§1.6 Dirac delta 函数

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{v} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ 的散度

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \quad = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \quad = \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \quad &= \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}(\nabla r) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} (\nabla r) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = 0 \end{aligned}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}} &= \nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{r}} + (\nabla \frac{1}{r^3}) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} (\nabla r) \cdot \vec{\boldsymbol{r}} = 0 \qquad (\text{利用了 } \nabla r = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}) \end{aligned}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} &= \nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}=\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{r}}+(\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{\boldsymbol{r}}\\ &=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^4}(\nabla r)\cdot\vec{\boldsymbol{r}}=0 \qquad\qquad (\text{利用了 } \nabla r=\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r})\end{aligned}$$

对 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$点，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} \quad = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\Delta S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma}{\Delta V}$$

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} &= \nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{r}} + (\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{\boldsymbol{r}} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}(\nabla r)\cdot\vec{\boldsymbol{r}} = 0 \end{aligned}$$

(利用了 $\nabla r = \dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r}$)

对 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$点，

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\Delta S}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma}{\Delta V}$$

取 ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

故 ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{v} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{r} \neq 0$，

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{v} &= \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r} + (\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{r} \\ &= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\,(\nabla r)\cdot\vec{r} = 0 \end{aligned}$$

（利用了 $\nabla r = \dfrac{\vec{r}}{r}$）

对 $\vec{r} = 0$点，

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\vec{v} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\Delta S}\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\sigma}{\Delta V} \\ &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\Delta S}\hat{e}_r\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega}{\Delta V} \end{aligned}$$

取 ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球
故 ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

§ 1.6 Dirac delta 函数

一、$\vec{v}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ 的散度

如 $\vec{r}\neq 0$，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{v} &= \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}\nabla\cdot\vec{r}+(\nabla\frac{1}{r^3})\cdot\vec{r}\\ &=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^4}(\nabla r)\cdot\vec{r}=0\end{aligned}$$

(利用了 $\nabla r=\dfrac{\vec{r}}{r}$)

对 $\vec{r}=0$点，

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{v} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S}\vec{n}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}\sigma}{\Delta V}\\ &=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S}\hat{e}_r\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}r^2\mathrm{d}\Omega}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{4\pi}{\frac{4\pi}{3}\eta^3}=\infty\end{aligned}$$

取 ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球
故 ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}\tau$$

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau \quad = \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}\tau \quad = \int_{\Delta V} \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\, \mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积
ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

Let there be light

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

Let there be light

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi
\end{aligned}
$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

因此 $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 满足下列性质：

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau &= \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi\end{aligned}$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

因此 $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 满足下列性质：

$$w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \begin{cases} 0 & \vec{\boldsymbol{r}}\neq 0 \\ \infty & \vec{\boldsymbol{r}} = 0\end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{V}} w(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 1$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

$w(\vec{\boldsymbol{r}})$ 即为 Dirac delta 函数： $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

$$= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma$$

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

$$= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

因此 $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 满足下列性质：

$$w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \begin{cases} 0 & \vec{\boldsymbol{r}}\neq 0 \\ \infty & \vec{\boldsymbol{r}} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{V}} w(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 1$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

$w(\vec{\boldsymbol{r}})$ 即为 Dirac delta 函数： $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

$$= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma$$

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

$$= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

因此 $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 满足下列性质：

$$w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \begin{cases} 0 & \vec{\boldsymbol{r}}\neq 0 \\ \infty & \vec{\boldsymbol{r}} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{V}} w(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 1$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

$w(\vec{\boldsymbol{r}})$ 即为 Dirac delta 函数： $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\dfrac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

1935 Paul Dirac 从物理上引进

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau = \int_{\Delta V} \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\tau$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

ΔV 为球心于原点半径为 η 的小球

$$= \int_{\Delta S} \vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\sigma$$

ΔS 为球心于原点半径为 η 的球面

$$= \int \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}\,r^2\mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

因此 $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}$ 满足下列性质：

$$w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \begin{cases} 0 & \vec{\boldsymbol{r}}\neq 0 \\ \infty & \vec{\boldsymbol{r}} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{\mathcal{V}} w(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau = 1$$

$\mathcal{V}$ 为包围原点的任意体积

$w(\vec{\boldsymbol{r}})$ 即为 Dirac delta 函数： $w(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{4\pi}\,\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = \delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

1935 Paul Dirac 从物理上引进　　1950 Laurent Schwartz 从数学上证明

二、一维 Dirac delta 函数

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll}0 & x\neq a\\ \infty & x=a\end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x\neq a \\ \infty & x=a \end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x\neq a \\ \infty & x=a \end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

广义函数专著：Lighthill “Fourier Analysis and Generalized Functions” (Cambridge University 1964)

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x\neq a \\ \infty & x=a \end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

广义函数专著：Lighthill “Fourier Analysis and Generalized Functions” (Cambridge University 1964)

对任意平滑函数，由于 $f(x)\,\delta(x-a)=f(a)\,\delta(x-a)$

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x\neq a \\ \infty & x=a \end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

广义函数专著：Lighthill “Fourier Analysis and Generalized Functions” (Cambridge University 1964)

