

(1) 若在 S 系 $\theta = 0$，则 $f = \dfrac{f_0}{\gamma(1-\beta)} = f_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}} > f_0$

称为紫移，即光源向观察者靠近时频率发生紫移

(2) 若 $\theta = \pi$，则 $f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}} < f_0$。光源远离观察者时频率发生红移

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

(3) 若 $\theta=\pi/2$，则 $f=f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应
横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应
横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu = a_{\mu\nu}k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x = k'\cos\theta' = \gamma\left(k\cos\theta - \dfrac{\beta}{c}\omega\right) \\ k'\sin\theta' = k\sin\theta, \quad k' = \omega'/c, \quad k = \omega/c \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta k\cos\theta) = \gamma(\omega - \omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应
横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x = k' \cos\theta' = \gamma\big(k\cos\theta - \dfrac{\beta}{c}\,\omega\big) \\ k' \sin\theta' = k\sin\theta, \quad k' = \omega'/c, \quad k = \omega/c \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta k\cos\theta) = \gamma(\omega - \omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta' = \gamma\big(\frac{\omega}{c}\cos\theta - \beta\,\frac{\omega}{c}\big) \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta' = \frac{-\beta + \cos\theta}{1 - \beta\cos\theta}$$

$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta' = \frac{\omega}{c}\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta' = \frac{\omega}{\omega'}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x = k' \cos\theta' = \gamma\big(k\cos\theta - \dfrac{\beta}{c}\omega\big) \\ k'\sin\theta' = k\sin\theta, \quad k' = \omega'/c, \quad k = \omega/c \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta k\cos\theta) = \gamma(\omega - \omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta' = \gamma\Big(\frac{\omega}{c}\cos\theta - \beta\frac{\omega}{c}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta' = \frac{-\beta + \cos\theta}{1 - \beta\cos\theta}$$

$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta' = \frac{\omega}{c}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta' = \frac{\omega}{\omega'}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}}$$
—— 光行差公式

(3) 若 $\theta=\pi/2$，则 $f=f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta=0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta=\pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

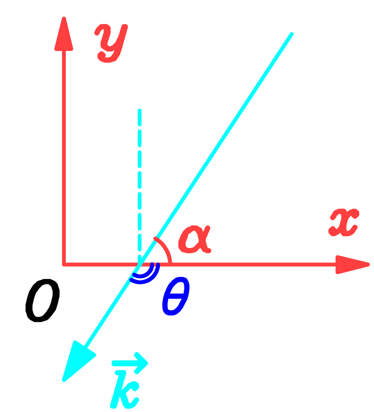
(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x=k'\cos\theta'=\gamma\big(k\cos\theta-\dfrac{\beta}{c}\omega\big) \\ k'\sin\theta'=k\sin\theta, \quad k'=\omega'/c, \quad k=\omega/c \\ \omega'=\gamma(\omega-\beta k\cos\theta)=\gamma(\omega-\omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta'=\gamma\Big(\frac{\omega}{c}\cos\theta-\beta\frac{\omega}{c}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta'=\frac{-\beta+\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta'=\frac{\omega}{c}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta'=\frac{\omega}{\omega'}\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}}$$
—— 光行差公式



(3) 若 $\theta=\pi/2$，则 $f=f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta=0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta=\pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

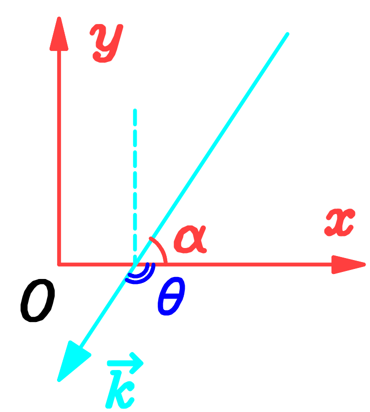
(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x=k'\cos\theta'=\gamma\left(k\cos\theta-\dfrac{\beta}{c}\omega\right) \\ k'\sin\theta'=k\sin\theta, \quad k'=\omega'/c, \quad k=\omega/c \\ \omega'=\gamma(\omega-\beta k\cos\theta)=\gamma(\omega-\omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta'=\gamma\left(\frac{\omega}{c}\cos\theta-\beta\frac{\omega}{c}\right) \Longrightarrow \cos\theta'=\frac{-\beta+\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta'=\frac{\omega}{c}\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta'=\frac{\omega}{\omega'}\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}}$$ —— 光行差公式



设太阳系 S 中某恒星发光，地球相对于 S 的速度为 v

在太阳系惯性系观察到的倾角为 $\alpha=\pi-\theta$

(3) 若 $\theta=\pi/2$，则 $f=f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta=0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta=\pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu=a_{\mu\nu}k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x=k'\cos\theta'=\gamma\big(k\cos\theta-\dfrac{\beta}{c}\omega\big) \\ k'\sin\theta'=k\sin\theta, \quad k'=\omega'/c, \quad k=\omega/c \\ \omega'=\gamma(\omega-\beta k\cos\theta)=\gamma(\omega-\omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta'=\gamma\Big(\frac{\omega}{c}\cos\theta-\beta\frac{\omega}{c}\Big) \Longrightarrow \cos\theta'=\frac{-\beta+\cos\theta}{1-\beta\cos\theta}$$

