§6.4 运动点电荷的场

§6.4 运动点电荷的场

上一节： 谐变电荷电流分布的辐射场 时间简单

§6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

§6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

§6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

设 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)$、$\vec{\boldsymbol{v}}_q$ 分别为 t 时刻点电荷 q 的位置和速度，空间电荷、电流密度为：

§ 6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

设 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)$、$\vec{\boldsymbol{v}}_q$ 分别为 t 时刻点电荷 q 的位置和速度，空间电荷、电流密度为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t) = q\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,], \qquad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t) = q\,\vec{\boldsymbol{v}}_q(t)\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,]$$

§6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

设 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)$、$\vec{\boldsymbol{v}}_q$ 分别为 t 时刻点电荷 q 的位置和速度，空间电荷、电流密度为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) = q\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,], \qquad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) = q\,\vec{\boldsymbol{v}}_q(t)\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,]$$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t - R/c,\ \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,',\ R = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|$$

§6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

设 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)$、$\vec{\boldsymbol{v}}_q$ 分别为 t 时刻点电荷 q 的位置和速度，空间电荷、电流密度为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t)=q\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,],\qquad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t)=q\,\vec{\boldsymbol{v}}_q(t)\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,]$$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 为

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau', &&t_r=t-R/c,\ \vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,',\ R=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|\\ &=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', &&r_q(t_r)\text{ 与 }\vec{\boldsymbol{r}}\,'\text{ 有关，因为 }t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c\end{aligned}$$

§ 6.4 运动点电荷的场

上一节：	谐变电荷电流分布的辐射场	时间简单
本节：	运动点电荷的场	空间简单

一、运动电荷的势：Lienard-Wiechert 势

设 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)$、$\vec{\boldsymbol{v}}_q$ 分别为 t 时刻点电荷 q 的位置和速度，空间电荷、电流密度为：

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t)=q\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,],\qquad \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t)=q\,\vec{\boldsymbol{v}}_q(t)\,\delta[\,\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)\,]$$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 为

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau',\qquad t_r=t-R/c,\ \vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,',\ R=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|$$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 有关，因为 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 的函数：$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')=\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{r}' - \vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{r}'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{u}(\vec{r}')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{r}'$ 的函数：$\vec{u}(\vec{r}') = \vec{r}' - \vec{r}_q(t_r)$

Let there be light

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数：$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$

仅当 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 不是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|}$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 的函数：$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,') = \vec{\boldsymbol{r}}\,' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$

仅当 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 不是 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}$

令：$u_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}\,'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数：$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$

仅当 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 不是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_0|}$

令：$u_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

变量代换：$\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \Longrightarrow \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}')]}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数：$\vec{\boldsymbol{u}}(\vec{\boldsymbol{r}}') = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$

仅当 $\vec{\boldsymbol{r}}_0$ 不是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_0)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_0|}$

令：$u_1 = \hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_2 = \hat{\boldsymbol{e}}_y\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)],\quad u_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_z\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

变量代换：$\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \Longrightarrow \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

J 为雅可比 (Jacobi) 行列式

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad r_q(t_r) \text{ 与 } \vec{r}\,' \text{ 有关，因为 } t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{u}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \delta \text{ 函数的宗量是 } \vec{r}\,' \text{ 的函数：} \vec{u}(\vec{r}\,') = \vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)$$

仅当 $\vec{r}_0$ 不是 $\vec{r}\,'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

令：$u_1 = \hat{e}_x\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)], \quad u_2 = \hat{e}_y\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)], \quad u_3 = \hat{e}_z\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$$

变量代换：$\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \Longrightarrow \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

J 为雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{r}\,'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta[\vec{u}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{r}\,'$ 的函数：$\vec{u}(\vec{r}\,') = \vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)$

仅当 $\vec{r}_0$ 不是 $\vec{r}\,'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau' = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

令：$u_1 = \hat{e}_x\cdot[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)],\quad u_2 = \hat{e}_y\cdot[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)],\quad u_3 = \hat{e}_z\cdot[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)]$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dx'\,dy'\,dz' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,J^{-1}\,du_1\,du_2\,du_3\end{aligned}$$

变量代换：$dx'\,dy'\,dz' \Longrightarrow du_1\,du_2\,du_3$

J 为雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial u_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z'}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x'} &= \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x'} \\ &= 1 - v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}\end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{r}\,'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{u}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{r}\,'$ 的函数：$\vec{u}(\vec{r}\,') = \vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)$

仅当 $\vec{r}_0$ 不是 $\vec{r}\,'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

令：$u_1 = \hat{e}_x\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)],\quad u_2 = \hat{e}_y\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)],\quad u_3 = \hat{e}_z\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3\end{aligned}$$

变量代换：$\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \Longrightarrow \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$

J 为雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z'} \\[2ex] \dfrac{\partial u_3}{\partial x'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y'} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x'} &= \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x'} \\ &= 1 - v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_r}{\partial x'} &= \frac{\partial[t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c]}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\partial x'} \\ &= \frac{1}{c}\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\alpha_x}{c},\end{aligned}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau',$$

$r_q(t_r)$ 与 $\vec{r}\,'$ 有关，因为 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta[\vec{u}(\vec{r}\,')]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau',$$

δ 函数的宗量是 $\vec{r}\,'$ 的函数：$\vec{u}(\vec{r}\,') = \vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)$

仅当 $\vec{r}_0$ 不是 $\vec{r}\,'$ 的函数时，才有 $\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\tau' = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

令：$u_1 = \hat{e}_x\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]$，　$u_2 = \hat{e}_y\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]$，　$u_3 = \hat{e}_z\cdot[\vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r)]$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dx'\,dy'\,dz'$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,J^{-1}\,du_1\,du_2\,du_3$$

变量代换：$dx'\,dy'\,dz' \Longrightarrow du_1\,du_2\,du_3$

J 为雅可比 (Jacobi) 行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x'} & \frac{\partial u_1}{\partial y'} & \frac{\partial u_1}{\partial z'} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x'} & \frac{\partial u_2}{\partial y'} & \frac{\partial u_2}{\partial z'} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x'} & \frac{\partial u_3}{\partial y'} & \frac{\partial u_3}{\partial z'} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial x'} = 1 - \frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial x'} = 1 - v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}$$

$$\frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\partial[t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c]}{\partial x'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{\partial x'} = \frac{1}{c}\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{\alpha_x}{c},\qquad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\, J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3 \\
\frac{\partial u_1}{\partial x'} &= 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c},
\end{aligned}
$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} J^{-1} \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x - x'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y - y'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x - x'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y - y'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} J^{-1} \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x - x'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y - y'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y' - y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|} J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x - x'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y - y'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y' - y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j'} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j'}\right| = 1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{cR},$$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|} J^{-1} \, \mathrm{d}u_1 \, \mathrm{d}u_2 \, \mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x - x'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y - y'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x' - x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y' - y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left| \frac{\partial u_i}{\partial x'_j} \right| = 1 - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r) \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{cR}, \quad \text{其中：} \boxed{\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1 - \frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR}, \quad \text{其中:}\ \boxed{\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'} \quad \Longrightarrow$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1 - \frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR}, \quad \text{其中：} \boxed{\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'} \quad \Longrightarrow$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{R}\,\frac{1}{J}\, \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1 - \frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR}, \quad \text{其中:} \quad \boxed{\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'} \quad \Longrightarrow$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}\right]_{\vec{u}=0}},$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1 - \frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1 - \frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1 - \frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij} - \frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1 - \frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR},$$ 其中：$\boxed{\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'}$ $\Longrightarrow$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}\right]_{\vec{u}=0}},$$

$$\vec{u} = \vec{r}\,' - \vec{r}_q(t_r) = 0$$

故：$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$
$= \vec{r} - \vec{r}_q(t_r)$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol u})}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'|} J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1-\frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1-\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1-\frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij}-\frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1-\frac{\vec{\boldsymbol v}_q(t_r)\cdot\vec{\boldsymbol R}}{cR},$$ 其中：$\boxed{\vec{\boldsymbol R}=\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'}$ $\Longrightarrow$

$$\varphi(\vec{\boldsymbol r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R-\dfrac{\vec{\boldsymbol v}_q\cdot\vec{\boldsymbol R}}{c}\right]_{\vec{\boldsymbol u}=0}},$$

$$\vec{\boldsymbol u} = \vec{\boldsymbol r}'-\vec{\boldsymbol r}_q(t_r) = 0$$

故：$\vec{\boldsymbol R} = \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}' = \vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}_q(t_r)$

类似可得

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} = 1-\frac{\alpha_x v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'} = \frac{\alpha_x}{c}, \qquad \alpha_x = \frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \qquad \alpha_y = \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'} = \frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'} = -\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'} = -\frac{\alpha_y v_{qx}}{c}, \qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'} = \frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'} = -\frac{\alpha_x v_{qy}}{c}, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'} = \frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'} = 1-\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'} = 1-\frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j} = \delta_{ij}-\frac{v_{qi}\alpha_j}{c}, \qquad J = \left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right| = 1-\frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR},$$ 其中：$\boxed{\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,'}$ $\Longrightarrow$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}\right]_{\vec{u}=0}},$$

$$\vec{u} = \vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r) = 0$$

故：$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}\,' = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$

类似可得

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{q\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{v}_q(t_r)\delta[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'}=1-\frac{\alpha_x v_{qx}}{c},\qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'}=\frac{\alpha_x}{c},\qquad \alpha_x=\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\qquad \alpha_y=\frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'}=\frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'}=-\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'}=-v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'}=-\frac{\alpha_y v_{qx}}{c},\qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'}=\frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'}=-\frac{\alpha_x v_{qy}}{c},\qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'}=\frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'}=1-\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'}=1-\frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}=\delta_{ij}-\frac{v_{qi}\alpha_j}{c},\qquad J=\left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right|=1-\frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR},\quad \text{其中：}\ \boxed{\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'}\quad\Longrightarrow$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}\right]_{\vec{u}=0}},$$

$$\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$$

故：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$
$=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$

类似可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\mathrm{d}\tau'=\frac{q\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{v}_q(t_r)\delta[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

Lienard-Wiechert 势：
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}\qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)\qquad \vec{v}_q=\vec{v}_q(t_r)\qquad t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'}=1-\frac{\alpha_x v_{qx}}{c},\qquad \frac{\partial t_r}{\partial x'}=\frac{\alpha_x}{c},\qquad \alpha_x=\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\qquad \alpha_y=\frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y'}=\frac{\partial[x'-x_q(t_r)]}{\partial y'}=-\frac{\partial x_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'}=-v_{qx}(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial y'}=-\frac{\alpha_y v_{qx}}{c},\qquad \frac{\partial t_r}{\partial y'}=\frac{\alpha_y}{c}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x'}=-\frac{\alpha_x v_{qy}}{c},\qquad \frac{\partial u_2}{\partial y'}=\frac{\partial[y'-y_q(t_r)]}{\partial y'}=1-\frac{\partial y_q(t_r)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial y'}=1-\frac{\alpha_y v_{qy}}{c},$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}=\delta_{ij}-\frac{v_{qi}\alpha_j}{c},\qquad J=\left|\frac{\partial u_i}{\partial x'_j}\right|=1-\frac{\vec{v}_q(t_r)\cdot\vec{R}}{cR},\quad \text{其中：}\ \boxed{\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'}\quad\Longrightarrow$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}\frac{1}{J}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left[R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}\right]_{\vec{u}=0}},$$

$$\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$$

故：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'$
$=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$

类似可得

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'=\frac{q\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{v}_q(t_r)\delta[\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)]}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

Lienard-Wiechert 势：
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}\qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)\qquad \vec{v}_q=\vec{v}_q(t_r)\qquad t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c$$

讨论

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R}\, J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$，(注意 t_r 本身还是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数)

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$， (注意 t_r 本身还是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R} J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3 = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) = 0$ 只有一个单重根 $\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$，(注意 t_r 本身还是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) = 0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

(2) 真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R} J^{-1}\, \mathrm{d}u_1\, \mathrm{d}u_2\, \mathrm{d}u_3 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) = 0$ 只有一个单重根 $\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$，(注意 t_r 本身还是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

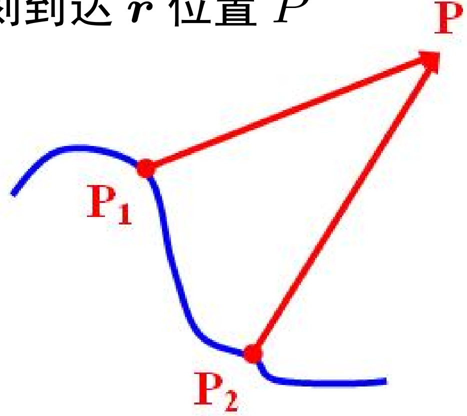
因此可以证明 $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{r}}' - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) = 0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

(2) 真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 位置 P



讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}\,J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$，　(注意 t_r 本身还是 $\vec{r}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

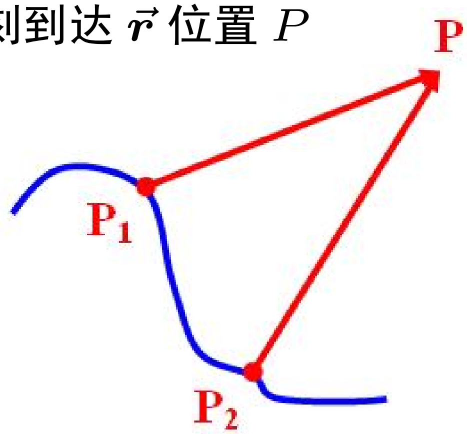
(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：



讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$，　(注意 t_r 本身还是 $\vec{r}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

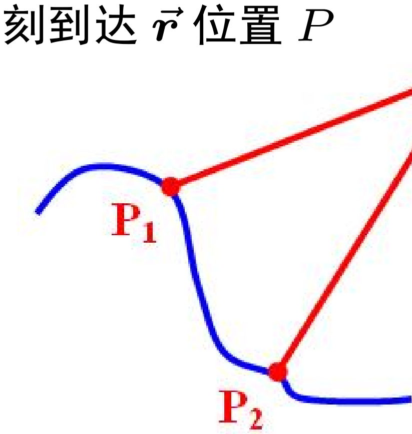
真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：

$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$



讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}\,'=\vec{r}_q(t_r)$，　(注意 t_r 本身还是 $\vec{r}\,'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

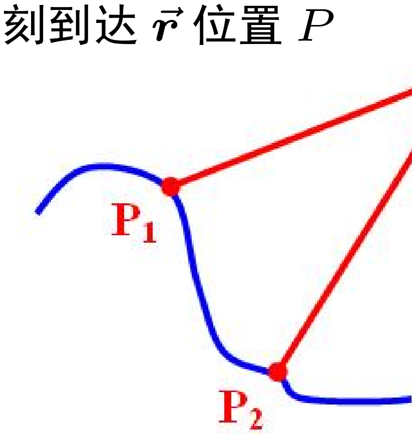
但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：

$$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$$

$$\Longrightarrow\quad PP_1-PP_2=c(t_2'-t_1')$$



讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$， (注意 t_r 本身还是 $\vec{r}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

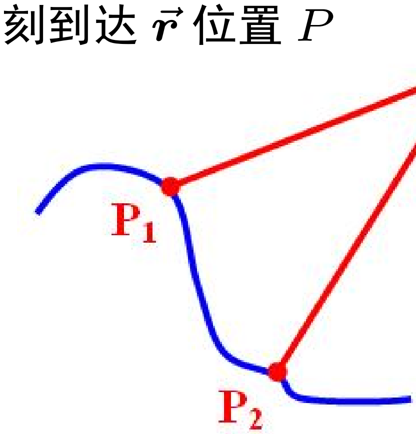
(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：



$$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$$

$$\Longrightarrow\ PP_1-PP_2=c(t_2'-t_1')$$

$$\Longrightarrow\ P_2P_1>|PP_1-PP_2|=c|t_2'-t_1'|$$

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{u})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}\,'=\vec{r}_q(t_r)$， (注意 t_r 本身还是 $\vec{r}\,'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}\,'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

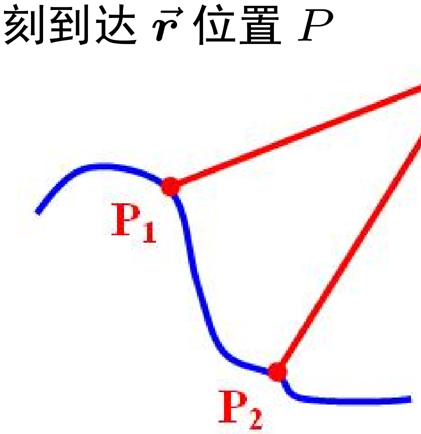
(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：



$$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$$

$$\Longrightarrow\ PP_1-PP_2=c(t_2'-t_1')$$

$$\Longrightarrow\ P_2P_1>|PP_1-PP_2|=c|t_2'-t_1'|$$

$$\Longrightarrow\ \langle v_q\rangle=\frac{P_1P_2}{|t_2'-t_1'|}>c\ \Longrightarrow$$ 粒子平均运动速度大于真空中的光速。

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\delta(\vec{u})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$， (注意 t_r 本身还是 $\vec{r}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{u}=\vec{r}'-\vec{r}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

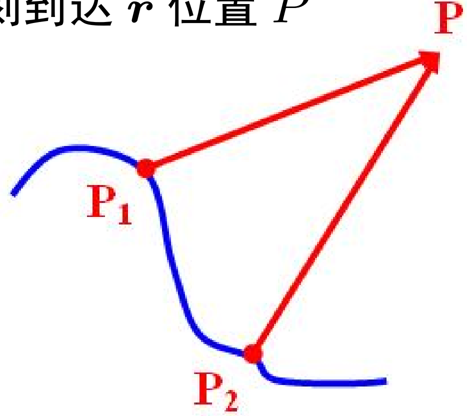
(2) 真空中任意位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{r}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{r}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{r}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{r}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：



$$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$$

$$\Longrightarrow\ PP_1-PP_2=c(t_2'-t_1')$$

$$\Longrightarrow\ P_2P_1>|PP_1-PP_2|=c|t_2'-t_1'|$$

$$\Longrightarrow\ \langle v_q\rangle=\frac{P_1P_2}{|t_2'-t_1'|}>c\ \Longrightarrow$$ 粒子平均运动速度大于真空中的光速。不可能

讨论

(1) 实际上，$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\delta(\vec{\boldsymbol{u}})}{R}J^{-1}\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$ 隐含了一个条件

即：$\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=0$ 只有一个单重根 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$， (注意 t_r 本身还是 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 的函数)

(2) 将证明：真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

因此可以证明 $\vec{\boldsymbol{u}}=\vec{\boldsymbol{r}}'-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=0$ 确实只有一个单重根。（若非单重根，如何？）

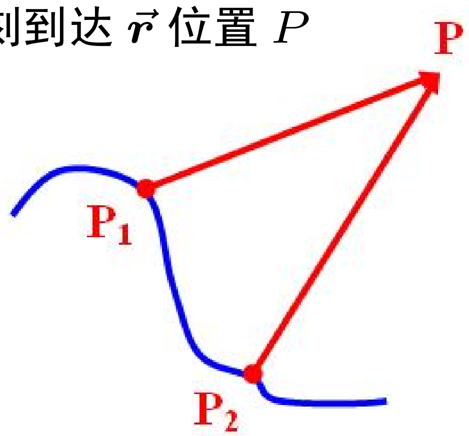
(2) 真空中任意位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势是由点电荷在较早的 **一个** 时刻所激发