对任意平滑函数，由于 $f(x)\,\delta(x-a)=f(a)\,\delta(x-a)$，故有

二、一维 Dirac delta 函数

$$\delta(x-a)=\left\{\begin{array}{ll} 0 & x\neq a \\ \infty & x=a \end{array}\right\}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=1$$

$\delta(x)$ 称为 Dirac delta 函数

数学上称为广义函数 (generalized function) 或分布 (distribution)

广义函数专著：Lighthill "Fourier Analysis and Generalized Functions" (Cambridge University 1964)

对任意平滑函数，由于 $f(x)\,\delta(x-a)=f(a)\,\delta(x-a)$，故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{a-\eta}^{a+\eta}f(a)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)\int_{a-\eta}^{a+\eta}\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$$

δ 函数的性质

1. $\delta(-x) = \delta(x)$
2. $\delta'(-x) = -\delta'(x)$
3. $x\delta'(x) = -\delta(x)$
4. $\delta(kx) = \dfrac{1}{|k|}\delta(x)$
5. $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$， $\qquad x\delta(x) = 0$
6. $\delta\left[g(x)\right] = \sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$, 函数 $g(x)$ 只有单重根，$\sum_i$ 对 $g(x)$ 的所有单重根求和
7. $\delta(x) = \dfrac{d\theta(x)}{d\,x}$, $\qquad \theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq 0 \\ 0, & \text{if } x < 0 \end{cases}$ 阶跃函数 (step function)

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x$$

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x \qquad \text{— “Physicist’s proofs”}$$

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x \qquad \text{— “Physicist’s proofs”}$$

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x$$

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x \qquad \text{— “Physicist's proofs”}$$

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathrm{d}x$$

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x$$

— “Physicist’s proofs”

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\;\mathrm{d}\,\delta(x)\end{aligned}$$

利用分部积分

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x$$

— "Physicist's proofs"

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\;\mathrm{d}\,\delta(x) \\ &= \underbrace{\Big[f(x)\,x\;\delta(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)\,=\,0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}\,[f(x)x]\end{aligned}$$

利用分部积分

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathsf{d}x \qquad \text{— “Physicist's proofs”}$$

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathsf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,\mathsf{d}\,\delta(x) \qquad \text{利用分部积分} \\
&= \underbrace{\Big[f(x)\,x\,\delta(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathsf{d}\,[f(x)x] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)f(x)\,\mathsf{d}x - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\,\mathsf{d}f(x)}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)=0}
\end{aligned}$$

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathrm{d}x \qquad \text{— “Physicist's proofs”}$$

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,\mathrm{d}\,\delta(x) \qquad \text{利用分部积分} \\
&= \underbrace{\Big[f(x)\,x\,\delta(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)\,=\,0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}\,[f(x)x] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x)\,\mathrm{d}f(x)}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)\,=\,0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} [-\delta(x)] f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Let there be light

涉及δ 函数性质的证明，只须证明对任意平滑函数 $f(x)$，下式成立：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathsf{d}x \qquad \text{— “Physicist's proofs”}$$

例如，要证明 $x\delta'(x) = -\delta(x)$，只须

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{左边})\,\mathsf{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x\delta'(x)]\,\mathsf{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,x\,\mathsf{d}\,\delta(x) \qquad \text{利用分部积分} \\
&= \underbrace{\Big[f(x)\,x\,\delta(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)\,=\,0} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathsf{d}\,[f(x)x] \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)f(x)\,\mathsf{d}x - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x\delta(x)\,\mathsf{d}f(x)}_{=0\ \text{因为}x\delta(x)\,=\,0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}[-\delta(x)]f(x)\,\mathsf{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\text{右边})\,\mathsf{d}x
\end{aligned}$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to 0+}\delta_\alpha(x)$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

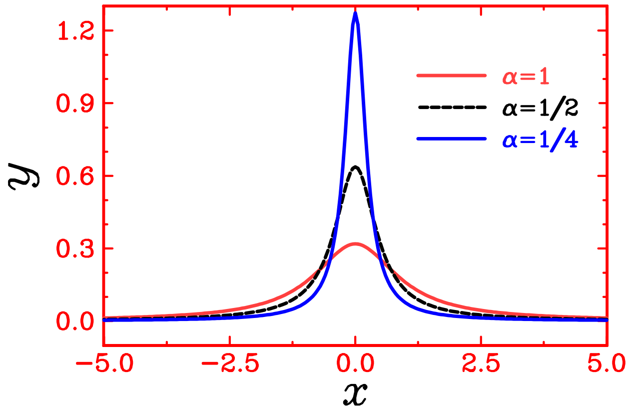
$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