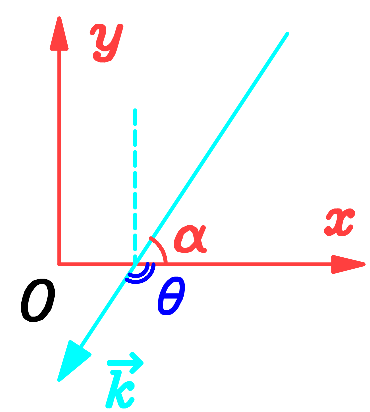
$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta'=\frac{\omega}{c}\sin\theta \Longrightarrow \sin\theta'=\frac{\omega}{\omega'}\sin\theta=\frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\tan\theta'=\frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}}$$
—— 光行差公式

设太阳系 S 中某恒星发光，地球相对于 S 的速度为 v

在太阳系惯性系观察到的倾角为 $\alpha=\pi-\theta$

在地球惯性系观察到的倾角为 $\alpha'=\pi-\theta'$



(3) 若 $\theta = \pi/2$，则 $f = f_0/\gamma$：垂直于光源运动方向可观察到红移 —— 横向 Doppler 效应

横向 Doppler 效应在经典物理中不存在，因此是相对论时间延缓效应的证据之一。

(4) 为何 $\theta = 0$ 对应于光源靠近观察者，$\theta = \pi$ 必然对应于光源远离观察者吗？

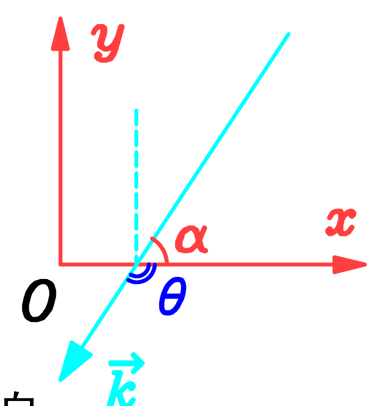
(5) 在不同的惯性系，可以观察到不同的传播方向

由 $k'_\mu = a_{\mu\nu} k_\nu$
$$\begin{cases} k'_x = k'\cos\theta' = \gamma\big(k\cos\theta - \dfrac{\beta}{c}\omega\big) \\ k'\sin\theta' = k\sin\theta, \quad k' = \omega'/c, \quad k = \omega/c \\ \omega' = \gamma(\omega - \beta k\cos\theta) = \gamma(\omega - \omega\beta\cos\theta) \end{cases}$$
解得

$$\frac{\omega}{c}\cos\theta' = \gamma\Big(\frac{\omega}{c}\cos\theta - \beta\frac{\omega}{c}\Big) \implies \cos\theta' = \frac{-\beta + \cos\theta}{1 - \beta\cos\theta}$$

$$\frac{\omega'}{c}\sin\theta' = \frac{\omega}{c}\sin\theta \implies \sin\theta' = \frac{\omega}{\omega'}\sin\theta = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$$

$$\implies \boxed{\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta - \beta)}}$$ —— 光行差公式



设太阳系 S 中某恒星发光，地球相对于 S 的速度为 v

在太阳系惯性系观察到的倾角为 $\alpha = \pi - \theta$

在地球惯性系观察到的倾角为 $\alpha' = \pi - \theta'$

$$\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\gamma(\cos\alpha + \beta)} \approx \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \beta},$$

地球公转，可观察到来自同一恒星的光线方向作周期变化。

Let there be light

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,

Dans la nuit éternelle emportés sans retour,

Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，

Jeter l'ancre un seul jour?

Let there be light

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,
Swept along to the eternal night without return,
Can we ever on the ocean of the ages
Let the anchor down for one day?

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,
Swept along to the eternal night without return,
Can we ever on the ocean of the ages
Let the anchor down for one day?

总是这样被推向陌生的彼岸，

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,
Swept along to the eternal night without return,
Can we ever on the ocean of the ages
Let the anchor down for one day?

总是这样被推向陌生的彼岸，
掠过永恒的夜晚，一去不复返；

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,
Swept along to the eternal night without return,
Can we ever on the ocean of the ages
Let the anchor down for one day?

总是这样被推向陌生的彼岸，
掠过永恒的夜晚，一去不复返；
在岁月的海洋中，我们能否作，

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,	总是这样被推向陌生的彼岸，
Swept along to the eternal night without return,	掠过永恒的夜晚，一去不复返；
Can we ever on the ocean of the ages	在岁月的海洋中，我们能否作，
Let the anchor down for one day?	哪怕就一天的停泊？

Let there be light

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,
Swept along to the eternal night without return,
Can we ever on the ocean of the ages
Let the anchor down for one day?

总是这样被推向陌生的彼岸，
掠过永恒的夜晚，一去不复返；
在岁月的海洋中，我们能否作，
哪怕就一天的停泊？

—— From "Le Lac" by A. De Lamartine (1790-1869)：法国十九世纪的第一位浪漫派诗人

Ainsi, toujours poussées vers de nouveaux rivages,
Dans la nuit éternelle emportés sans retour,
Ne pourrons-nous jamais sur l'ocean des ages，
Jeter l'ancre un seul jour?

As we are pushed toward new shores,	总是这样被推向陌生的彼岸，
Swept along to the eternal night without return,	掠过永恒的夜晚，一去不复返；
Can we ever on the ocean of the ages	在岁月的海洋中，我们能否作，
Let the anchor down for one day?	哪怕就一天的停泊？

—— From "Le Lac" by A. De Lamartine (1790-1869)：法国十九世纪的第一位浪漫派诗人

与学过狭义相对论的、即将步入大四的物理系同学共勉