真空中任意一位置 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 在任意时刻 t 的势，显然是由运动点电荷在较早的时刻 t' 所激发

但，是否会有以下情况：点电荷在 t_1' 时刻处在 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_1')$ 位置 P_1 所激发的势

和另一个时刻 t_2' 处在 $\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_2')$ 位置 P_2 所激发的势同时在 t 时刻到达 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 位置 P

假设出现这种情况，如图则有：



$$c(t-t_1')=PP_1,\quad c(t-t_2')=PP_2$$

$$\Longrightarrow\quad PP_1-PP_2=c(t_2'-t_1')$$

$$\Longrightarrow\quad P_2P_1>|PP_1-PP_2|=c|t_2'-t_1'|$$

$$\Longrightarrow\quad \langle v_q\rangle=\frac{P_1P_2}{|t_2'-t_1'|}>c\quad\Longrightarrow$$ 粒子平均运动速度大于真空中的光速。不可能

思考： 但在介质中，光速为 c/n，粒子速度可能大于光速，会出现什么现象？

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

(3) 似乎更物理的推导

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{因为是点电荷，故只有在 } \vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) \text{ 时 } \rho \text{ 才不为零}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{这时 } |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| \text{ 是 } \vec{\boldsymbol{r}}, t \text{ 的函数}$$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}, t$ 的函数

问题：$\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau' \stackrel{?}{=} q$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}\,' = \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}}, t$ 的函数

问题：$\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$

对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 无关，确有：$\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_0)\,\mathrm{d}\tau' = q$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c$ 依赖于 $\vec{r}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 有关。

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$　　对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 有关。

q' 的物理意义：

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}'=\vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r}, t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c$ 依赖于 $\vec{r}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{r}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{r}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}' = \vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int \rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$ 这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r},t$ 的函数

问题：$\int \rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}'$ 无关，确有：$\int \rho(\vec{r}',t_0)\,\mathrm{d}\tau' = q$

对运动电荷 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$ 依赖于 $\vec{r}'$，从而 $\boxed{\int \rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau' = q'} \neq q$

q' 可能与 $\vec{r}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{r}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷

让球面以光速 c 收缩，

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$　　对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷

让球面以光速 c 收缩，显然，在 t 时刻，球面收缩为 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处的一点。

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}\,'=\vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$ 这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}\,'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{r}\,',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ 依赖于 $\vec{r}\,'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{r}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{r}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷

让球面以光速 c 收缩，显然，在 t 时刻，球面收缩为 $\vec{r}$ 处的一点。

q' 的物理意义：

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

因为是点电荷，故只有在 $\vec{\boldsymbol{r}}'=\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

这时 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$ 是 $\vec{\boldsymbol{r}},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'\overset{?}{=}q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷让球面以光速 c 收缩，显然，在 t 时刻，球面收缩为 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处的一点。

q' 的物理意义： —— 从推迟势的物理来理解：

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}\,' = \vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int \rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$ 这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r}, t$ 的函数

问题：$\int \rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$　　对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}\,'$ 无关，确有：$\int \rho(\vec{r}\,',t_0)\,\mathrm{d}\tau' = q$

对运动电荷 $t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ 依赖于 $\vec{r}\,'$，从而 $\boxed{\int \rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau' = q'} \neq q$

q' 可能与 $\vec{r}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{r}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷

让球面以光速 c 收缩，显然，在 t 时刻，球面收缩为 $\vec{r}$ 处的一点。

q' 的物理意义：　—— 从推迟势的物理来理解：

如球面在收缩过程中与某些电荷分布相交（或称扫过某些电荷分布），

那么与球面相交的（即被球面扫过的）那部分电荷所激发的势将

在 t 时刻与球面同时（一起）到达 $\vec{r}$，因为势的传播速度也为 c。

(3) 似乎更物理的推导

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$ 因为是点电荷，故只有在 $\vec{r}\,'=\vec{r}_q(t_r)$ 时 ρ 才不为零

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$ 这时 $|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 是 $\vec{r},t$ 的函数

问题：$\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau' \overset{?}{=} q$ 对静止电荷或 t_0 与 $\vec{r}\,'$ 无关，确有：$\int\rho(\vec{r}\,',t_0)\,\mathrm{d}\tau'=q$

对运动电荷 $t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$ 依赖于 $\vec{r}\,'$，从而 $\boxed{\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'}\neq q$

q' 可能与 $\vec{r}$, t 有关。

q' 的物理意义：以 $\vec{r}$ 为球心，在 $t-T$ 时刻，作一半径为 cT 的球面，使球面外无电荷让球面以光速 c 收缩，显然，在 t 时刻，球面收缩为 $\vec{r}$ 处的一点。

q' 的物理意义： —— 从推迟势的物理来理解：

如球面在收缩过程中与某些电荷分布相交（或称扫过某些电荷分布），

那么与球面相交的（即被球面扫过的）那部分电荷所激发的势将

在 t 时刻与球面同时（一起）到达 $\vec{r}$，因为势的传播速度也为 c。 也就是说，

只有在球面收缩过程中，被球面扫过的那些电荷分布所激发的势才对 $\varphi(\vec{r},t)$ 有贡献。

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量。

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{R}$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$，$\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|$。

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c}=t-t'$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \implies t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \quad\Longrightarrow\quad t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \quad \Longrightarrow \quad t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau'$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \implies t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c} = t_r$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \quad \Longrightarrow \quad t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c} = t_r \quad \Longrightarrow \quad Q = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau' = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau' = q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

(3)　似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义：　—— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \quad\Longrightarrow\quad t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\, \mathrm{d}\tau'$

由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c} = t_r \quad\Longrightarrow\quad Q = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\, \mathrm{d}\tau' = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau' = q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q' = q$。

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c}=t-t' \quad\Longrightarrow\quad t'=t-\dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q=\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t'=t-\dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}=t_r \quad\Longrightarrow\quad Q=\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')\,\mathrm{d}\tau'=\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q'=q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \implies t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c} = t_r \implies Q = \displaystyle\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\,\mathrm{d}\tau' = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau' = q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q' = q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？可作简化：

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义：—— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a = |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \implies t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\, \mathrm{d}\tau'$

由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c} = t_r \implies Q = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t')\, \mathrm{d}\tau' = \int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau' = q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q' = q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？可作简化：

(a) 因为点电荷尺度很小，故可将球面视为一平面

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')$ 相交于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$，$\vec{\boldsymbol{r}}'$ 到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 的距离 $a=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{\boldsymbol{r}}$，故 $\dfrac{a}{c}=t-t' \implies t'=t-\dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q=\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t'=t-\dfrac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}=t_r \implies Q=\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t')\,\mathrm{d}\tau'=\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q'=q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？可作简化：

(a) 因为点电荷尺度很小，故可将球面视为一平面

(b) 点电荷视为长度为 L 的电荷棒（最后让 $L\to 0$）

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{r}',t')$ 相交于 $\vec{r}'$，$\vec{r}'$ 到球心 $\vec{r}$ 的距离 $a=|\vec{r}-\vec{r}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{r}$，故 $\dfrac{a}{c}=t-t' \implies t'=t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q=\int\rho(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}\tau'$

由于 $t'=t-\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}=t_r \implies Q=\int\rho(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}\tau'=\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

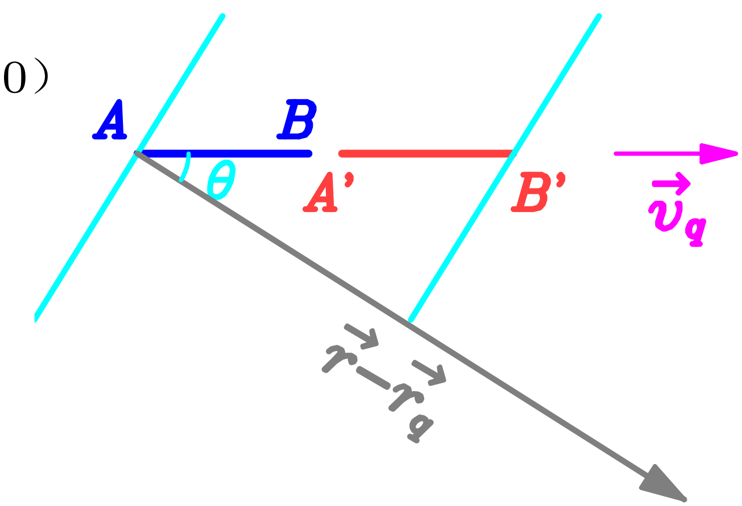
当电荷静止时，$q'=q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？可作简化：

(a) 因为点电荷尺度很小，故可将球面视为一平面

(b) 点电荷视为长度为 L 的电荷棒（最后让 $L\to 0$）

设 t_1 时刻球面扫到电荷棒的 A 端

t_2 时刻球面扫到电荷棒的 B' 端



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{r}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

q' 的物理意义： —— 从电量来理解：

设在 t' 时刻，球面与电荷分布 $\rho(\vec{r}', t')$ 相交于 $\vec{r}'$，$\vec{r}'$ 到球心 $\vec{r}$ 的距离 $a = |\vec{r} - \vec{r}'|$。

由于球面以光速收缩并在 t 时刻收缩到球心 $\vec{r}$，故 $\dfrac{a}{c} = t - t' \quad \Longrightarrow \quad t' = t - \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$

球面收缩过程中，与球面相交(被球面扫过)的电荷分布之总电量为 $Q = \int \rho(\vec{r}', t')\,\mathrm{d}\tau'$

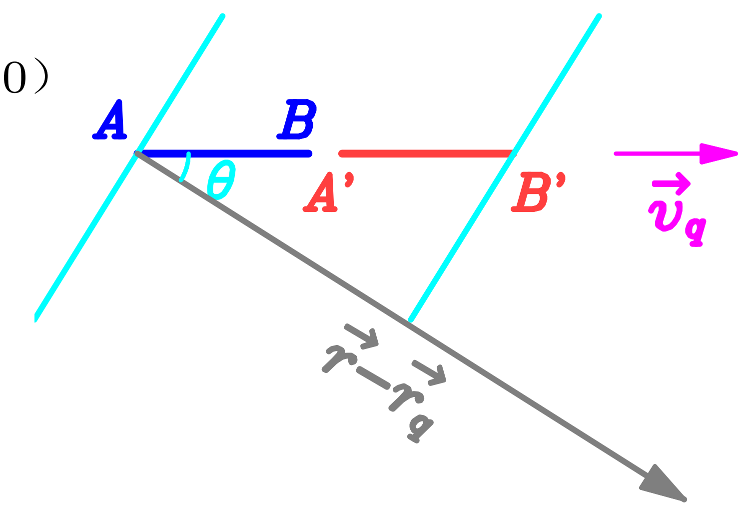
由于 $t' = t - \dfrac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = t_r \quad \Longrightarrow \quad Q = \int \rho(\vec{r}', t')\,\mathrm{d}\tau' = \int \rho(\vec{r}', t_r)\,\mathrm{d}\tau' = q'$

因此，q' 应该就是球面收缩过程中，球面所扫过的电量 Q。

当电荷静止时，$q' = q$。对于运动的点电荷，如何计算 q'？可作简化：

(a) 因为点电荷尺度很小，故可将球面视为一平面

(b) 点电荷视为长度为 L 的电荷棒（最后让 $L \to 0$）

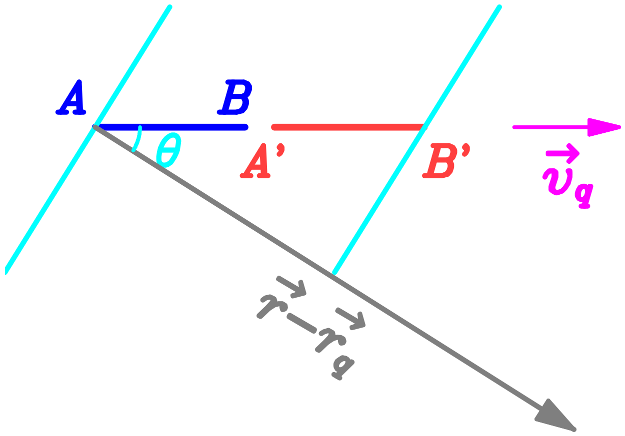


设 t_1 时刻球面扫到电荷棒的 A 端

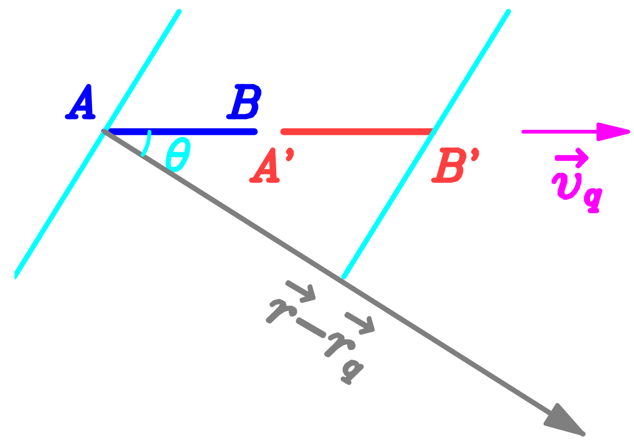
t_2 时刻球面扫到电荷棒的 B' 端

显然在 t_1 到 t_2 时间内球面始终扫到电荷棒

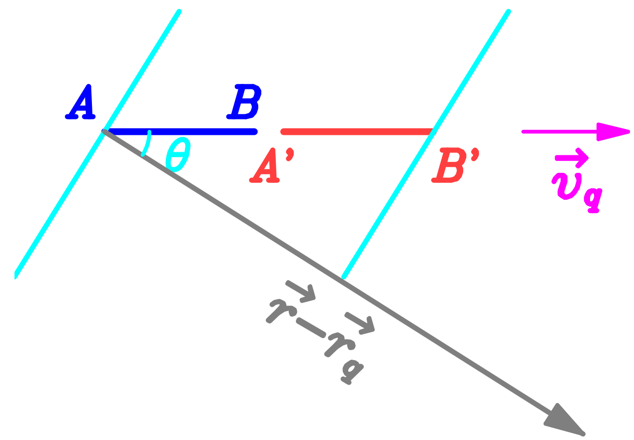
因为棒在运动：$BB' = AA' = (t_2 - t_1)v_q$


A
B
θ
A'
B'
$\vec{v}_q$
$\vec{r}-\vec{r}_q$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}$

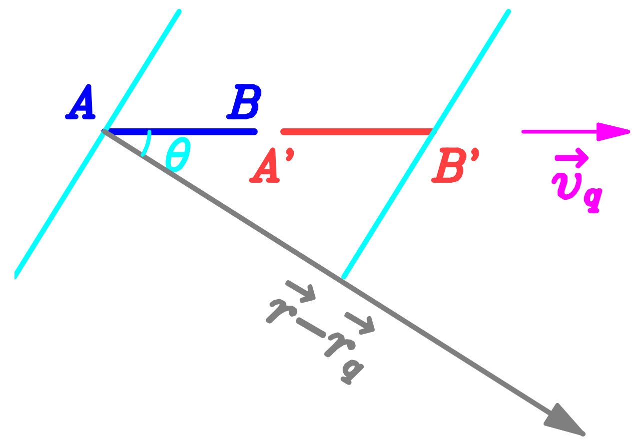


(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$



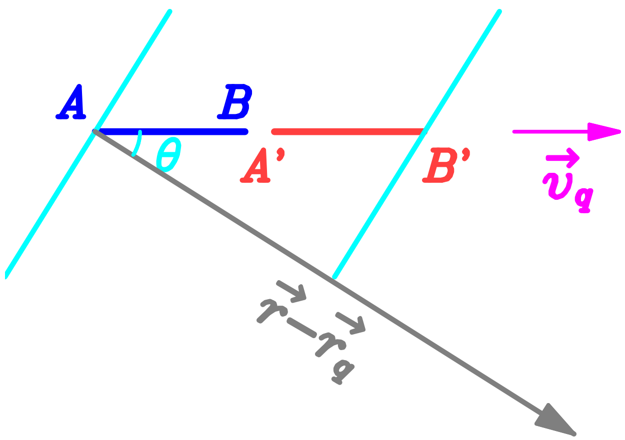
(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1) v_q$$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

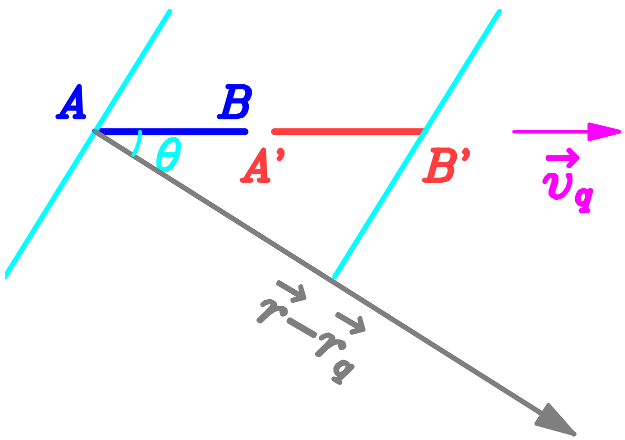
$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1)v_q \qquad AB' \cos\theta = c(t_2 - t_1)$$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

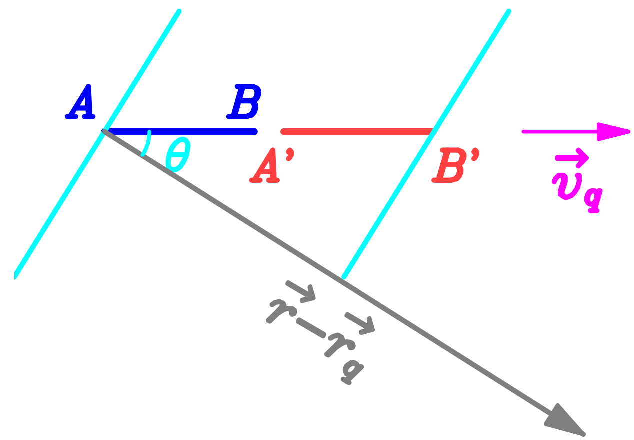
消去 (t_2-t_1)



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{r}\,', t_r)\, \mathrm{d}\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1)v_q \qquad AB' \cos\theta = c(t_2 - t_1)$$

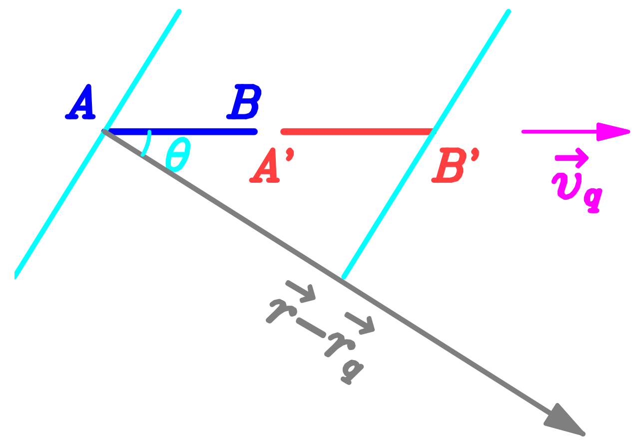
消去 $(t_2 - t_1)$ $\Longrightarrow$ $L' = \dfrac{L}{1 - \dfrac{v_q \cos\theta}{c}}$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1)v_q \qquad AB' \cos\theta = c(t_2 - t_1)$$

消去 $(t_2 - t_1)$ $\Longrightarrow$ $L' = \dfrac{L}{1 - \dfrac{v_q \cos\theta}{c}} = \dfrac{L}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q)}{c|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q|}}$