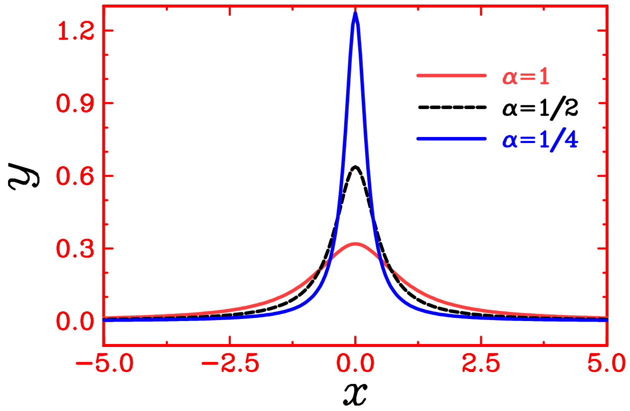
Let there be light

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x)=\lim_{\alpha\to0+}\delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y=\delta_\alpha(x)=\frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



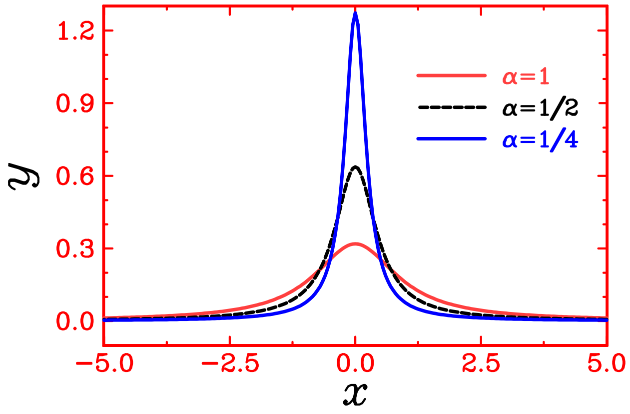
显然：

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$$



显然：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \delta_\alpha(x) =$$

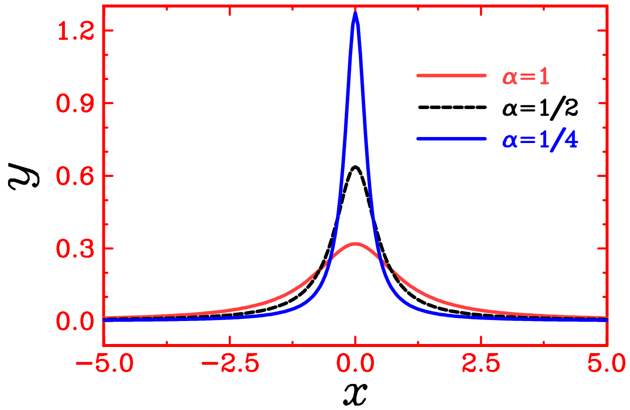
Let there be light

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



显然：

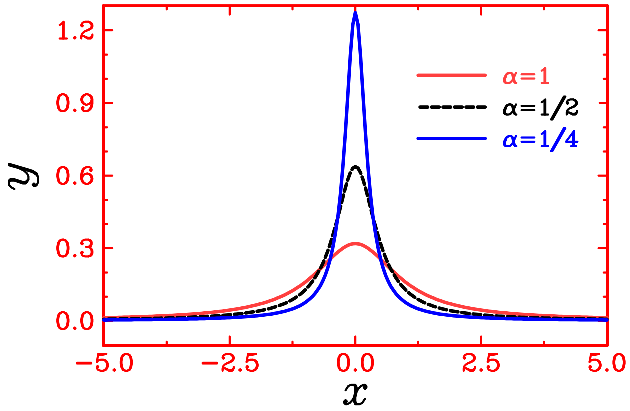
$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ & \end{cases}$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



显然：

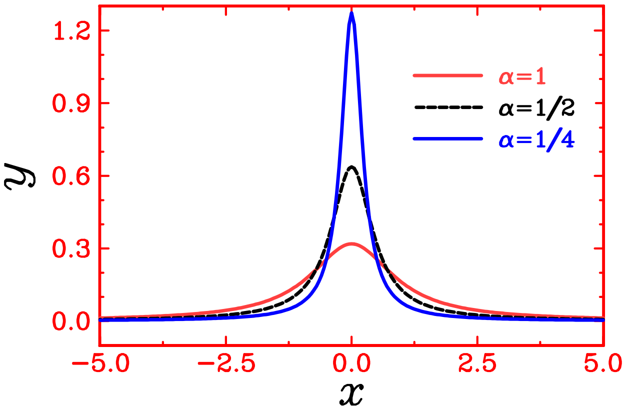
$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\pi\alpha} = \infty & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



显然：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\pi\alpha} = \infty & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

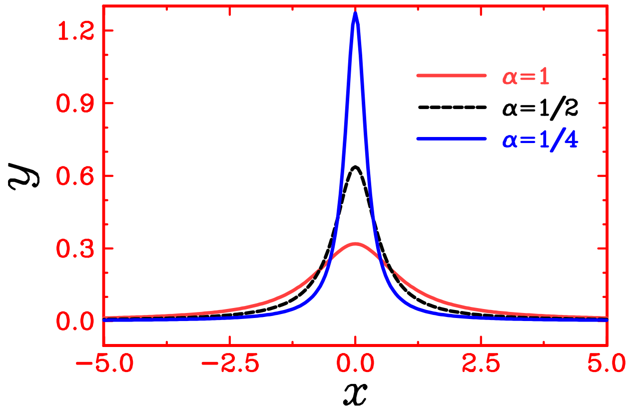
且

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



显然：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\pi\alpha} = \infty & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