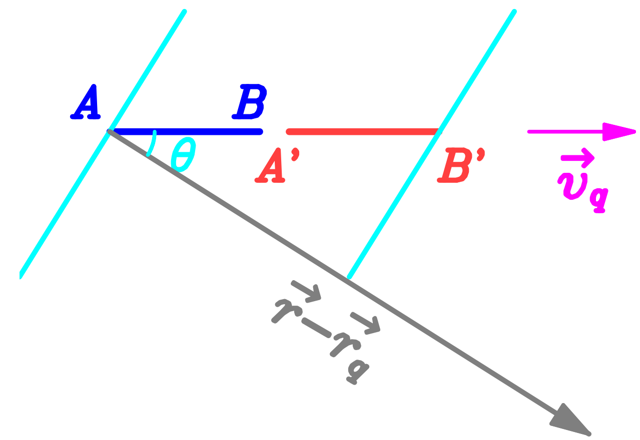


(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

消去 (t_2-t_1) $\Longrightarrow$ $L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q



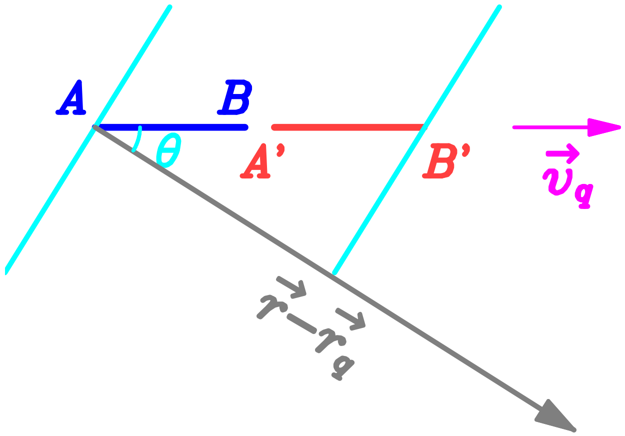
(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

消去 (t_2-t_1) $\quad\Longrightarrow\quad L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q'=(L'/L)q$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

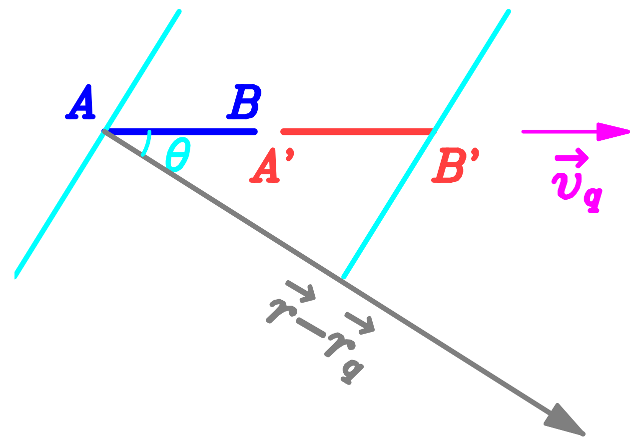
$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta = c(t_2 - t_1)$$

消去 $(t_2 - t_1) \quad \Longrightarrow \quad L' = \dfrac{L}{1 - \dfrac{v_q\cos\theta}{c}} = \dfrac{L}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q)}{c|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q' = (L'/L)q$

$$q' = \frac{L'}{L}q = \frac{q}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q)}{c|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q|}}$$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

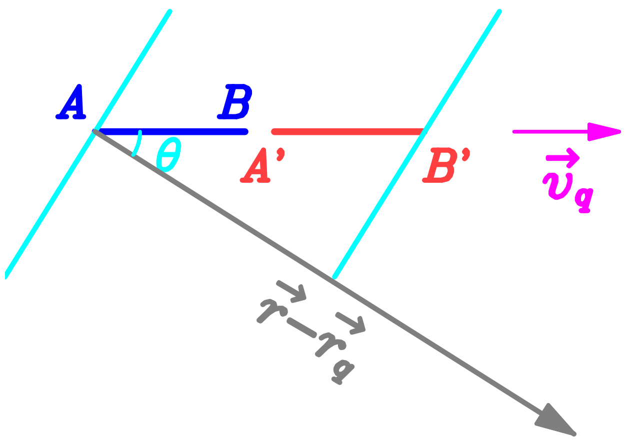
消去 (t_2-t_1) $\Longrightarrow$ $L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q'=(L'/L)q$

$$q'=\frac{L'}{L}q=\frac{q}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}$$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{\int \rho(\vec{r}', t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \dfrac{q'}{R}$

$$AB' = L' = AB + BB' = L + (t_2 - t_1)v_q \qquad AB' \cos\theta = c(t_2 - t_1)$$

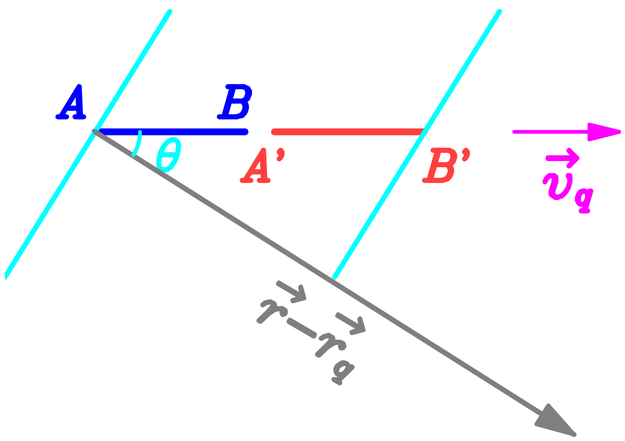
消去 $(t_2 - t_1)$ $\implies$ $L' = \dfrac{L}{1 - \dfrac{v_q \cos\theta}{c}} = \dfrac{L}{1 - \dfrac{\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)}{c|\vec{r} - \vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q' = (L'/L)q$

$$q' = \frac{L'}{L} q = \frac{q}{1 - \dfrac{\vec{v}_q \cdot (\vec{r} - \vec{r}_q)}{c|\vec{r} - \vec{r}_q|}}$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{r}_q(t_r)|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q \cdot \vec{R}}{c}}$$



(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\displaystyle\int\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

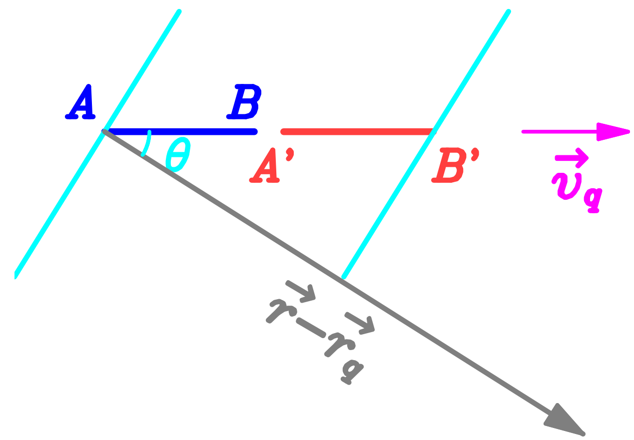
$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

消去 (t_2-t_1) $\quad\Longrightarrow\quad L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q)}{c|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q'=(L'/L)q$

$$q'=\frac{L'}{L}q=\frac{q}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q)}{c|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q|}}$$



$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}$$
$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$$

同理

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}',t_r)\,d\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

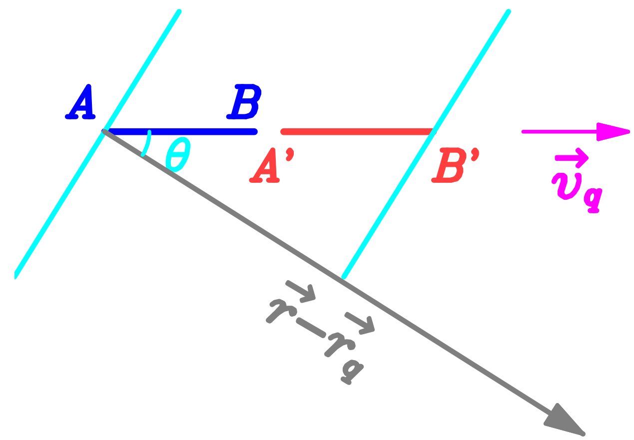
$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

消去 (t_2-t_1) $\Longrightarrow$ $L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q'=(L'/L)q$

$$q'=\frac{L'}{L}q=\frac{q}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$$



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

同理 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q\,\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$

(3) 似乎更物理的推导 (续)：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\int\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q'}{R}$

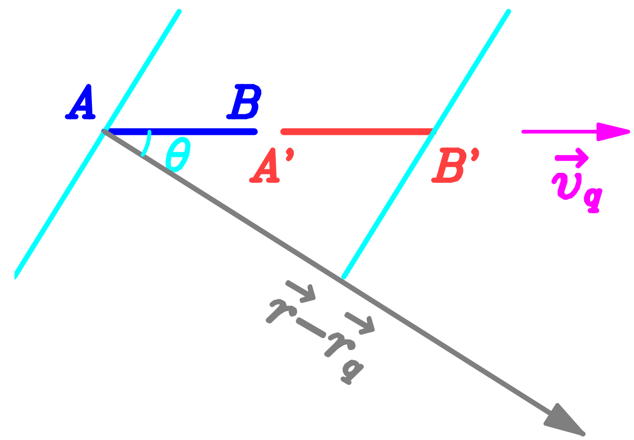
$$AB'=L'=AB+BB'=L+(t_2-t_1)v_q \qquad AB'\cos\theta=c(t_2-t_1)$$

消去 (t_2-t_1) $\Longrightarrow$ $L'=\dfrac{L}{1-\dfrac{v_q\cos\theta}{c}}=\dfrac{L}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$

如果棒静止，则球面将在有电荷分布处扫过 L，对应于球面扫过电量 q

现在棒运动，则球面将在有电荷分布处扫过 L'，对应于球面扫过电量 $q'=(L'/L)q$

$$q'=\frac{L'}{L}q=\frac{q}{1-\dfrac{\vec{v}_q\cdot(\vec{r}-\vec{r}_q)}{c|\vec{r}-\vec{r}_q|}}$$



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

同理 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q\,\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$

注意其中 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)$，$t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$
若需将势表为 $\vec{r}$，t 的显函数，应从 $\vec{r}_q(t_r)|$ 出发，
利用 $t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|$ 先将 t_r 化为 $\vec{r}$，t 的显函数

例 1：队列点名问题

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数：

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)=\vec{\boldsymbol{v}}t$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)=\vec{\boldsymbol{v}}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{c}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)=\vec{\boldsymbol{v}}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{c}\Rightarrow R=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t_r|=c(t-t_r)$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R=|\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2 t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2 t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v^2}$$

正负号的选择：

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r = t \pm \dfrac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c}\ \Rightarrow R=|\vec{r}-\vec{v}t_r|=c(t-t_r)\ \Rightarrow r^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r=t\pm\dfrac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r = t \pm \frac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$t_r = \dfrac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) - \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$ —— $\vec{r}$，t 的显函数

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r = t \pm \frac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) - \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$，t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$，t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c}\ \Rightarrow\ R=|\vec{r}-\vec{v}t_r|=c(t-t_r)\ \Rightarrow\ r^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r=t\pm\dfrac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$t_r=\dfrac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$ —— $\vec{r}$，t 的显函数

$$R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{\boldsymbol{r}}_q(t)=\vec{\boldsymbol{v}}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{c}\Rightarrow R=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t_r|=c(t-t_r)\Rightarrow r^2-2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{\boldsymbol{v}}=0$ 时，$t_r=t\pm\frac{r}{c}$，而 $\vec{\boldsymbol{v}}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$t_r=\dfrac{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})-\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$ —— $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数

$$R-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t_r)}{c}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R=|\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r = t\pm\frac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = (t-t_r)c - \frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c} = (t-t_r)c - \frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{v}\,t_r)}{c}$$

$$= \frac{1}{c}[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-(c^2-v^2)t_r]$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c}\ \Rightarrow R=|\vec{r}-\vec{v}t_r|=c(t-t_r)\ \Rightarrow r^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r=t\pm\dfrac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{v}\,t_r)}{c}$$

$$=\frac{1}{c}[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-(c^2-v^2)t_r]=\frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数：　简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c}\ \Rightarrow\ R=|\vec{r}-\vec{v}t_r|=c(t-t_r)\ \Rightarrow\ r^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r=t\pm\frac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$t_r=\dfrac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{v}\,t_r)}{c}$$

$$=\frac{1}{c}[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-(c^2-v^2)t_r]=\frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c} \Rightarrow R = |\vec{r}-\vec{v}t_r| = c(t-t_r) \Rightarrow r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r + v^2t_r^2 = c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) \pm \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r = t \pm \frac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$$t_r = \frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v}) - \sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = (t-t_r)c - \frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c} = (t-t_r)c - \frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{v}\,t_r)}{c}$$

$$= \frac{1}{c}[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-(c^2-v^2)t_r] = \frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$

例 1：队列点名问题

例 2：匀速运动点电荷的势 —— 写成“同时量”形式（表为 $\vec{r}$, t 的函数）

t_r 化成 $\vec{r}$, t 的函数： 简单起见，设 $t=0$ 时电荷在坐标原点，粒子运动轨迹：$\vec{r}_q(t)=\vec{v}t$

$$t_r=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{c}\Rightarrow R=|\vec{r}-\vec{v}t_r|=c(t-t_r)\Rightarrow r^2-2\vec{r}\cdot\vec{v}t_r+v^2t_r^2=c^2(t-t_r)^2$$

$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})\pm\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$

正负号的选择：当 $\vec{v}=0$ 时，$t_r=t\pm\dfrac{r}{c}$，而 $\vec{v}=0$ 对应于电荷固定在原点，负号对应于推迟势

故：$$t_r=\frac{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}{c^2-v^2}$$ —— $\vec{r}$, t 的显函数

$$R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{c}=(t-t_r)c-\frac{\vec{v}\cdot(\vec{r}-\vec{v}\,t_r)}{c}$$

$$=\frac{1}{c}[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})-(c^2-v^2)t_r]=\frac{1}{c}\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\,\vec{v}_q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\vec{v}}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2 t - \vec{\boldsymbol{r}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2)}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$

展开

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$\begin{aligned}I&=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\\&=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}t+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2\end{aligned}$$

展开

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}t+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$ 消去 $\vec{\boldsymbol{v}}t$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 展开化简

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I = (c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$= c^2r^2 - r^2v^2 + c^2(vt)^2 - 2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t + (\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}} = \vec{r} - \vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$= c^2r^2 - r^2v^2 + c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2 - 2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}}) + (\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 展开化简

$$= (\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - r^2v^2 + c^2\mathscr{R}^2$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$\begin{aligned}
I &= (c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2) && \text{展开}\\
&= c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t \text{ 消去 } \vec{v}t\\
&= c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2 && \text{展开化简}\\
&= (\vec{r}\cdot\vec{v})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t \text{ 消去 } \vec{r}
\end{aligned}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$\begin{aligned}
I&=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2) && \text{展开}\\
&=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}t+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t \text{ 消去 } \vec{\boldsymbol{v}}t\\
&=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2 && \text{展开化简}\\
&=(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t \text{ 消去 } \vec{\boldsymbol{r}}\\
&=\left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{\boldsymbol{v}}\,t)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{\boldsymbol{v}}\,t)^2\,v^2+c^2\mathscr{R}^2
\end{aligned}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}t+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$ 消去 $\vec{\boldsymbol{v}}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{\boldsymbol{r}}\cdot(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2$$ 展开化简

$$=(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$ 消去 $\vec{\boldsymbol{r}}$

$$=\left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{\boldsymbol{v}}\,t)\cdot\vec{\boldsymbol{v}}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{\boldsymbol{v}}\,t)^2\,v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 展开化简

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 展开化简

$$=(\vec{r}\cdot\vec{v})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{r}$

$$=\left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)\cdot\vec{v}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)^2\,v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 展开化简

$$=(\vec{\mathscr{R}}\cdot\vec{v})^2-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$\begin{aligned}
I &= (c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2) && \text{展开}\\
&= c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t \text{ 消去 } \vec{v}t\\
&= c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2 && \text{展开化简}\\
&= (\vec{r}\cdot\vec{v})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2 && \text{利用 } \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t \text{ 消去 } \vec{r}\\
&= \left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)\cdot\vec{v}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)^2v^2+c^2\mathscr{R}^2 && \text{展开化简}\\
&= (\vec{\mathscr{R}}\cdot\vec{v})^2-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2=\mathscr{R}^2v^2\cos^2\theta-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2
\end{aligned}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 展开化简

$$=(\vec{r}\cdot\vec{v})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{r}$

$$=\left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)\cdot\vec{v}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 展开化简

$$=(\vec{\mathscr{R}}\cdot\vec{v})^2-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2=\mathscr{R}^2v^2\cos^2\theta-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$

$$=c^2\mathscr{R}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}I&=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\\&=c^2\mathscr{R}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\end{aligned}}$$

例 3：化简匀速运动电荷点电荷的势

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{I}}$$

$$I=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)$$ 展开

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(vt)^2-2c^2\vec{r}\cdot\vec{v}t+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{v}t$

$$=c^2r^2-r^2v^2+c^2(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})^2-2c^2\vec{r}\cdot(\vec{r}-\vec{\mathscr{R}})+(\vec{r}\cdot\vec{v})^2$$ 展开化简

$$=(\vec{r}\cdot\vec{v})^2-r^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 利用 $\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$ 消去 $\vec{r}$

$$=\left[(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)\cdot\vec{v}\right]^2-(\vec{\mathscr{R}}+\vec{v}\,t)^2\,v^2+c^2\mathscr{R}^2$$ 展开化简

$$=(\vec{\mathscr{R}}\cdot\vec{v})^2-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2=\mathscr{R}^2v^2\cos^2\theta-\mathscr{R}^2v^2+c^2\mathscr{R}^2$$

$$=c^2\mathscr{R}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}I&=(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2-v^2)(r^2-c^2t^2)\\&=c^2\mathscr{R}^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\end{aligned}}$$

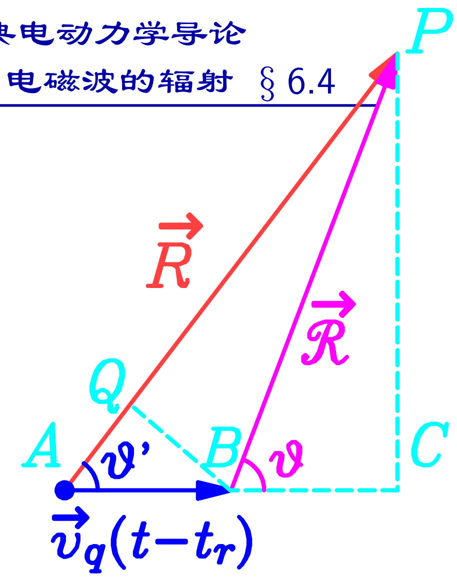
从而：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}$,

$\vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}\,t$ $\quad\mathscr{R}=|\vec{r}-\vec{v}\,t|$

$\vec{R}=\vec{r}-\vec{v}\,t_r$ $\quad R=|\vec{r}-\vec{v}\,t_r|$

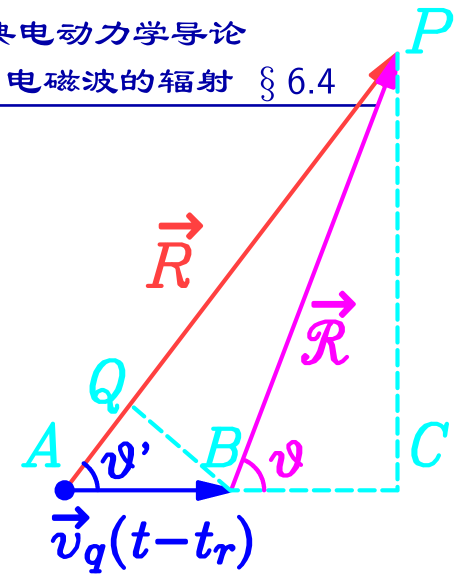
例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像