且

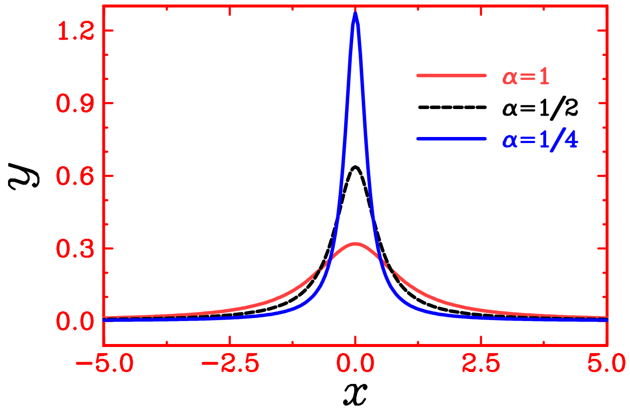
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$



显然：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha\to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\pi\alpha} = \infty & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

且

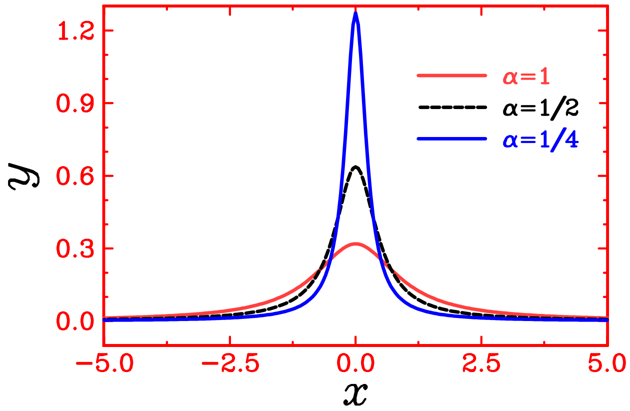
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x \quad = \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} \mathrm{d}x$$

讨论 δ 函数时，常用到 δ 函数的极限形式 (the limits of sequences of smooth functions)：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0+} \delta_\alpha(x)$$

$\delta_\alpha(x)$ 有许多形式，例如可表为

$$y = \delta_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + \alpha^2)}$$



显然：

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \delta_\alpha(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha}{\pi x^2} = 0 & \text{for } x \neq 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{1}{\pi \alpha} = \infty & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

且

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\alpha \to 0} \left[\frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{x}{\alpha}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k \quad = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha} - \frac{1}{ix-\alpha}\right)\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k \quad &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha} - \frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

因此

$$\delta_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ \delta(x) &= \lim_{\alpha\to 0}\delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ \delta(x) &= \lim_{\alpha\to 0}\,\delta_\alpha(x)\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ \delta(x) &= \lim_{\alpha\to 0}\,\delta_\alpha(x)\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

δ 函数有许多积分表示，最简单的是表为 Fourier 积分。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k}\,\mathrm{d}k + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k}\,\mathrm{d}k\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ix+\alpha}-\frac{1}{ix-\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} = \delta_\alpha(x)\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\delta_\alpha(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ \delta(x) &= \lim_{\alpha\to 0}\,\delta_\alpha(x)\\ &= \lim_{\alpha\to 0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\alpha|k|}\,\mathrm{d}k\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}k\end{aligned}$$

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,\mathrm{d}k}$$

三、三维 Dirac delta 函数

三、三维 Dirac delta 函数

$\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$

三、三维 Dirac delta 函数

$\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')$　　直角坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') \quad = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$ 直角坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,') \quad = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

直角坐标

球坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$ 直角坐标

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$ 球坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\begin{aligned}\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') &= \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')\end{aligned}$$

直角坐标

球坐标

球坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$ 直角坐标

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$ 球坐标

$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')$$ 球坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$ 直角坐标

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')$$ 球坐标

$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')$$ 球坐标

柱坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\begin{aligned}
\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') &= \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') && \text{直角坐标} \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') && \text{球坐标} \\
&= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi') && \text{球坐标} \\
&= \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') && \text{柱坐标}
\end{aligned}$$

三、三维 Dirac delta 函数

$$\begin{aligned}
\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') &= \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \\
&= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') \\
&= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi') \\
&= \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')
\end{aligned}$$

直角坐标

球坐标

球坐标

柱坐标

正交曲线坐标

三、三维 Dirac delta 函数

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \qquad \text{直角坐标}$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-r')\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi') \qquad \text{球坐标}$$

$$= \frac{1}{r^2}\delta(r-r')\delta(\cos\theta-\cos\theta')\delta(\phi-\phi') \qquad \text{球坐标}$$

$$= \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \qquad \text{柱坐标}$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3') \qquad \text{正交曲线坐标}$$