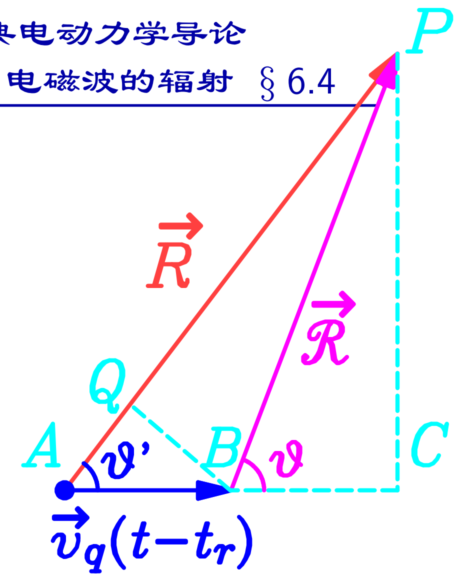


例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$



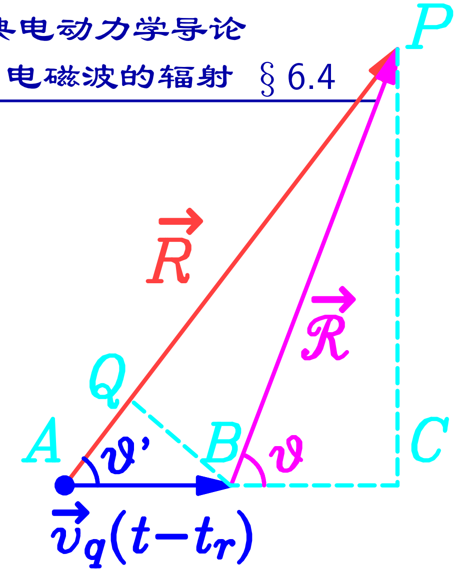
例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像

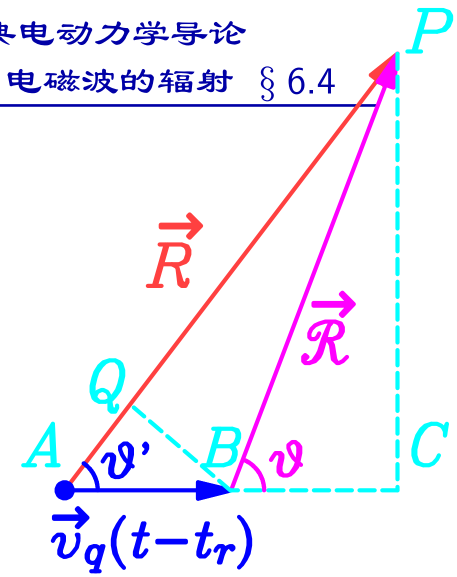


$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



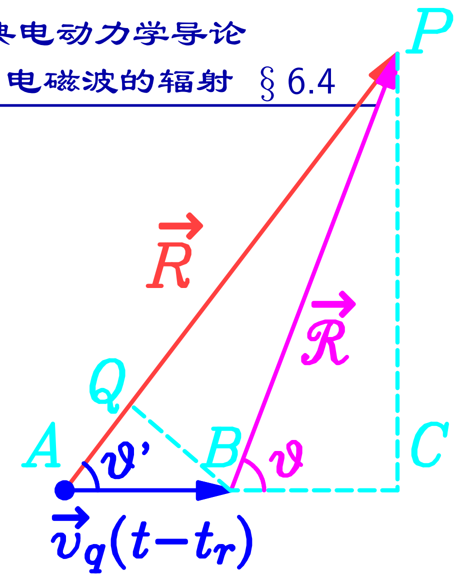
$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



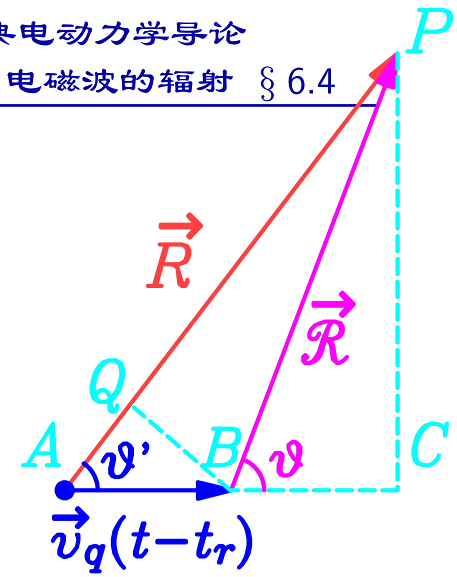
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



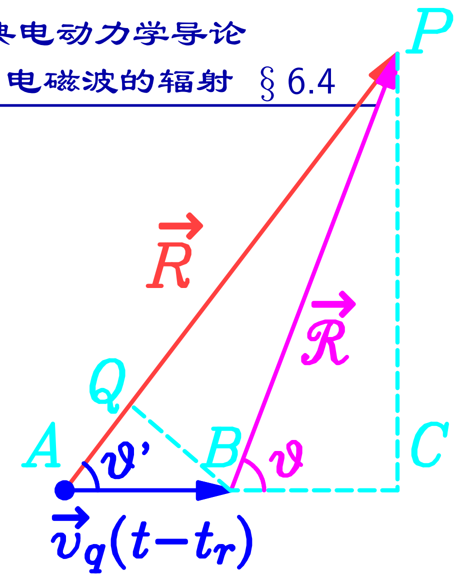
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



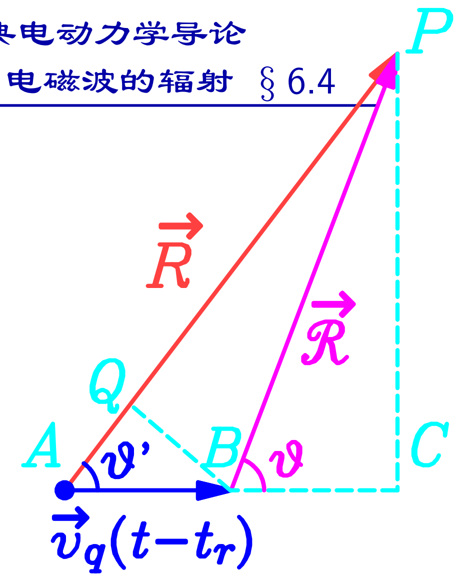
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



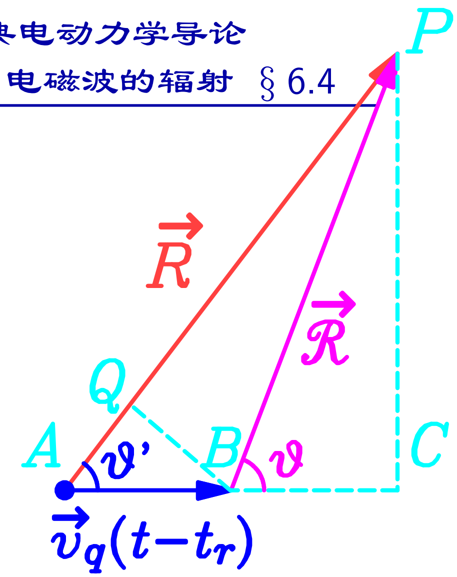
$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

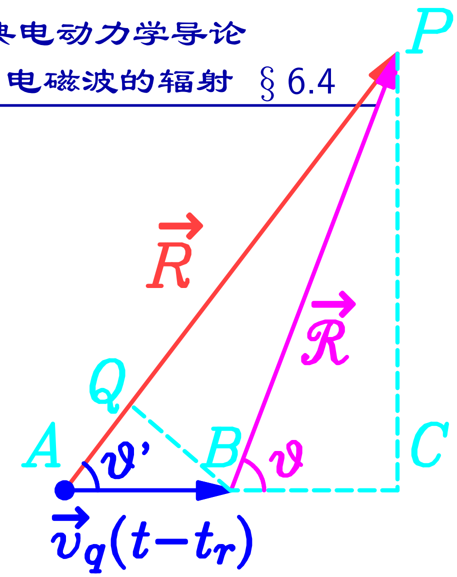
几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

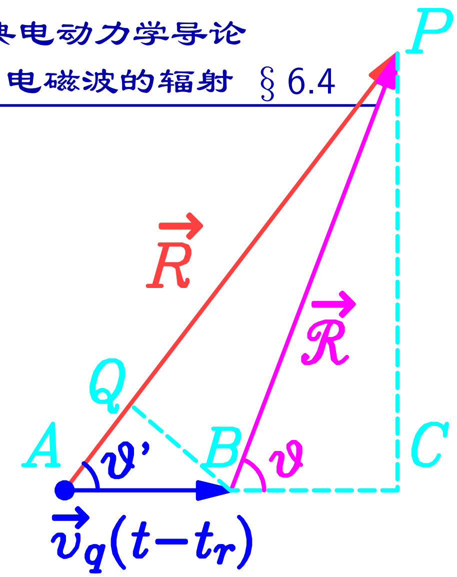
物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ)=(AB)\sin\theta'$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$$

几何等式：$R \sin\theta' = \mathscr{R} \sin\theta = PC$

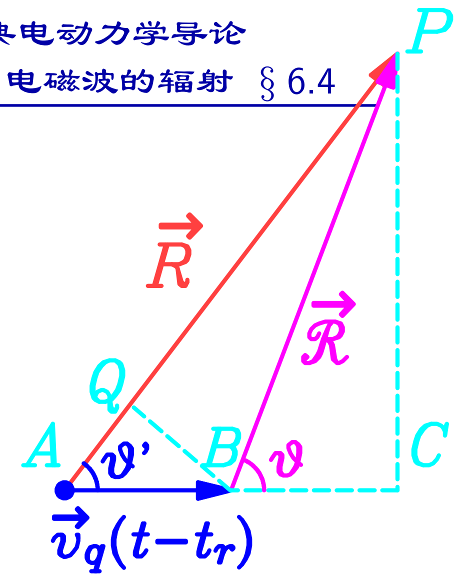
物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c} = R - \frac{v_q R \cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB) \sin\theta' = (v_q R/c) \sin\theta'$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

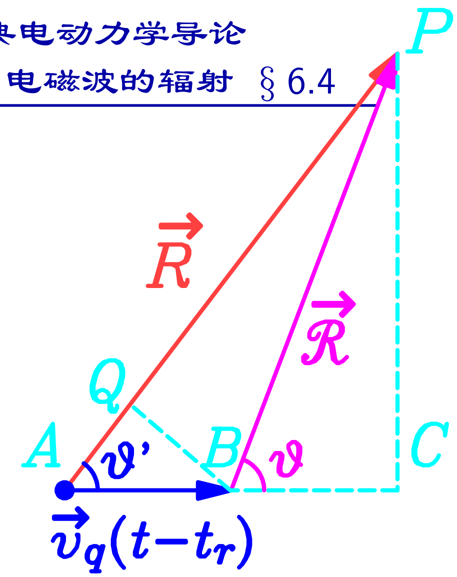
物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{R}}}{c} = R - \frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta'$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

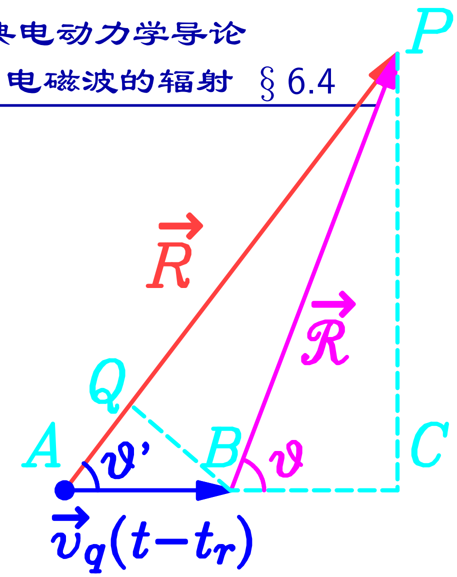
物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ)=(AB)\sin\theta'=(v_qR/c)\sin\theta'=(v_q/c)R\sin\theta'=(v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

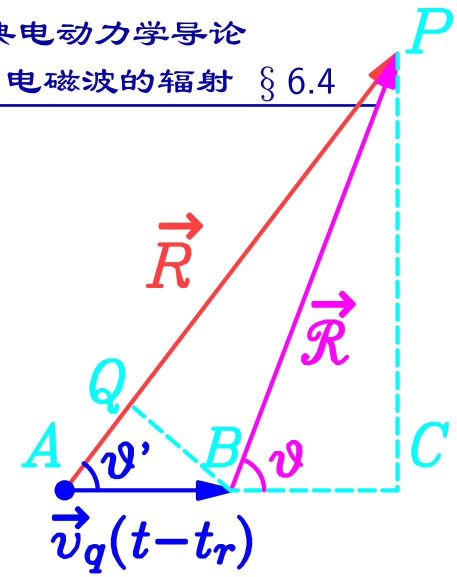
$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ)=(AB)\sin\theta'=(v_qR/c)\sin\theta'=(v_q/c)R\sin\theta'=(v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow\quad(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

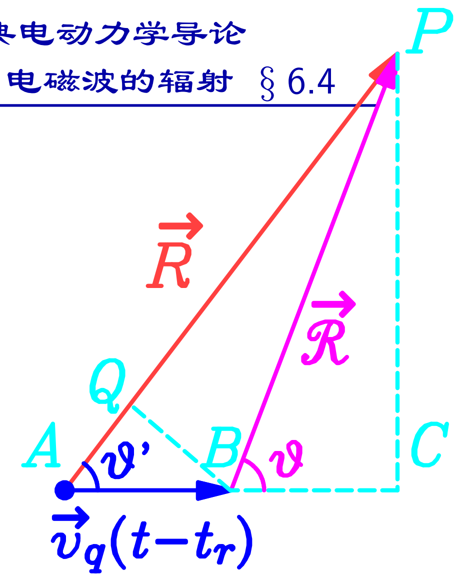
物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = R - \frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2} = \sqrt{\mathscr{R}^2 - \beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2},$$



例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q \cdot \vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{v}_q \cdot \vec{R}}{c} = R - \frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

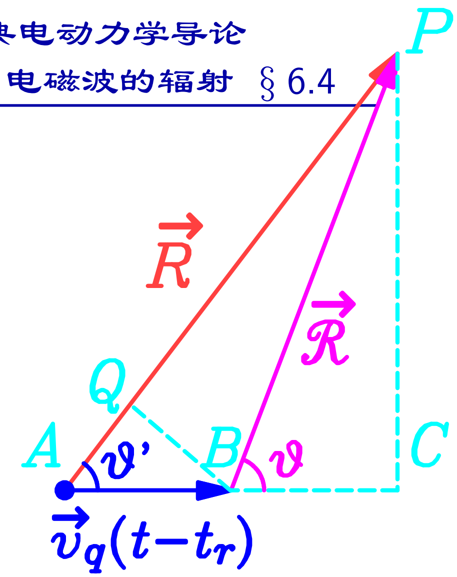
$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2} = \sqrt{\mathscr{R}^2 - \beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}, \qquad \beta = v_q/c$$

$$R - \frac{\vec{v}_q \cdot \vec{R}}{c}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = R-\frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R-(AB)\cos\theta' = R-(AQ) = (PQ)$$

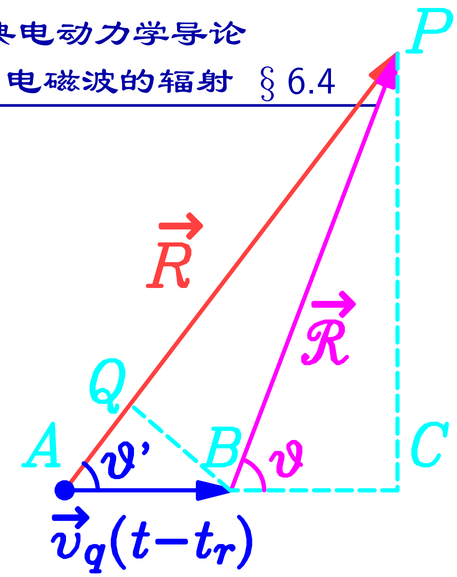
$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad (PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}=\sqrt{\mathscr{R}^2-\beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}, \qquad \beta = v_q/c$$

$$\boxed{R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R-\dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta'=\mathscr{R}\sin\theta=PC$

物理等式：$R/c=(AB)/v_q=t-t_r$

$$\Longrightarrow\quad R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=R-\frac{v_qR\cos\theta'}{c}=R-(AB)\cos\theta'=R-(AQ)=(PQ)$$

$$(PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(BQ)^2}$$

$$(BQ)=(AB)\sin\theta'=(v_qR/c)\sin\theta'=(v_q/c)R\sin\theta'=(v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow\quad (PQ)=\sqrt{\mathscr{R}^2-(v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}=\sqrt{\mathscr{R}^2-\beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2},\qquad \beta=v_q/c$$

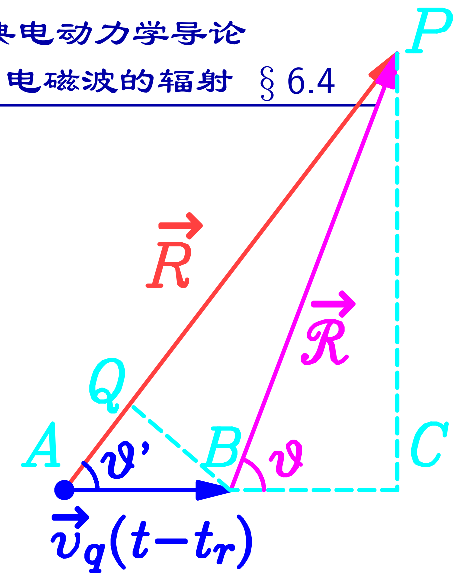
$$\boxed{R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}=\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从而：

$$\varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\ \sin^2\theta}},$$

$$A(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv_q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\ \sin^2\theta}}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = R - \frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2} = \sqrt{\mathscr{R}^2 - \beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}, \qquad \beta = v_q/c$$

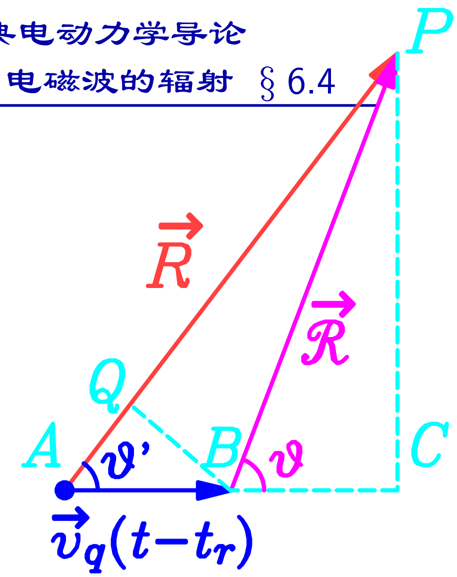
$$\boxed{R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从而：

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\ \sin^2\theta}}, \qquad \mathscr{R} = r - v_q t,\ |\mathscr{R} = |r - v_q t|,$$

$$A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q v_q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\ \sin^2\theta}}$$

例 4：匀速运动电荷点电荷的势 —— 几何图像



$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R - \dfrac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c}}$$

几何等式：$R\sin\theta' = \mathscr{R}\sin\theta = PC$

物理等式：$R/c = (AB)/v_q = t - t_r$

$$\Longrightarrow \quad R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = R - \frac{v_q R\cos\theta'}{c} = R - (AB)\cos\theta' = R - (AQ) = (PQ)$$

$$(PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (BQ)^2}$$

$$(BQ) = (AB)\sin\theta' = (v_q R/c)\sin\theta' = (v_q/c)R\sin\theta' = (v_q/c)\mathscr{R}\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \quad (PQ) = \sqrt{\mathscr{R}^2 - (v_q/c)^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2} = \sqrt{\mathscr{R}^2 - \beta^2(\mathscr{R}\sin\theta)^2}, \qquad \beta = v_q/c$$

$$\boxed{R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}},$$

从而：

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}, \qquad A(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv_q}{\mathscr{R}\sqrt{1-\beta^2\sin^2\theta}}$$

$\mathscr{R} = r - v_q t,\ |\mathscr{R} = |r - v_q t|,$

—— 同时量

二、运动电荷的场

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$，t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$，$\vec{\boldsymbol{r}}_q$，t，t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} \cdot \left[-\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t}
\end{aligned}$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} \cdot \left[-\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t}
\end{aligned}$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} \cdot \left[-\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}}} = \frac{R}{s},
\end{aligned}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\left[-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t} \\
&= 1 + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}}} = \frac{R}{s},
\end{aligned}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla t_r$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}\\
&= 1-\frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\left[-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t}\\
&= 1+\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}}} = \frac{R}{s},
\end{aligned}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla t_r = \nabla\left[t-\frac{R}{c}\right]$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} \\ &= 1 - \frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\left[-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t} \\ &= 1 + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}}} = \frac{R}{s},\end{aligned}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla t_r = \nabla\left[t - \frac{R}{c}\right] = -\frac{1}{c}\nabla|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|$$

二、运动电荷的场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}, \qquad \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

现在 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)$，$\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$ 并没有写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的显函数形式，

而是写成 $\vec{\boldsymbol{r}}$, $\vec{\boldsymbol{r}}_q$, t, t_r 的函数，因此应利用复合函数的求导法则。

先求几个数学公式。注意只有 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 是独立变量，其它变量都是 $\vec{\boldsymbol{r}}$, t 的函数。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t_r}{\partial t} &= \frac{\partial[t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c]}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t}\\
&= 1-\frac{1}{c}\frac{\partial\sqrt{[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]^2}}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = 1-\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\left[-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{\partial t_r}\right]\frac{\partial t_r}{\partial t}\\
&= 1+\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)\frac{\partial t_r}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}}} = \frac{R}{s},
\end{aligned}$$

$$s = R-\frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla t_r = \nabla\left[t-\frac{R}{c}\right] = -\frac{1}{c}\nabla|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| = -\frac{1}{c}\left[\nabla|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|\right]\Big|_{t_r\,\text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

Let there be light

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\big[\nabla \big|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\big]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\left[\nabla\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|\right]\Big|_{t_r\,\text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\left[\nabla\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|\right]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\,\text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s$$

Let there be light

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1-\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\big|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial\big|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \qquad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big) = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\Big|_{t_r\text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t_r}\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\nabla t_r$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\left[\nabla \left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|\right]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} \nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} \nabla t_r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q\right) = \nabla\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\Big|_{t_r\text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t_r}\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q\right) \nabla t_r$$

$$= \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q + \left[-\frac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right] \nabla t_r$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\Big[\nabla\big|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\big|\Big]\Big|_{t_r\,\text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big) = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\Big|_{t_r\,\text{不变}} + \frac{\partial}{\partial t_r}\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\nabla t_r$$

$$= \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q + \left[-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\nabla t_r$$

利用 $\nabla t_r = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\big[\nabla|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|\big]\Big|_{t_r\text{ 不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

利用：$\dfrac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big) = \nabla\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\Big|_{t_r\text{ 不变}} + \frac{\partial}{\partial t_r}\Big(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\Big)\nabla t_r$$

$$= \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q + \left[-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\nabla t_r$$

利用 $\nabla t_r = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}$

$$= -\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{cs}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\left(1 + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cs}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{1}{1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cR}} = \frac{R}{s}}$$

$$\nabla t_r = -\frac{1}{c}\left[\nabla\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|\right]\Big|_{t_r\ \text{不变}} - \frac{1}{c}\frac{\partial\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} + \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}\nabla t_r \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\nabla t_r = -\frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

利用：$\dfrac{\partial\left|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)\right|}{\partial t_r} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$

$$s = R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

$$\nabla s = \nabla\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) = \nabla\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\Big|_{t_r\ \text{不变}} + \frac{\partial}{\partial t_r}\left(R - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\nabla t_r$$

$$= \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q + \left[-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\nabla t_r$$

利用 $\nabla t_r = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}$

$$= -\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{cs}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\left(1 + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{cs}\right)$$

$$= -\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{cs}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}$$

$$\boxed{\nabla s = -\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{cs}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{1}{c}\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right] + \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{s}}$$

Let there be light

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

Let there be light

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\,\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\,\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\,\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\,\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\,\frac{\partial t_r}{\partial t}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\,\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\,\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\,\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\,\frac{R}{s}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c^2}\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q)$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c^2}\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q) = \frac{1}{c^2}[\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}_q - \vec{\boldsymbol{v}}_q\times(\nabla\varphi)],$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{\boldsymbol{A}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\boldsymbol{v}}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$ ∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)| - [\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q s - \vec{\boldsymbol{v}}_q\left(-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R} + \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q^2}{c} - \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{\boldsymbol{v}}_q/\partial t_r = \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{\boldsymbol{R}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c^2}\nabla\times(\varphi\vec{\boldsymbol{v}}_q) = \frac{1}{c^2}[\varphi\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}_q - \vec{\boldsymbol{v}}_q\times(\nabla\varphi)],$$ 利用：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{v}}_q = (\nabla t_r)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{s}, \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_q}{s} = \frac{1}{c^2}\varphi\vec{v}_q$$

$$\nabla\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\frac{q}{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\, s^2}\nabla s,$$

∇s 见上页底部

$$\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t_r}\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t_r}\left[\frac{\vec{v}_q(t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)| - [\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]\cdot\vec{v}_q(t_r)/c}\right]\frac{R}{s}$$

$$= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{R}{s}\left[\frac{\dot{\vec{v}}_q s - \vec{v}_q\left(-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{R} + \frac{\vec{v}_q^2}{c} - \frac{\vec{R}\cdot\dot{\vec{v}}_q}{c}\right)}{s^2}\right]$$

利用了：$\partial\vec{v}_q/\partial t_r = \dot{\vec{v}}_q$

$$\frac{\partial[\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)]}{\partial t_r} = -\vec{v}_q$$

$$\frac{\partial|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|}{\partial t_r} = \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{R}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \frac{1}{c^2}\nabla\times(\varphi\vec{v}_q) = \frac{1}{c^2}[\varphi\nabla\times\vec{v}_q - \vec{v}_q\times(\nabla\varphi)],$$

利用：$\nabla\times\vec{v}_q = (\nabla t_r)\times\dot{\vec{v}}_q$

$$= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\} \\
\vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}
\end{aligned}
$$

讨论

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

Let there be light

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \qquad \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right),$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1+\vec{\boldsymbol{E}}_2,\qquad \begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right),\\ \vec{\boldsymbol{E}}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{\boldsymbol{v}}_q=0$ 时退化为库仑场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1+\vec{\boldsymbol{E}}_2, \qquad \begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right),\\ \vec{\boldsymbol{E}}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{\boldsymbol{v}}_q=0$ 时退化为库仑场

因为正比于 $1/R^2$，场只分布在粒子附近，为运动粒子所携带。

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1+\vec{\boldsymbol{E}}_2, \qquad \begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right),\\ \vec{\boldsymbol{E}}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{\boldsymbol{v}}_q=0$ 时退化为库仑场

因为正比于 $1/R^2$，场只分布在粒子附近，为运动粒子所携带。

对应地，$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}_1$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1 + \vec{\boldsymbol{E}}_2, \qquad \begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right), \\ \vec{\boldsymbol{E}}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\} \end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{\boldsymbol{v}}_q = 0$ 时退化为库仑场

因为正比于 $1/R^2$，场只分布在粒子附近，为运动粒子所携带。

对应地，$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}_1$

$\vec{\boldsymbol{E}}_2$：辐射场、加速度场，只与加速度 $\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$ 有关，正比于 $1/R$，$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q = 0$ 时为零

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{E} = \vec{E}_1+\vec{E}_2, \qquad \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right), \quad \vec{E}_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$\vec{E}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{v}_q=0$ 时退化为库仑场

因为正比于 $1/R^2$，场只分布在粒子附近，为运动粒子所携带。

对应地，$\vec{B}_1 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}_1$

$\vec{E}_2$：辐射场、加速度场，只与加速度 $\dot{\vec{v}}_q$ 有关，正比于 $1/R$，$\dot{\vec{v}}_q=0$ 时为零

因为正比于 $1/R$，场可以辐射出去，脱离粒子

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}$$

讨论

(1) 运动点电荷的电场总是垂直于磁场

(2) 自场与辐射场

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_1+\vec{\boldsymbol{E}}_2, \qquad \begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right),\\ \vec{\boldsymbol{E}}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}\end{aligned}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}_1$：广义库仑场、自场、速度场，只与速度有关，正比于 $1/R^2$，$\vec{\boldsymbol{v}}_q=0$ 时退化为库仑场

因为正比于 $1/R^2$，场只分布在粒子附近，为运动粒子所携带。

对应地，$\vec{\boldsymbol{B}}_1 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}_1$

$\vec{\boldsymbol{E}}_2$：辐射场、加速度场，只与加速度 $\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q$ 有关，正比于 $1/R$，$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q=0$ 时为零

因为正比于 $1/R$，场可以辐射出去，脱离粒子

对应地，$\vec{\boldsymbol{B}}_2 = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}_2$， $\vec{\boldsymbol{E}}_2$, $\vec{\boldsymbol{B}}_2$, $\vec{\boldsymbol{R}}$ 两两垂直，$\vec{\boldsymbol{E}}_2\times\vec{\boldsymbol{B}}_2$ 与 $\vec{\boldsymbol{R}}$ 同向。

Let there be light

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) \\ &\qquad +\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\} \\ \vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R=|\vec{\boldsymbol{R}}|\end{aligned}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$v_q \ll c$ 时：$s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c} \approx R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}_q),$$

而 $\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$，故

$$\vec{B} = \frac{q\vec{v}_q\times\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\dot{\vec{v}}_q\times\vec{n},$$

其中 $\vec{n} = \vec{R}/R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E},\qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r),\quad R=|\vec{R}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$v_q \ll c$ 时：$s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c} \approx R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}_q),$$

而 $\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$，故

$$\vec{B} = \frac{q\vec{v}_q\times\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\dot{\vec{v}}_q\times\vec{n},$$

其中 $\vec{n} = \vec{R}/R$

若只考虑辐射场，注意到电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{r}_q$，$\ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}}_q$

低速运动粒子的辐射场完全与偶极辐射场相同

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$v_q \ll c$ 时：$s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c} \approx R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}_q), \qquad \text{而 } \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \text{ 故}$$

$$\vec{B} = \frac{q\vec{v}_q\times\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\dot{\vec{v}}_q\times\vec{n}, \qquad \text{其中 } \vec{n} = \vec{R}/R$$

若只考虑辐射场，注意到电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{r}_q$，$\ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}}_q$

低速运动粒子的辐射场完全与偶极辐射场相同

取加速度 $\dot{\vec{v}}_q$ 方向为 $\hat{e}_z$ 方向，则：

$$\vec{E} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

能流密度：$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{q^2|\dot{\vec{v}}_q|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\;\vec{n}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$v_q \ll c$ 时：$s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c} \approx R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R c^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}_q),$$

而 $\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$，故

$$\vec{B} = \frac{q\vec{v}_q\times\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R c^3}\dot{\vec{v}}_q\times\vec{n},$$

其中 $\vec{n} = \vec{R}/R$

若只考虑辐射场，注意到电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{r}_q$，$\ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}}_q$

低速运动粒子的辐射场完全与偶极辐射场相同

取加速度 $\dot{\vec{v}}_q$ 方向为 $\hat{e}_z$ 方向，则：

$$\vec{E} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 R c^2}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 R c^3}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

能流密度：$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{q^2|\dot{\vec{v}}_q|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\,\vec{n}$

辐射功率：$P = \oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,R^2\mathrm{d}\Omega = \dfrac{|\dot{\vec{v}}_q|^2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2q^2}{3c^3}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(3) 低速运动粒子的辐射场：偶极辐射

$v_q \ll c$ 时：$s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c} \approx R$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}_q),$$

而 $\vec{B} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}$，故

$$\vec{B} = \frac{q\vec{v}_q\times\vec{n}}{4\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\dot{\vec{v}}_q\times\vec{n},$$

其中 $\vec{n} = \vec{R}/R$

若只考虑辐射场，注意到电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{r}_q$，$\ddot{\vec{p}} = q\dot{\vec{v}}_q$

低速运动粒子的辐射场完全与偶极辐射场相同

取加速度 $\dot{\vec{v}}_q$ 方向为 $\hat{e}_z$ 方向，则：

$$\vec{E} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^2}\sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{q|\dot{\vec{v}}_q|}{4\pi\epsilon_0 Rc^3}\sin\theta\,\hat{e}_\phi$$

能流密度：$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{q^2\,|\dot{\vec{v}}_q|^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\,\vec{n}$

辐射功率：$P = \oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = \oint \vec{n}\cdot\vec{S}\,R^2\mathrm{d}\Omega = \dfrac{|\dot{\vec{v}}_q|^2}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2q^2}{3c^3}$ —— Larmor 公式

辐射功率正比于加速度平方

Let there be light

$$
\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) \\
&\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\} \\
\vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|
\end{aligned}
$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\\ &\quad+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}\\ \vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R=|\vec{\boldsymbol{R}}|\end{aligned}$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \times \dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \times \dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)=\vec{r}-\vec{v}\,t_r$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r) = \vec{r}-\vec{v}\,t_r$

另：$t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c = t - R/c \implies R = c(t-t_r)$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q = 0, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_q = \vec{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r) = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t_r$

另：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c = t - R/c \implies R = c(t-t_r)$

因此：
$$\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) = (\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q t_r)-(t-t_r)\vec{\boldsymbol{v}}_q = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q t = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t \equiv \vec{\mathscr{R}} \tag{1}$$

Let there be light

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r) = \vec{r}-\vec{v}\,t_r$

另：$t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c = t - R/c \implies R = c(t-t_r)$

因此：$$\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) = (\vec{r}-\vec{v}_q t_r)-(t-t_r)\vec{v}_q = \vec{r}-\vec{v}_q t = \vec{r}-\vec{v}\,t \equiv \vec{\mathscr{R}} \qquad (1)$$

从 p10 例 4：$$s = R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}, \qquad \mathscr{R} = |\vec{r}-\vec{v}\,t| \qquad (2)$$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}}\times\left[\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)\times\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\times\vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R=|\vec{\boldsymbol{R}}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q=0, \quad \vec{\boldsymbol{v}}_q=\vec{\boldsymbol{v}}$

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{\boldsymbol{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t_r$

另：$t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r)|/c=t-R/c \implies R=c(t-t_r)$

因此：$$\left(\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right)=(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q t_r)-(t-t_r)\vec{\boldsymbol{v}}_q=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q t=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t\equiv\vec{\mathscr{R}} \qquad (1)$$

从 p10 例 4：$$s=R-\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{R}}}{c}=\mathscr{R}\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}, \qquad \mathscr{R}=|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}\,t| \qquad (2)$$

(1 – 2) 式代入 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 得：$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$
$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)=\vec{r}-\vec{v}\,t_r$

另：$t_r = t-|\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c = t-R/c \implies R = c(t-t_r)$

因此：$$\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) = (\vec{r}-\vec{v}_q t_r)-(t-t_r)\vec{v}_q = \vec{r}-\vec{v}_q t = \vec{r}-\vec{v}\,t \equiv \vec{\mathscr{R}} \qquad (1)$$

从 p10 例 4：$$s = R-\frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}, \qquad \mathscr{R}=|\vec{r}-\vec{v}\,t| \qquad (2)$$

(1 – 2) 式代入 $\vec{E}$ 得：$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{v}\,t_r}{R} = \frac{(\vec{r}-\vec{v}\,t)+(t-t_r)\vec{v}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{v}\,t}{R}+\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{\mathscr{R}}}{R}+\frac{\vec{v}}{c}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(4) 匀速运动粒子的场：自场 Heaviside 1888

匀速运动：$\dot{\vec{v}}_q = 0, \quad \vec{v}_q = \vec{v}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)$$

设 $t=0$ 时 q 在坐标原点：$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)=\vec{r}-\vec{v}\,t_r$

另：$t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}_q(t_r)|/c = t - R/c \implies R = c(t-t_r)$

因此：$\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) = (\vec{r}-\vec{v}_q t_r) - (t-t_r)\vec{v}_q = \vec{r}-\vec{v}_q t = \vec{r}-\vec{v}\,t \equiv \vec{\mathscr{R}}$ (1)

从 p10 例 4：$s = R - \frac{\vec{v}_q\cdot\vec{R}}{c} = \mathscr{R}\sqrt{1-v^2\sin^2\theta/c^2}, \qquad \mathscr{R}=|\vec{r}-\vec{v}\,t|$ (2)

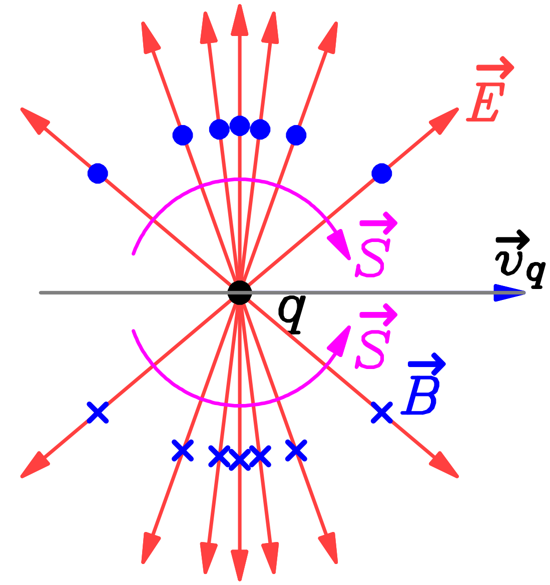
(1 – 2) 式代入 $\vec{E}$ 得：$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$

$$\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{v}\,t_r}{R} = \frac{(\vec{r}-\vec{v}\,t)+(t-t_r)\vec{v}}{R} = \frac{\vec{r}-\vec{v}\,t}{R}+\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{\mathscr{R}}}{R}+\frac{\vec{v}}{c}$$

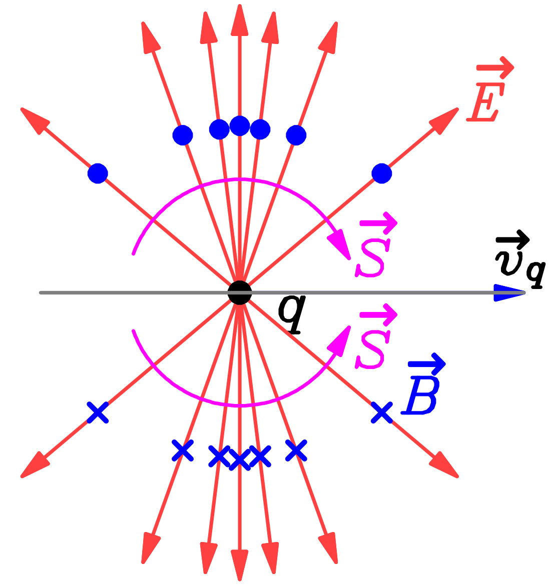
$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E} \implies \vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),$$