三、三维 Dirac delta 函数

$$\begin{aligned}
\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,') &= \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') && \text{直角坐标} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\theta}\delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\phi - \phi') && \text{球坐标} \\
&= \frac{1}{r^2}\delta(r - r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\phi - \phi') && \text{球坐标} \\
&= \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho')\delta(\phi - \phi')\delta(z - z') && \text{柱坐标} \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\delta(u_1 - u_1')\delta(u_2 - u_2')\delta(u_3 - u_3') && \text{正交曲线坐标}
\end{aligned}$$

积分：

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau = 1$$

$$\int_{\mathcal{V}_\infty} f(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau = f(\vec{\boldsymbol{a}})$$

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\, \mathrm{d}^3 k$$

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}^3 k$$

常用公式：

$$\nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = -\nabla^2 \frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\nabla \cdot \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -\nabla^2 \frac{1}{R} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}^3k$$

常用公式：

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = -\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -\nabla^2\frac{1}{R} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

三、例题

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}^3k$$

常用公式：

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = -\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -\nabla^2\frac{1}{R} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

三、例题

例 1. 试求张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}} = \nabla\nabla\frac{1}{r}$ 的第 ij 元：$W_{ij} = \partial_i\partial_j\frac{1}{r}$，其中 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}^3k$$

常用公式：

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3} = -\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} = -\nabla^2\frac{1}{R} = 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'$

三、例题

例 1. 试求张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}} = \nabla\nabla\frac{1}{r}$ 的第 ij 元：$W_{ij} = \partial_i\partial_j\frac{1}{r}$，其中 $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

对 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$，已求得（§1.4 p12）

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}} = \nabla\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{3\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}}{r^2} - \overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right)$$

积分表示：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\vec{\boldsymbol{k}}\cdot\vec{\boldsymbol{r}}}\,\mathrm{d}^3k$$

常用公式：

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{r^3}=-\nabla^2\frac{1}{r}=4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}=-\nabla^2\frac{1}{R}=4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

其中：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'$

三、例题

例 1. 试求张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}=\nabla\nabla\frac{1}{r}$ 的第 ij 元：$W_{ij}=\partial_i\partial_j\frac{1}{r}$，其中 $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$

对 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$，已求得（§1.4 p12）

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}=\nabla\nabla\frac{1}{r}=\frac{1}{r^3}\left(\frac{3\vec{\boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{r}}}{r^2}-\overleftrightarrow{\boldsymbol{I}}\right)$$

即：

$$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ 时：
$$W_{ij} = \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

Let there be light

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ 时： $$W_{ij} = \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij} = a\delta_{ij} + b\,x_i x_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

现求对于包括 $\vec{r}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{r}\neq 0$ 时： $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii}=3a+b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

Let there be light

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ 时： $$W_{ij} = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij} = a\delta_{ij} + b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii} = 3a + b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii} = 3$, $x_i\,x_i = r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii} = \partial_i\partial_i\,\frac{1}{r}$$

Let there be light

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ 时: $$W_{ij} = \frac{3x_ix_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况: $$W_{ij} = a\delta_{ij} + b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和: $$W_{ii} = 3a + b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii} = 3$, $x_i\,x_i = r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii} = \partial_i\partial_i\frac{1}{r} = \nabla^2\frac{1}{r}$$

Let there be light

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}} = 0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ 时： $$W_{ij} = \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij} = a\delta_{ij} + b\,x_i x_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii} = 3a + b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii} = 3$, $x_i\,x_i = r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii} = \partial_i\partial_i \frac{1}{r} = \nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时： $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii}=3a+b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii}=\partial_i\partial_i\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

从而: $$3a+br^2=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \qquad (1)$$

Let there be light

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时： $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii}=3a+b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii}=\partial_i\partial_i\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

从而: $$3a+br^2=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \qquad (1)$$

又，对 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 且 $i\neq j$ $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j}{r^5}$$

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时： $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii}=3a+b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii}=\partial_i\partial_i\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

从而: $$3a+br^2=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\qquad(1)$$

又，对 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 且 $i\neq j$ $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j}{r^5}$$

因此: $$W_{ij}=b\,x_ix_j=\frac{3x_ix_j}{r^5}\qquad(2)$$

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时： $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

可设一般情况： $$W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $$W_{ii}=3a+b\,r^2$$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $$W_{ii}=\partial_i\partial_i\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$$

从而: $$3a+br^2=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\qquad(1)$$

又，对 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 且 $i\neq j$ $$W_{ij}=\frac{3x_ix_j}{r^5}$$

因此: $$W_{ij}=b\,x_ix_j=\frac{3x_ix_j}{r^5}\qquad(2)$$

联立 (1) 和 (2) 得： $$b=\frac{3}{r^5},\qquad a=-\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{\boldsymbol{r}})-\frac{1}{r^3}$$

现求对于包括 $\vec{\boldsymbol{r}}=0$ 情况的 W_{ij}。

由于 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 时： $W_{ij}=\dfrac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$

可设一般情况： $W_{ij}=a\delta_{ij}+b\,x_ix_j$ a, b 是 r 的函数以保证 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 为张量