$\vec{\mathscr{R}}$：从粒子当前位置到观察点的间距矢量

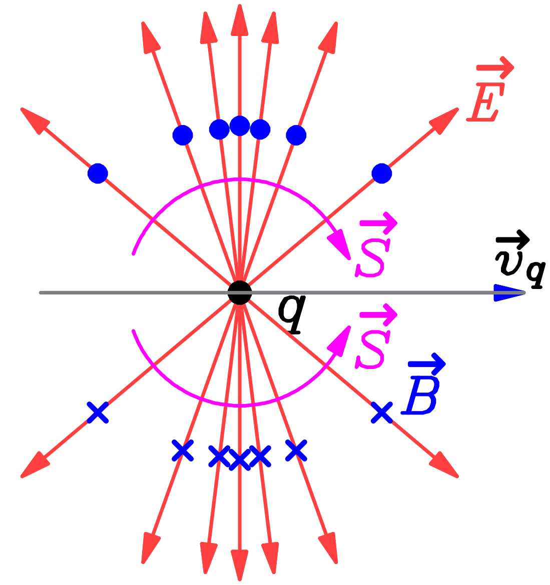
Let there be light



(4) 匀速运动粒子的场（续）：



(4) 匀速运动粒子的场（续）：



$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

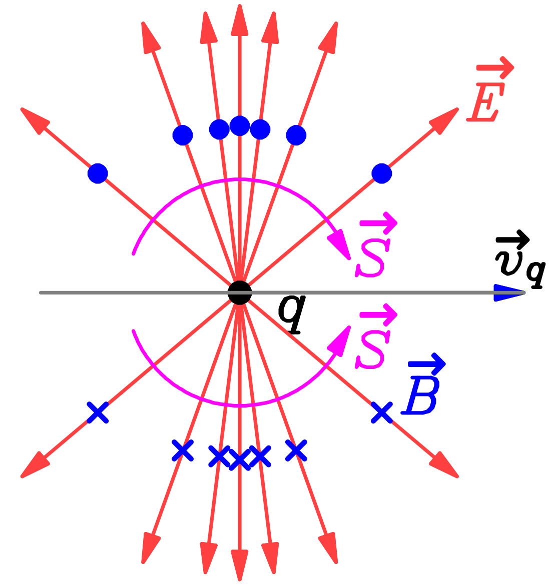
$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）



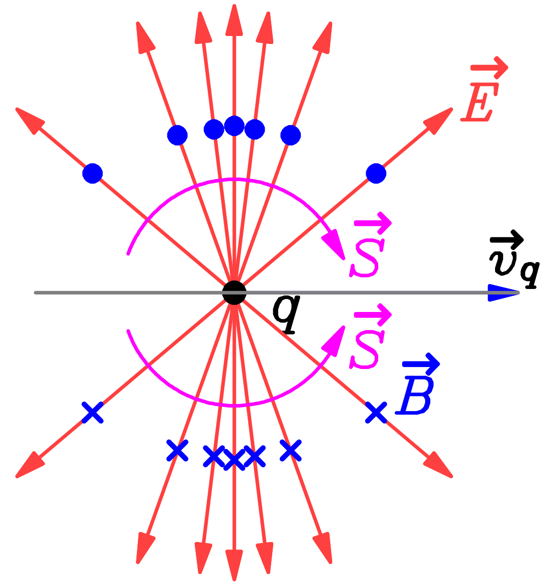
(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

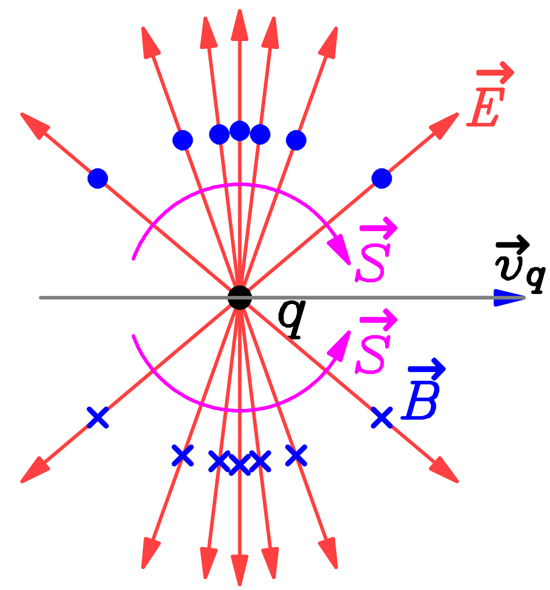
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

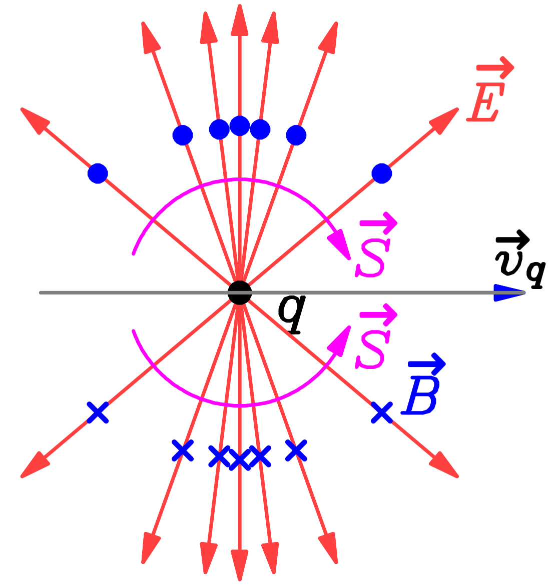
$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}), \qquad \vec{\mathscr{R}} = \vec{r} - \vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$





(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

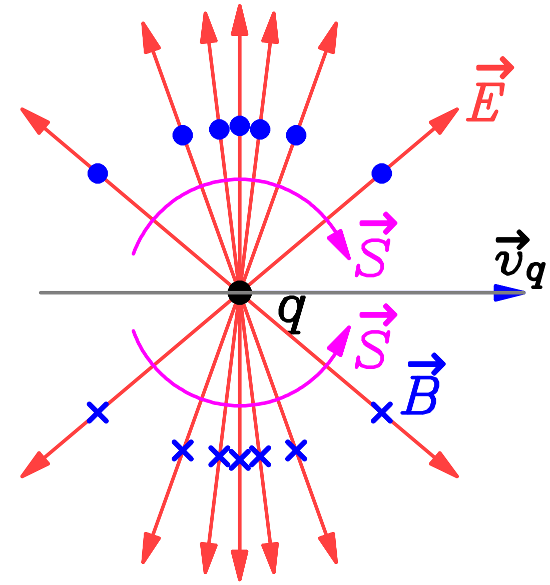
$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}), \qquad \vec{\mathscr{R}} = \vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

(4) 匀速运动粒子的场（续）：



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}=\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$$

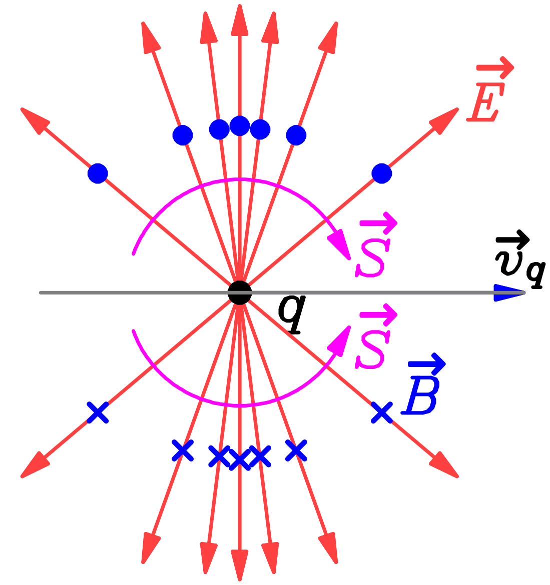
场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则磁场沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}=\epsilon_0[\vec{\boldsymbol{E}}\times(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则：$\vec{\boldsymbol{S}}=-|\vec{\boldsymbol{S}}|\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

(4) 匀速运动粒子的场（续）：



$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}=\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$$

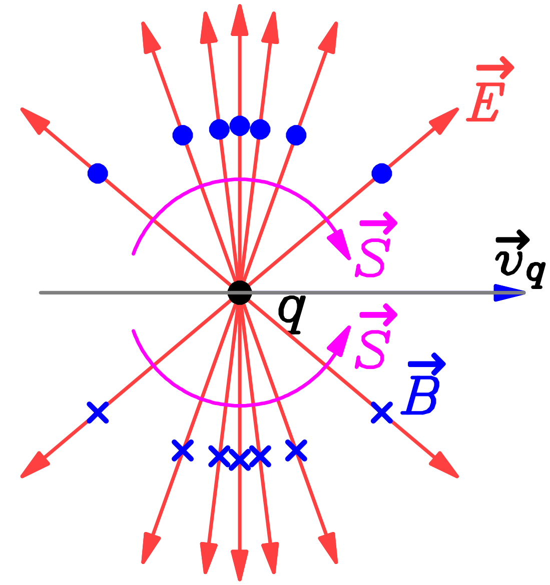
场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则磁场沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}=\epsilon_0[\vec{\boldsymbol{E}}\times(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则：$\vec{\boldsymbol{S}}=-|\vec{\boldsymbol{S}}|\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 ($\hat{\boldsymbol{e}}_r$，$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$，$\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$) 为求坐标系的三个基矢。



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

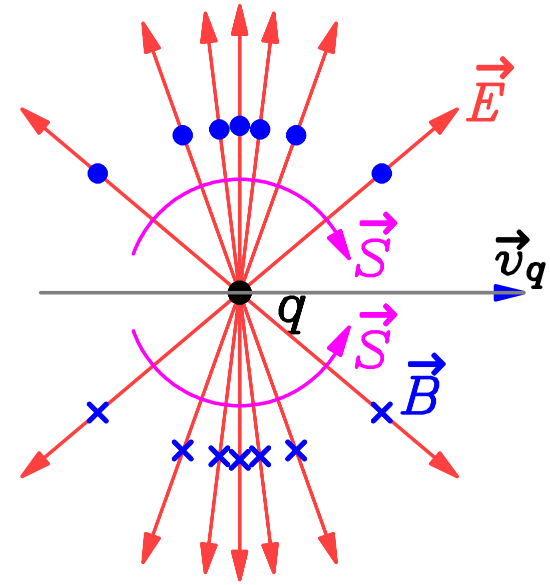
能流密度矢量：$\vec{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则：$\vec{S}=-|\vec{S}|\,\hat{e}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 （$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$）为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=0$

(4) 匀速运动粒子的场（续）：



$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}), \qquad \vec{\mathscr{R}} = \vec{r} - \vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

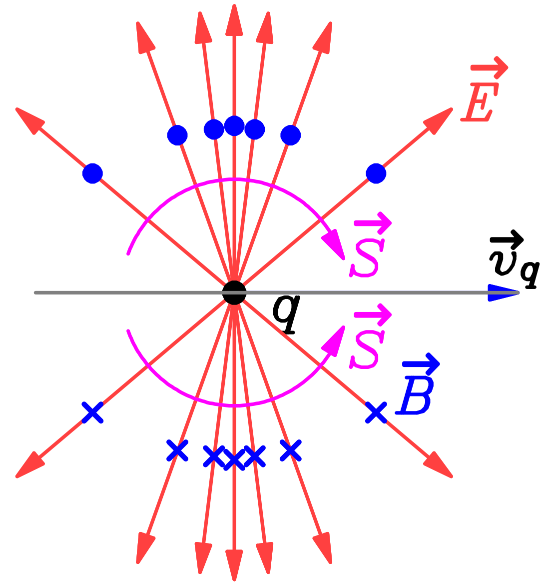
磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则：$\vec{S} = -|\vec{S}|\,\hat{e}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 （$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$）为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\oint_{\mathcal{S}} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma = 0$ —— 真空中匀速粒子不辐射。



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

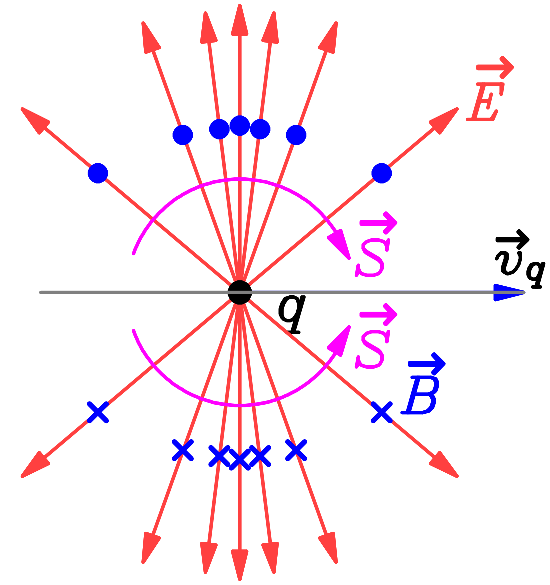
能流密度矢量：$\vec{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则：$\vec{S}=-|\vec{S}|\,\hat{e}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 （$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$）为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=0$ —— 真空中匀速粒子不辐射。

低速：$v\ll c$ 时，电场退化为库仑场：$\vec{E}(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}=\frac{1}{c^2}(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{v}}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则磁场沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{\boldsymbol{S}}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{B}}=\epsilon_0[\vec{\boldsymbol{E}}\times(\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\boldsymbol{E}})]$

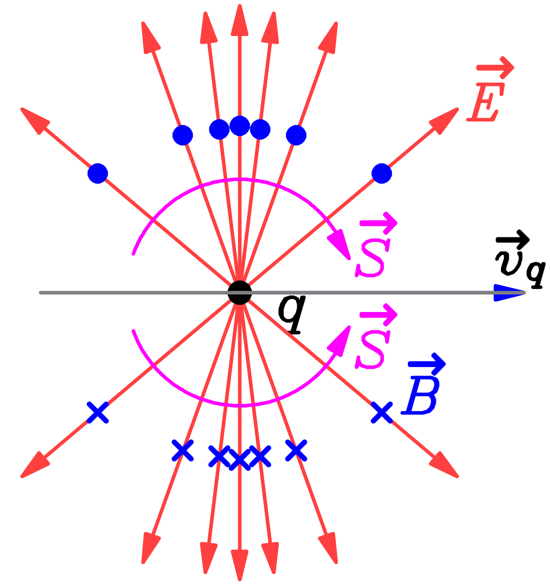
若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{\boldsymbol{e}}_z$，则：$\vec{\boldsymbol{S}}=-|\vec{\boldsymbol{S}}|\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 $(\hat{\boldsymbol{e}}_r,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\theta,\ \hat{\boldsymbol{e}}_\phi)$ 为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{S}}\,\mathrm{d}\sigma=0$ —— 真空中匀速粒子不辐射。

低速：$v\ll c$ 时，电场退化为库仑场：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$

磁感应强度：$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{\boldsymbol{v}}\times\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

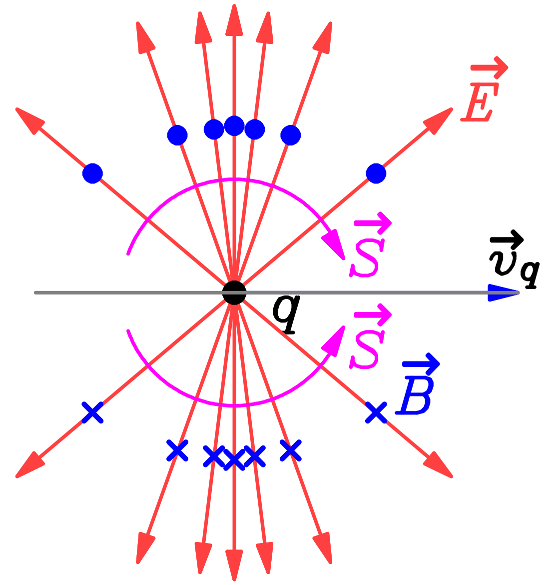
若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则：$\vec{S}=-|\vec{S}|\,\hat{e}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 （$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$）为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=0$ —— 真空中匀速粒子不辐射。

低速：$v\ll c$ 时，电场退化为库仑场：$\vec{E}(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$

磁感应强度：$\vec{B}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v}\times\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ $\qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longleftarrow q\vec{v}$



(4) 匀速运动粒子的场（续）：

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1-v^2/c^2}{\left(1-v^2\sin^2\theta/c^2\right)^{3/2}}\frac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{E}),\qquad \vec{\mathscr{R}}=\vec{r}-\vec{v}t$$

场结构：电场自当前粒子位置到观察点位置（径向）

磁场垂直于电场，若取粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则磁场沿 $\hat{e}_\phi$

能流密度矢量：$\vec{S}=\dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\epsilon_0[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]$

若取粒子位置为坐标原点，粒子速度沿 $\hat{e}_z$，则：$\vec{S}=-|\vec{S}|\,\hat{e}_\theta$

能量紧跟粒子，在球面上流动，不离开粒子辐射出去。 （$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\theta$，$\hat{e}_\phi$）为求坐标系的三个基矢。

显然，以粒子为求心做任意一球面 $\mathcal{S}$，有：$\displaystyle\oint_{\mathcal{S}}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma=0$ —— 真空中匀速粒子不辐射。

低速：$v\ll c$ 时，电场退化为库仑场：$\vec{E}(\vec{r},t)=\dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$

磁感应强度：$\vec{B}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v}\times\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$ $\qquad \vec{j}\,\mathrm{d}\tau \Longleftarrow q\vec{v}$

—— 磁感应强度形式上与静磁场相同：$\vec{B}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{j}\,\mathrm{d}\tau\times\vec{\mathscr{R}}}{\mathscr{R}^3}$

Let there be light

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\\ &\quad+\frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\,\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}\\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|\end{aligned}$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{\boldsymbol{R}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{c}$

$$\begin{aligned}
\vec{\boldsymbol{E}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) \\
&\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{\boldsymbol{R}} \times \left[\left(\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{R}{c}\vec{\boldsymbol{v}}_q\right) \times \dot{\vec{\boldsymbol{v}}}_q\right]\right\} \\
\vec{\boldsymbol{B}} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \times \vec{\boldsymbol{E}}, \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_q(t_r), \quad R = |\vec{\boldsymbol{R}}|
\end{aligned}$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B})$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a}=\dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n}=\frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})]$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\,[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\,\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n}-(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $\quad s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n}-(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\quad \vec{n}\perp\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a}=\dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n}=\frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n}-(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \frac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}| \end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \vec{S} = \frac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \stackrel{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n}-(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\,[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

则目标在稍后的 t 时刻，单位时间接受到 $N_t = N_g$ 个光子。

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R=|\vec{R}|$$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})], \quad \vec{a}=\dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}, \quad \vec{n}=\frac{\vec{R}}{R}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n}-(\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \frac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

则目标在稍后的 t 时刻，单位时间接受到 $N_t = N_g$ 个光子。

然而，若粒子向着目标运动，如何？

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1 - \frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R} - \frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

则目标在稍后的 t 时刻，单位时间接受到 $N_t = N_g$ 个光子。

然而，若粒子向着目标运动，如何？ —— 显然 $N_t \neq N_g$

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \frac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \frac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