对重复指标求和： $W_{ii}=3a+b\,r^2$ 其中 $\delta_{ii}=3$, $x_i\,x_i=r^2$

从 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{W}}$ 的定义知: $W_{ii}=\partial_i\partial_i\dfrac{1}{r}=\nabla^2\dfrac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}})$

从而: $$3a+br^2=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}) \tag{1}$$

又，对 $\vec{\boldsymbol{r}}\neq 0$ 且 $i\neq j$ $W_{ij}=\dfrac{3x_ix_j}{r^5}$

因此: $$W_{ij}=b\,x_ix_j=\frac{3x_ix_j}{r^5} \tag{2}$$

联立 (1) 和 (2) 得： $b=\dfrac{3}{r^5}$, $a=-\dfrac{4\pi}{3}\delta(\vec{\boldsymbol{r}})-\dfrac{1}{r^3}$

求得： $$W_{ij}=-\frac{4\pi}{3}\delta(\vec{\boldsymbol{r}})\delta_{ij}+\frac{3x_ix_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim_{\substack{q \to \infty \\ \vec{\boldsymbol{l}} \to 0}} q\, \vec{\boldsymbol{l}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{q \to \infty \\ \vec{\boldsymbol{l}} \to 0}} q \times (\vec{\boldsymbol{l}}\ \text{的高阶项}) = 0 \qquad (1)$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\,\vec{\boldsymbol{l}} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\times(\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项})=0 \qquad (1)$$

电荷密度：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta[\vec{\boldsymbol{r}}-(\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}})]-q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\, \vec{\boldsymbol{l}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q \times (\vec{\boldsymbol{l}}\ \text{的高阶项}) = 0 \qquad (1)$$

电荷密度：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta[\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}})] - q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

$$= q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) - \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \qquad (2)$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$， 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极极矩：
$$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\,\vec{\boldsymbol{l}} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q \times (\vec{\boldsymbol{l}}\text{ 的高阶项}) = 0 \qquad (1)$$

电荷密度：
$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\delta[\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}})] - q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$
$$= q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) - \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \qquad (2)$$

Taylor 展开：
$$f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) = f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) + [\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] \cdot (-\vec{\boldsymbol{l}}) + \vec{\boldsymbol{l}}\text{ 的高阶项}$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于$\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极极矩：

$$\vec{\boldsymbol{p}}=\lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\,\vec{\boldsymbol{l}} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\times(\vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项})=0 \tag{1}$$

电荷密度：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta[\vec{\boldsymbol{r}}-(\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}})]-q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$

$$=q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})-\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \tag{2}$$

Taylor 展开：

$$f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})=f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)+[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]\cdot(-\vec{\boldsymbol{l}})+\vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项}$$

故：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})=\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)-\vec{\boldsymbol{l}}\cdot[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]+\vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项}$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\, \vec{\boldsymbol{l}} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q \times (\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项}) = 0 \tag{1}$$

电荷密度：

$$\begin{aligned} \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) &= q\, \delta[\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}})] - q\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) \\ &= q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) - \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

Taylor 展开：

$$f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) = f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) + [\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] \cdot (-\vec{\boldsymbol{l}}) + \vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项}$$

故：

$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) = \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) - \vec{\boldsymbol{l}} \cdot [\nabla \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] + \vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项}$$

代入 (2)

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -q\, \vec{\boldsymbol{l}} \cdot [\nabla \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] + q\,(\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项})$$

例 2. 位于 $\vec{r} = \vec{r}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{r}) = -\vec{p}\cdot\nabla\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{a})$ if 点电荷位于 $\vec{r} = \vec{a}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{r}_0 + \vec{l}$ 和 $\vec{r}_0$

电偶极矩：

$$\vec{p} = \lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{l}\to 0}} q\,\vec{l} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{l}\to 0}} q\times(\vec{l}\text{的高阶项}) = 0 \qquad (1)$$

电荷密度：

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta[\vec{r}-(\vec{r}_0+\vec{l})] - q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

$$= q\left[\delta(\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{l}) - \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\right] \qquad (2)$$

Taylor 展开：

$$f(\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{l}) = f(\vec{r}-\vec{r}_0) + [\nabla f(\vec{r}-\vec{r}_0)]\cdot(-\vec{l}) + \vec{l}\text{的高阶项}$$

故：

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0-\vec{l}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) - \vec{l}\cdot[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)] + \vec{l}\text{的高阶项}$$

代入 (2)

$$\rho(\vec{r}) = -q\,\vec{l}\cdot[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)] + q\,(\vec{l}\text{的高阶项})$$

利用 (1)

$$= -\vec{p}\cdot[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)]$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot\nabla\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于 $\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：
$$\vec{\boldsymbol{p}}=\lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\,\vec{\boldsymbol{l}} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty\\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\times(\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项})=0 \qquad (1)$$

电荷密度：
$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\,\delta[\vec{\boldsymbol{r}}-(\vec{\boldsymbol{r}}_0+\vec{\boldsymbol{l}})]-q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)$$
$$=q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})-\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \qquad (2)$$

Taylor 展开：
$$f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})=f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)+[\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]\cdot(-\vec{\boldsymbol{l}})+\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项}$$