若粒子不动，确实如此。$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

则目标在稍后的 t 时刻，单位时间接受到 $N_t = N_g$ 个光子。

然而，若粒子向着目标运动，如何？ —— 显然 $N_t \neq N_g$

例如：若粒子相对于地面以光速向目标运动（光子相对于地面速度总是光速），则尽管粒子

(5) 任意运动粒子的辐射场 $s = R - \dfrac{\vec{R}\cdot\vec{v}_q}{c}$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R}{(\vec{R}\cdot\vec{u})^3}\left[\vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})\right], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}}_q$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\vec{n}\times\vec{E}, \qquad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3}\left(1-\frac{v_q^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right) \\ &\quad + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 s^3 c^2}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R}{c}\vec{v}_q\right)\times\dot{\vec{v}}_q\right]\right\} \\ \vec{B} &= \frac{1}{c}\frac{\vec{R}}{R}\times\vec{E}, \qquad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_q(t_r), \quad R = |\vec{R}|\end{aligned}}$$

Poynting 矢量：$\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}\times(\vec{n}\times\vec{E})] = \dfrac{1}{\mu_0 c}[\vec{E}^2\vec{n} - (\vec{n}\cdot\vec{E})\vec{E}]$

对辐射场 $\vec{n}\perp\vec{E} \implies \vec{S} = \dfrac{\vec{E}^2\vec{n}}{\mu_0 c}$ 此处 $\vec{S}$ 为观察者观察到的粒子辐射的角分布

人们更关心的是粒子单位时间辐射出去的能量（能量损失）$f(\theta,\phi)$。 $\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} \overset{?}{=} \vec{S}\cdot\vec{n}$

问题：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射的能量是否等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量？

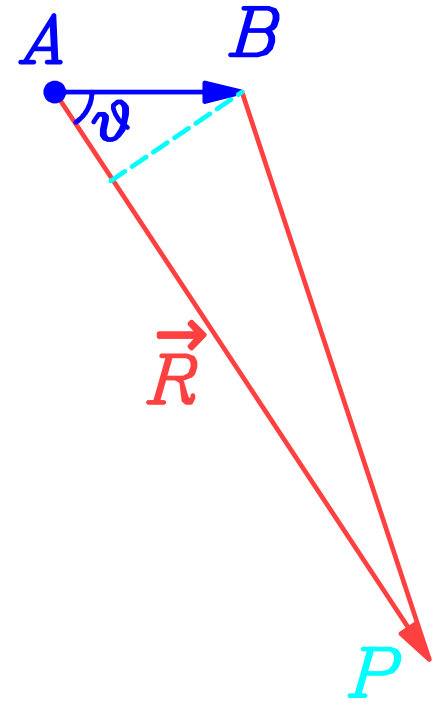
若粒子不动，确实如此。$\dfrac{f(\theta,\phi)}{R^2} = \vec{S}\cdot\vec{n}$

例如：静止粒子在 t_r 时刻对着目标单位时间发射 N_g 光子，

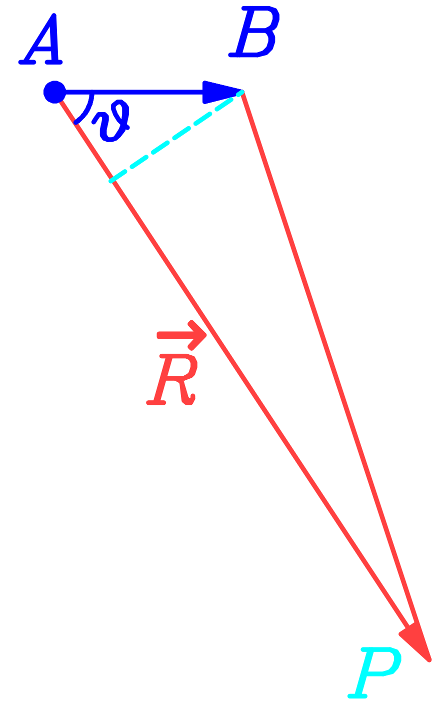
则目标在稍后的 t 时刻，单位时间接受到 $N_t = N_g$ 个光子。

然而，若粒子向着目标运动，如何？ —— 显然 $N_t \neq N_g$

例如：若粒子相对于地面以光速向目标运动（光子相对于地面速度总是光速），则尽管粒子单位时间射出 N_g 个光子，但所有光子将在同一时刻一起到达目标，故，$N_t > N_g$

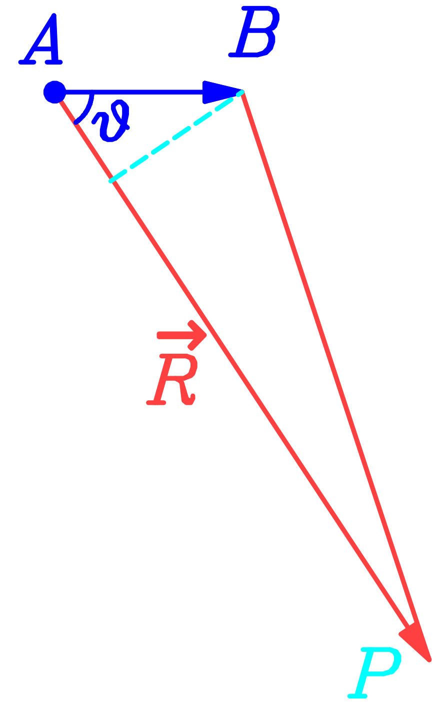

A
B
ϑ
$\vec{R}$
P

(5) 任意运动粒子的辐射（续）



(5) 任意运动粒子的辐射（续）

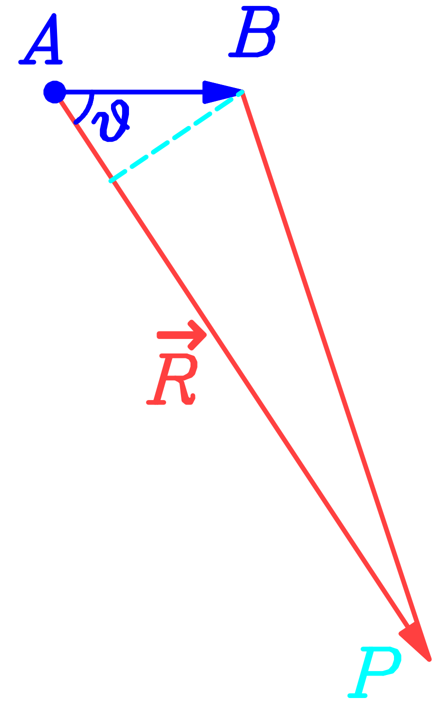
结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量



(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论： 粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

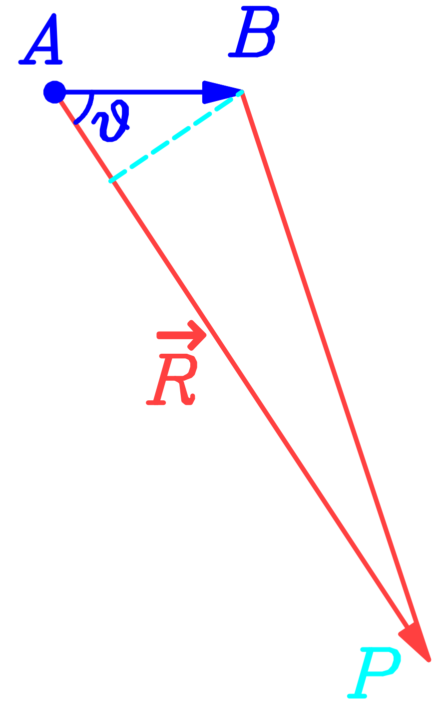
$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}},$$



(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论： 粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$

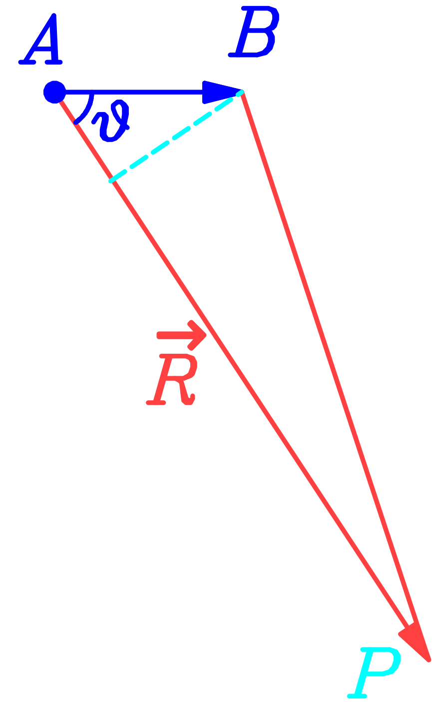


(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=? \qquad \text{如图}$$

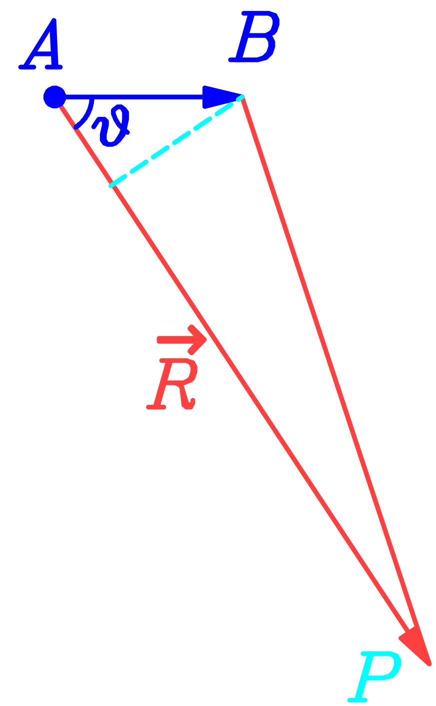
在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B



(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

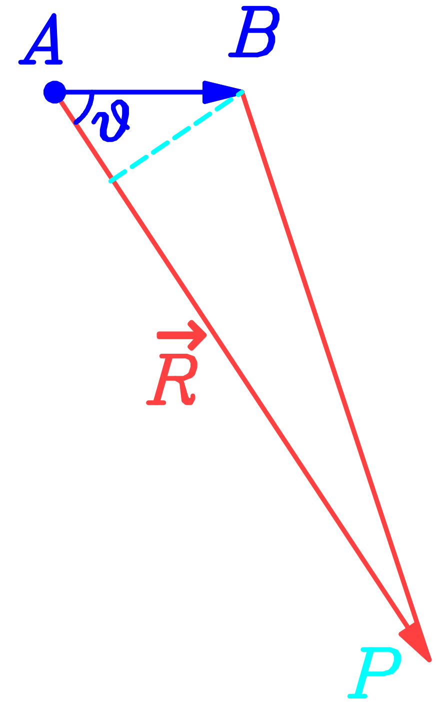
在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ?$$

如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

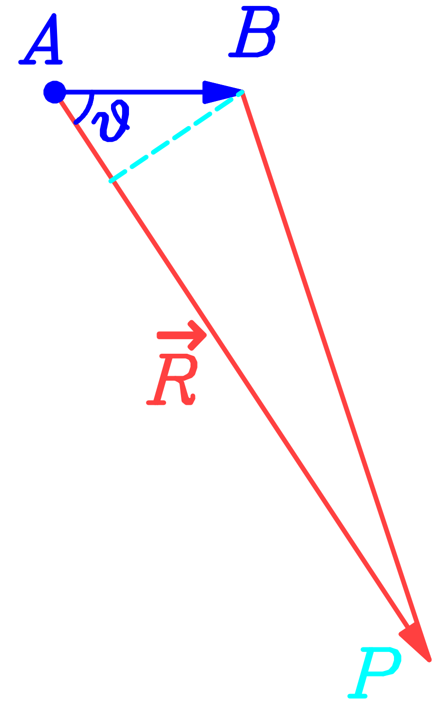
粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=?$$

如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

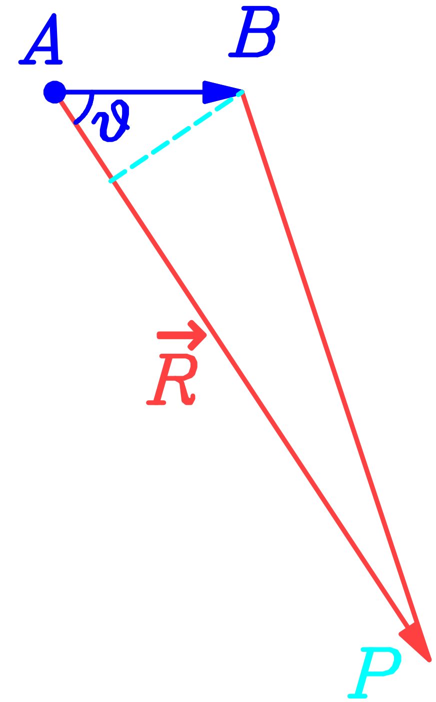
粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

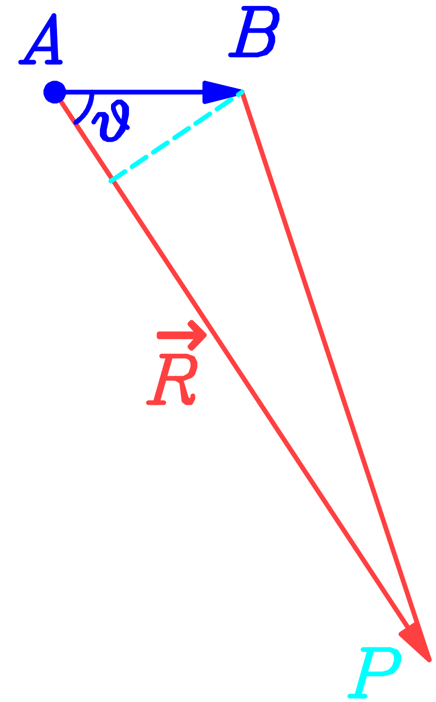
在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论： 粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

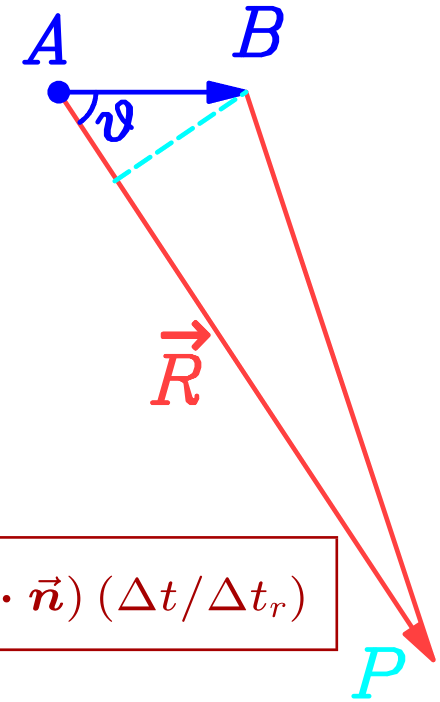
在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r=(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=?$$ 如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

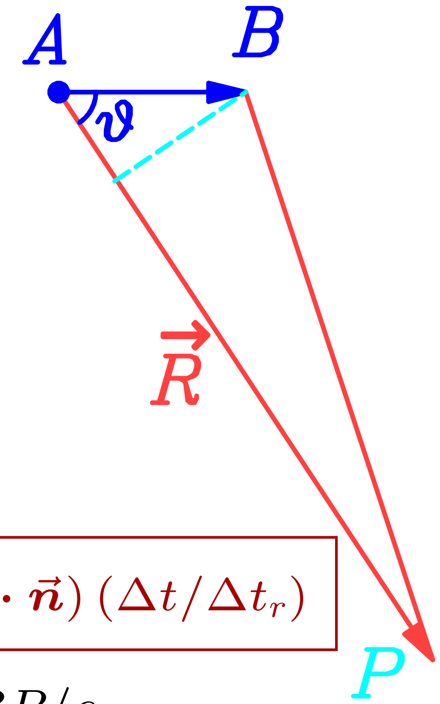
在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=?$$ 如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

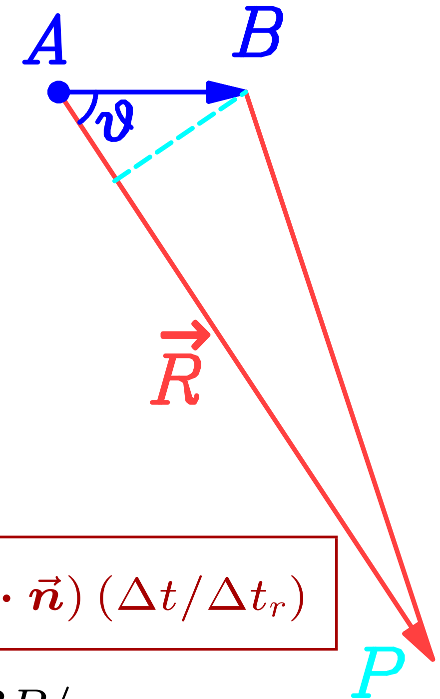
能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

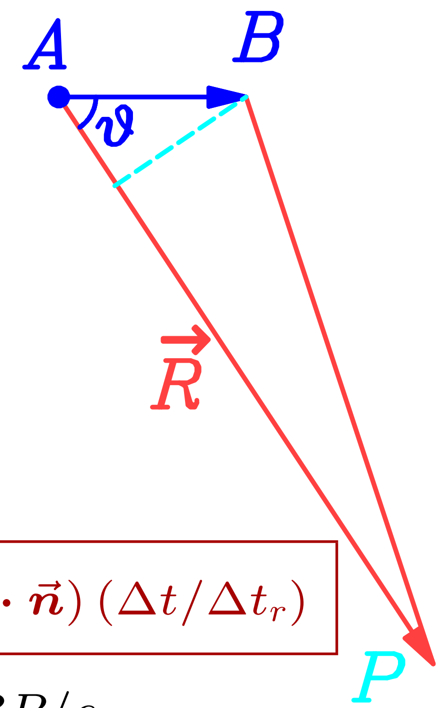
求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi)=?$$

如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

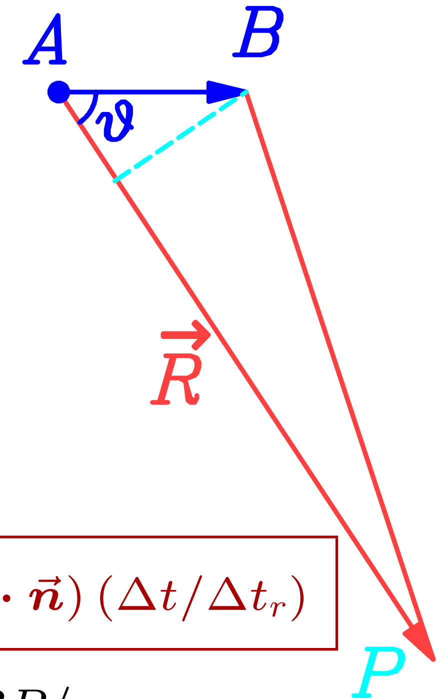
求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

代入：$t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

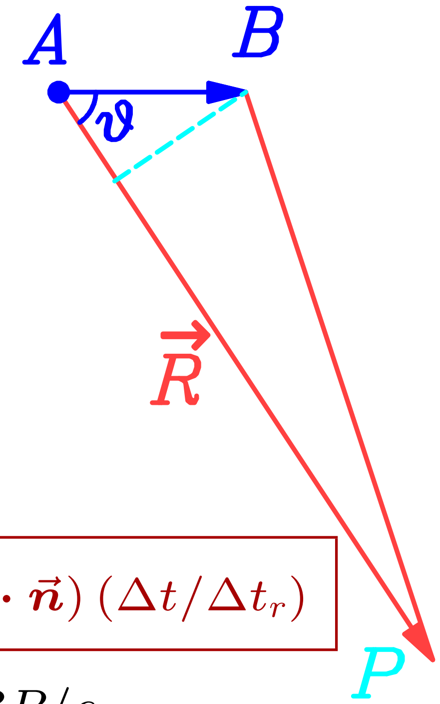
求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