故：
$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0-\vec{\boldsymbol{l}})=\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)-\vec{\boldsymbol{l}}\cdot[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]+\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项}$$

代入 (2)
$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=-q\,\vec{\boldsymbol{l}}\cdot[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]+q\,(\vec{\boldsymbol{l}}\,\text{的高阶项})$$

利用 (1)
$$=-\vec{\boldsymbol{p}}\cdot[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]=-[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0)]\cdot\vec{\boldsymbol{p}}$$

例 2. 位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0$ 处的点电偶极子的电荷密度 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot \nabla\, \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$

点电荷 q 的体电荷密度： $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})$ if 点电荷位于 $\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}}$ 处

两个点电荷 $+q$ 和 $-q$, 分别位于 $\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$

电偶极矩：
$$\vec{\boldsymbol{p}} = \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q\,\vec{\boldsymbol{l}} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{q\to\infty \\ \vec{\boldsymbol{l}}\to 0}} q \times (\vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项}) = 0 \qquad (1)$$

电荷密度：
$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = q\,\delta[\vec{\boldsymbol{r}} - (\vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{l}})] - q\,\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)$$
$$= q\left[\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) - \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)\right] \qquad (2)$$

Taylor 展开：
$$f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) = f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) + [\nabla f(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] \cdot (-\vec{\boldsymbol{l}}) + \vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项}$$

故：
$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0 - \vec{\boldsymbol{l}}) = \delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0) - \vec{\boldsymbol{l}} \cdot [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] + \vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项}$$

代入 (2)
$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = -q\,\vec{\boldsymbol{l}} \cdot [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] + q\,(\vec{\boldsymbol{l}}\text{的高阶项})$$

利用 (1)
$$= -\vec{\boldsymbol{p}} \cdot [\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] = -[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0)] \cdot \vec{\boldsymbol{p}}$$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\;\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$$

Let there be light

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求： $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a)$$

Let there be light

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a) \qquad \text{分部积分}$$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a) \qquad \text{分部积分}\\ &= \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}f(x)\end{aligned}$$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求： $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a) \qquad \text{分部积分}\\ &= \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}f(x)\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,f'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a) \qquad \text{分部积分}\\ &= \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}f(x)\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = -f'(a)\end{aligned}$$

对 δ 函数，从数学上看，只有其积分性质才有明确的意义。因此，对 δ 函数的导数（包括梯度），也是仅在计算其积分性质时，才有意义。

例 3. 求：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\delta(x-a) \qquad \text{分部积分}\\ &= \Big[f(x)\delta(x-a)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,\mathrm{d}f(x)\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-a)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = -f'(a)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = -f'(a)}$$

Let there be light

Let there be light

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$$

Let there be light

利用： $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{g}}f) = f(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}) + \vec{\boldsymbol{g}}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau$$

Let there be light

利用： $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{g}}f) = f(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}) + \vec{\boldsymbol{g}}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\big] - \delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\big[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

Let there be light

利用： $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{g}}f) = f(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}) + \vec{\boldsymbol{g}}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\big] - \delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\big[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\displaystyle\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol{g}}f)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot(\vec{\boldsymbol{g}}f)\,\mathrm{d}\sigma$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f)=f(\nabla\cdot\vec{g})+\vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]-\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\underbrace{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]\,\mathrm{d}\sigma}_{0}-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f) = f(\nabla\cdot\vec{g}) + \vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau \quad = \int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big] - \delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}} \nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]\,\mathrm{d}\sigma}_{0} - \int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

由于 $\vec{a}$ 点不在 $\mathcal{S}$ 面上，故，

在 $\mathcal{S}$ 面上 $\delta(\vec{r}-\vec{a}) = 0$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f)=f(\nabla\cdot\vec{g})+\vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]-\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\underbrace{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]\,\mathrm{d}\sigma}_{0}-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f) = f(\nabla\cdot\vec{g}) + \vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big] - \delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau = \int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]\,\mathrm{d}\sigma}_{0} - \int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

$$= -\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau = -\Big[\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{a}}$$

利用： $\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol g}f) = f(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol g}) + \vec{\boldsymbol g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal V}\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\,\mathrm d\tau = \int_{\mathcal V}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\,\big] - \delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\big[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\,\big]\Big\}\,\mathrm d\tau$$

利用： $\int_{\mathcal V}\nabla\cdot(\vec{\boldsymbol g}f)\,\mathrm d\tau = \int_{\mathcal S}\vec{\boldsymbol n}\cdot(\vec{\boldsymbol g}f)\,\mathrm d\sigma$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal S}\vec{\boldsymbol n}\cdot\big[\,\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\,\big]\,\mathrm d\sigma}_{0} - \int_{\mathcal V}\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\big[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\,\big]\,\mathrm d\tau$$

$$= -\int_{\mathcal V}\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\big[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\,\big]\,\mathrm d\tau = -\Big[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\Big]_{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol a}}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal V}\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\overset{\bullet}{\times}\nabla\delta(\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol a})\,\mathrm d\tau = \mp\Big[\nabla\overset{\bullet}{\times}\vec{\boldsymbol g}(\vec{\boldsymbol r})\Big]_{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol a}}}$$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f)=f(\nabla\cdot\vec{g})+\vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{V}}\left\{\nabla\cdot\left[\,\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\right]-\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\left[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\right]\right\}\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\underbrace{\int_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\left[\,\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\right]\mathrm{d}\sigma}_{0}-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\left[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\left[\,\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\right]\mathrm{d}\tau=-\Big[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}}\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\overset{\bullet}{\times}\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})\,\mathrm{d}\tau=\mp\Big[\nabla\overset{\bullet}{\times}\vec{\boldsymbol{g}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}}}$$

练习：

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}}[\nabla\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{a}})]\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\,\mathrm{d}\tau=-\Big[\nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\boldsymbol{t}}(\vec{\boldsymbol{r}})\Big]_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{a}}}}$$

利用： $\nabla\cdot(\vec{g}f)=f(\nabla\cdot\vec{g})+\vec{g}\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal{V}}\vec{g}(\vec{r})\cdot\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{V}}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]-\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\Big\}\,\mathrm{d}\tau$$

利用： $\int_{\mathcal{V}}\nabla\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot(\vec{g}f)\,\mathrm{d}\sigma$

$$=\underbrace{\int_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\big[\,\vec{g}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\big]\,\mathrm{d}\sigma}_{0}-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau$$

$$=-\int_{\mathcal{V}}\delta(\vec{r}-\vec{a})\big[\,\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\,\big]\,\mathrm{d}\tau=-\Big[\nabla\cdot\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{a}}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}}\vec{g}(\vec{r})\overset{\cdot}{\times}\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})\,\mathrm{d}\tau=\mp\Big[\nabla\overset{\cdot}{\times}\vec{g}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{a}}}$$

练习：

$$\boxed{\int_{\mathcal{V}}[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})]\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau=-\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{a}}}$$

偶极矩 $=\int_{\mathcal{V}}\rho(\vec{r})\,\vec{r}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathcal{V}}\{-[\nabla\delta(\vec{r}-\vec{a})]\cdot\underbrace{\vec{p}\,\}\,\vec{r}}_{\text{并矢}}\,\mathrm{d}\tau=\Big[\nabla\cdot(\vec{p}\,\vec{r})\Big]_{\vec{r}=\vec{a}}=\vec{p}$

利用： $\nabla\cdot(\vec g f) = f(\nabla\cdot\vec g) + \vec g\cdot(\nabla f)$

$$\int_{\mathcal V}\vec g(\vec r)\cdot\nabla\delta(\vec r-\vec a)\,\mathrm d\tau = \int_{\mathcal V}\Big\{\nabla\cdot\big[\,\vec g(\vec r)\delta(\vec r-\vec a)\,\big]-\delta(\vec r-\vec a)\big[\,\nabla\cdot\vec g(\vec r)\,\big]\Big\}\,\mathrm d\tau$$

利用： $\int_{\mathcal V}\nabla\cdot(\vec g f)\,\mathrm d\tau = \int_{\mathcal S}\vec n\cdot(\vec g f)\,\mathrm d\sigma$

$$= \underbrace{\int_{\mathcal S}\vec n\cdot\big[\,\vec g(\vec r)\delta(\vec r-\vec a)\,\big]\,\mathrm d\sigma}_{0} - \int_{\mathcal V}\delta(\vec r-\vec a)\big[\,\nabla\cdot\vec g(\vec r)\,\big]\,\mathrm d\tau$$

$$= -\int_{\mathcal V}\delta(\vec r-\vec a)\big[\,\nabla\cdot\vec g(\vec r)\,\big]\,\mathrm d\tau = -\Big[\nabla\cdot\vec g(\vec r)\Big]_{\vec r=\vec a}$$

$$\boxed{\int_{\mathcal V}\vec g(\vec r)\overset{\cdot}{\times}\nabla\delta(\vec r-\vec a)\,\mathrm d\tau = \mp\Big[\nabla\overset{\cdot}{\times}\vec g(\vec r)\Big]_{\vec r=\vec a}}$$

练习：

$$\boxed{\int_{\mathcal V}[\nabla\delta(\vec r-\vec a)]\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec r)\,\mathrm d\tau = -\Big[\nabla\cdot\overleftrightarrow{t}(\vec r)\Big]_{\vec r=\vec a}}$$

偶极矩 $= \int_{\mathcal V}\rho(\vec r)\,\vec r\,\mathrm d\tau = \int_{\mathcal V}\Big\{-\big[\nabla\delta(\vec r-\vec a)\big]\cdot\underbrace{\vec p\Big\}\vec r}_{\text{并矢}}\,\mathrm d\tau = \Big[\nabla\cdot(\vec p\,\vec r)\Big]_{\vec r=\vec a} = \vec p$

$\{\dots\}$ 内为 $\rho(\vec r)$ $\quad\nabla\cdot(\vec p\,\vec r) = (\vec p\cdot\nabla)\vec r = \vec p\cdot(\nabla\vec r) = \vec p\cdot\overleftrightarrow{I}$