代入：$t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

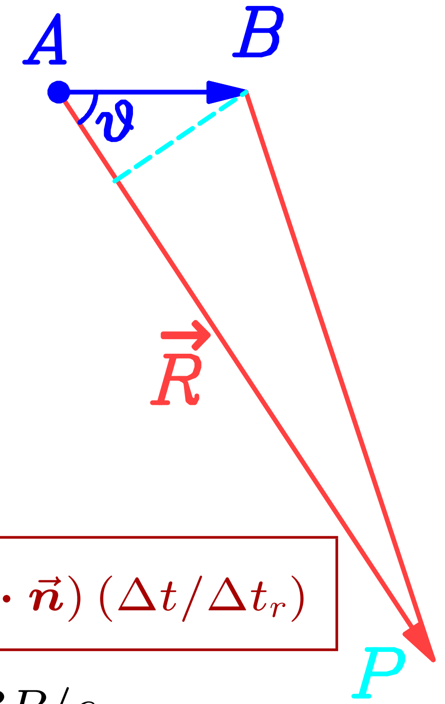
代入：$t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

联立：$t = t_r - \dfrac{R}{c}$ 得 $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_r} = 1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ?$$ 如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q \Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

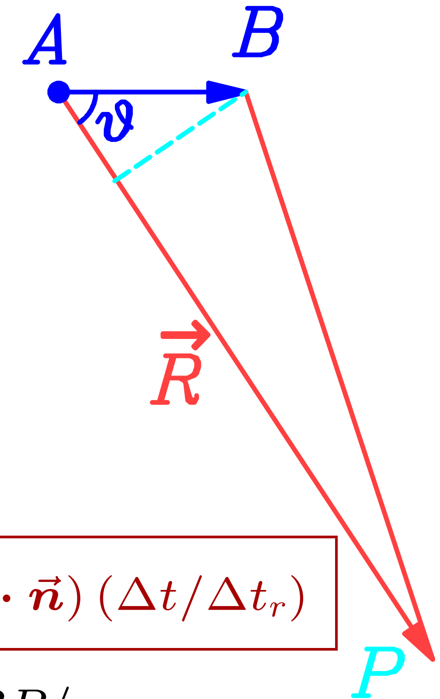
代入：$t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

联立：$t = t_r - \dfrac{R}{c}$ 得 $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_r} = 1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} = \left(\dfrac{\partial t_r}{\partial t}\right)^{-1}$,

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{S}\cdot\vec{n}, \qquad f(\theta,\phi)=? \qquad \text{如图}$$



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{S}\cdot\vec{n})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{S}\cdot\vec{n})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{S}\cdot\vec{n})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

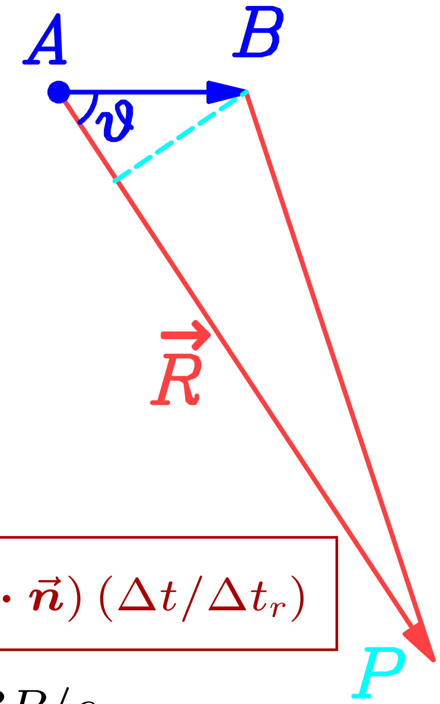
代入：$t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

联立：$t = t_r - \dfrac{R}{c}$ 得 $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_r} = 1 - \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{v}_q}{c} = \left(\dfrac{\partial t_r}{\partial t}\right)^{-1}$, $\qquad v_q\cos\theta = \vec{v}_q\cdot\vec{n}, \quad \vec{n} = \dfrac{\vec{R}}{R}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ?$$ 如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

代入：$t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

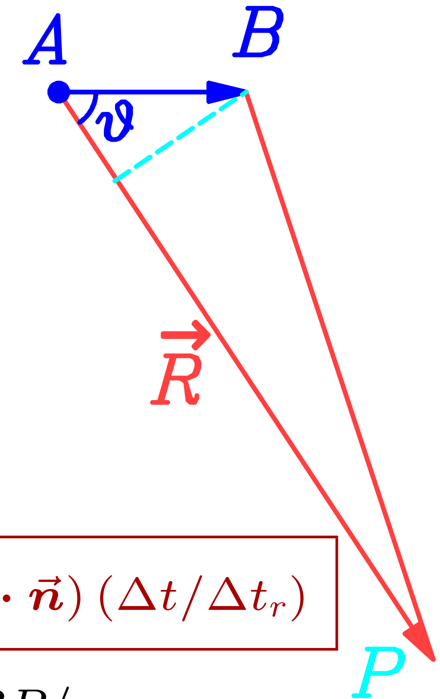
联立：$t = t_r - \dfrac{R}{c}$ 得 $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_r} = 1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} = \left(\dfrac{\partial t_r}{\partial t}\right)^{-1}, \qquad v_q\cos\theta = \vec{\boldsymbol{v}}_q \cdot \vec{\boldsymbol{n}}, \quad \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}$

从而：$\boxed{f(\theta,\phi) = R^2\left(1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_q}{c}\right)(\vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}})}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

结论：粒子在 t_r 时刻单位时间辐射出去的能量不等于观察者在 t 时刻单位时间接受到的能量

$$\frac{f(\theta,\phi)}{R^2} \neq \vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \qquad f(\theta,\phi) = ?$$ 如图



在 t_r 时刻粒子在 A 点，经过很小的 Δt_r 时刻，粒子运动到 B

在此过程粒子辐射到观察点 P 的能量为：$f(\theta,\phi)\Delta t_r$

粒子在 A 点辐射的能量将于 t 时刻到达 P，

在 B 辐射的能量将于 $t+\Delta t$ 时刻到达 P

在观察点 P 接收到的粒子从 A 到 B 过程辐射的能量为：$(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t$

能量守恒，故：$f(\theta,\phi)\Delta t_r = (\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})R^2\,\Delta t \implies \boxed{f(\theta,\phi) = R^2(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})\,(\Delta t/\Delta t_r)}$

电磁能量以光速传播，故：$t_r = t - R/c, \qquad t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - BP/c$

求辐射能量时，可取 $R \gg AB = v_q\Delta t_r$，从而：$BP = R - AB\cos\theta = R - v_q\Delta t_r\cos\theta$

代入：$t+\Delta t = t_r+\Delta t_r - BP/c \implies t+\Delta t = t_r + \Delta t_r - (R - v_q\Delta t_r\cos\theta)/c$

联立：$t = t_r - \dfrac{R}{c}$ 得 $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_r} = 1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c} = \left(\dfrac{\partial t_r}{\partial t}\right)^{-1}$, $\quad v_q\cos\theta = \vec{\boldsymbol{v}}_q\cdot\vec{\boldsymbol{n}}, \quad \vec{\boldsymbol{n}} = \dfrac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}$

从而：$\boxed{f(\theta,\phi) = R^2\left(1 - \dfrac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}}_q}{c}\right)(\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}})}$

以上页 $\vec{\boldsymbol{S}}$, $\vec{\boldsymbol{E}}$ 代入即可得

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi) = \dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$,

$$\vec{\boldsymbol{n}} = \vec{\boldsymbol{R}}/R$$
$$\vec{\boldsymbol{u}} = c\,\vec{\boldsymbol{n}} - \vec{\boldsymbol{v}}_q$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\displaystyle\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad \text{—— Lienard 公式}}$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$,

$$\vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$$
$$\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad \text{— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\ \vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad \text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{n}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{n}\cdot\vec{u})^5}$, $\vec{n}=\vec{R}/R$, $\vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{a}^2-\left|\frac{\vec{v}_q\times\vec{a}}{c}\right|^2\right) \quad \text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}}=\vec{a}\,||\,\hat{e}_z$

这时有：$\vec{u}\times\vec{a}=c\,\vec{n}\times\vec{a}$,

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{n}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{n}\cdot\vec{u})^5}$, $\quad \vec{n}=\vec{R}/R$, $\vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{a}^2-\left|\frac{\vec{v}_q\times\vec{a}}{c}\right|^2\right)\quad \text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}}=\vec{a}\,||\,\hat{e}_z$

这时有：$\vec{u}\times\vec{a}=c\,\vec{n}\times\vec{a}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2}{(c-\vec{n}\cdot\vec{v})^5}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{n}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{n}\cdot\vec{u})^5}$, $\vec{n}=\vec{R}/R$, $\vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{a}^2-\left|\frac{\vec{v}_q\times\vec{a}}{c}\right|^2\right)\quad\text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}}=\vec{a}\,||\,\hat{e}_z$

这时有：$\vec{u}\times\vec{a}=c\,\vec{n}\times\vec{a}$, $\Longrightarrow$ $f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2}{(c-\vec{n}\cdot\vec{v})^5}$

利用：$\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})=(\vec{n}\cdot\vec{a})-\vec{a}$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{n}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{n}\cdot\vec{u})^5}$, $\quad \vec{n}=\vec{R}/R$, $\vec{u}=c\,\vec{n}-\vec{v}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{a}^2-\left|\frac{\vec{v}_q\times\vec{a}}{c}\right|^2\right)\quad \text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}}=\vec{a}\,||\,\hat{e}_z$

这时有：$\vec{u}\times\vec{a}=c\,\vec{n}\times\vec{a}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2}{(c-\vec{n}\cdot\vec{v})^5}$

利用：$\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})=(\vec{n}\cdot\vec{a})-\vec{a}\quad\Longrightarrow\quad[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2=\vec{a}^2-(\vec{n}\cdot\vec{a})^2$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi) = \dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{n}\times(\vec{u}\times\vec{a})|^2}{(\vec{n}\cdot\vec{u})^5}$, $\quad \vec{n} = \vec{R}/R$, $\quad \vec{u} = c\,\vec{n} - \vec{v}_q$

辐射功率：$P = \int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega = \int f(\theta,\phi)\sin\theta \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \cdots$

$$\boxed{P = \frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{a}^2 - \left|\frac{\vec{v}_q\times\vec{a}}{c}\right|^2\right) \quad \text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{v}\,||\,\dot{\vec{v}} = \vec{a}\,||\,\hat{e}_z$

这时有：$\vec{u}\times\vec{a} = c\,\vec{n}\times\vec{a}, \quad \Longrightarrow \quad f(\theta,\phi) = \dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2}{(c-\vec{n}\cdot\vec{v})^5}$

利用：$\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a}) = (\vec{n}\cdot\vec{a}) - \vec{a} \quad \Longrightarrow \quad [\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{a})]^2 = \vec{a}^2 - (\vec{n}\cdot\vec{a})^2$

$$f(\theta,\phi) = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5}$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

这时有：$\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2}{(c-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^5}$

利用：$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{a}}\quad\Longrightarrow\quad[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2=\vec{\boldsymbol{a}}^2-(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})^2$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^6}{6\pi c},$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\displaystyle\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

这时有：$\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2}{(c-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^5}$

利用：$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{a}}\quad\Longrightarrow\quad[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2=\vec{\boldsymbol{a}}^2-(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})^2$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0 q^2a^2}{16\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^6}{6\pi c},\qquad \beta=v/c$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\displaystyle\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0 q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{—— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

这时有：$\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}}$, $\Longrightarrow$ $f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2}{(c-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^5}$

利用：$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{a}}$ $\Longrightarrow$ $[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2=\vec{\boldsymbol{a}}^2-(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})^2$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^6}{6\pi c},\qquad \beta=v/c$$

同步辐射 (synchrotron radiation)：$\vec{\boldsymbol{v}}\perp\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{e}}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cos\theta$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

这时有：$\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2}{(c-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^5}$

利用：$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{a}}\quad\Longrightarrow\quad[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2=\vec{\boldsymbol{a}}^2-(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})^2$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^6}{6\pi c},\qquad \beta=v/c$$

同步辐射 (synchrotron radiation)：$\vec{\boldsymbol{v}}\perp\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{e}}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cos\theta$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi]}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow$$

(5) 任意运动粒子的辐射（续）

任意运动粒子辐射能量角分布：$f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{|\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}})|^2}{(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{u}})^5}$, $\quad \vec{\boldsymbol{n}}=\vec{\boldsymbol{R}}/R$, $\quad \vec{\boldsymbol{u}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}-\vec{\boldsymbol{v}}_q$

辐射功率：$P=\int f(\theta,\phi)\,\mathrm{d}\Omega=\int f(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi=\cdots$

$$\boxed{P=\frac{\mu_0q^2\gamma^6}{6\pi c}\left(\vec{\boldsymbol{a}}^2-\left|\frac{\vec{\boldsymbol{v}}_q\times\vec{\boldsymbol{a}}}{c}\right|^2\right)\quad\text{— Lienard 公式}}$$

低速时退化为 Larmor 公式

韧致辐射 (braking radiation, bremsstahlung)：$\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}=\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$

这时有：$\vec{\boldsymbol{u}}\times\vec{\boldsymbol{a}}=c\,\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}}$, $\quad\Longrightarrow\quad f(\theta,\phi)=\dfrac{q^2c^2}{16\pi^2\epsilon_0}\dfrac{[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2}{(c-\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{v}})^5}$

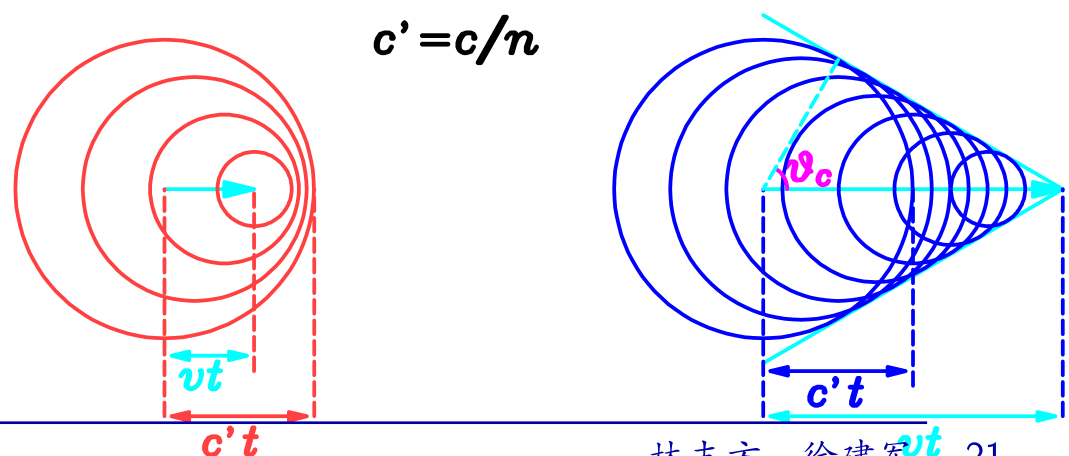
利用：$\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})=(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{a}}\quad\Longrightarrow\quad[\vec{\boldsymbol{n}}\times(\vec{\boldsymbol{n}}\times\vec{\boldsymbol{a}})]^2=\vec{\boldsymbol{a}}^2-(\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})^2$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\int f(\theta,\phi)\mathrm{d}\Omega=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^6}{6\pi c},\qquad \beta=v/c$$

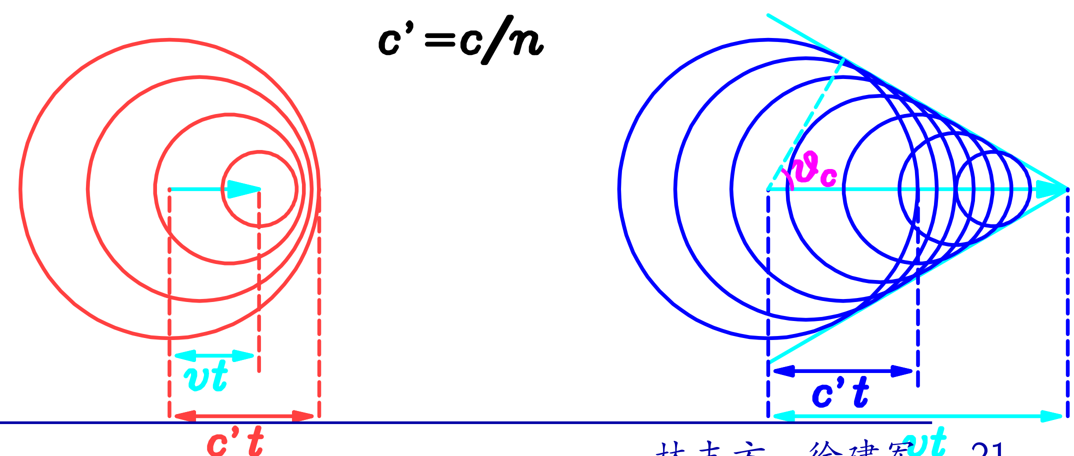
同步辐射 (synchrotron radiation)：$\vec{\boldsymbol{v}}\perp\dot{\vec{\boldsymbol{v}}}$, $\quad\vec{\boldsymbol{v}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $\vec{\boldsymbol{a}}\,||\,\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{e}}_x\sin\theta\cos\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_y\sin\theta\sin\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_z\cos\theta$

$$f(\theta,\phi)=\frac{\mu_0q^2a^2}{16\pi^2c}\frac{[(1-\beta\cos\theta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\theta\cos^2\phi]}{(1-\beta\cos\theta)^5},\quad\Longrightarrow\quad P=\frac{\mu_0q^2a^2\gamma^4}{6\pi c}$$

Let there be light

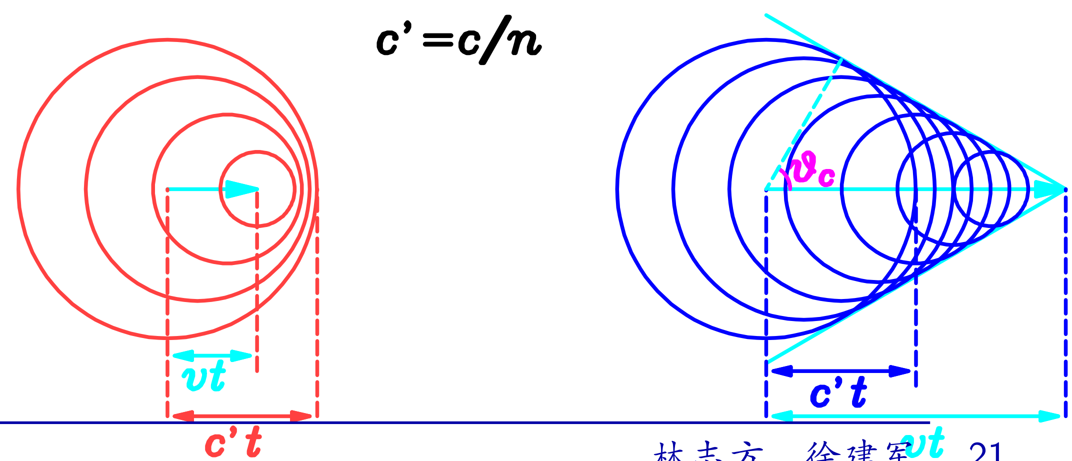


(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

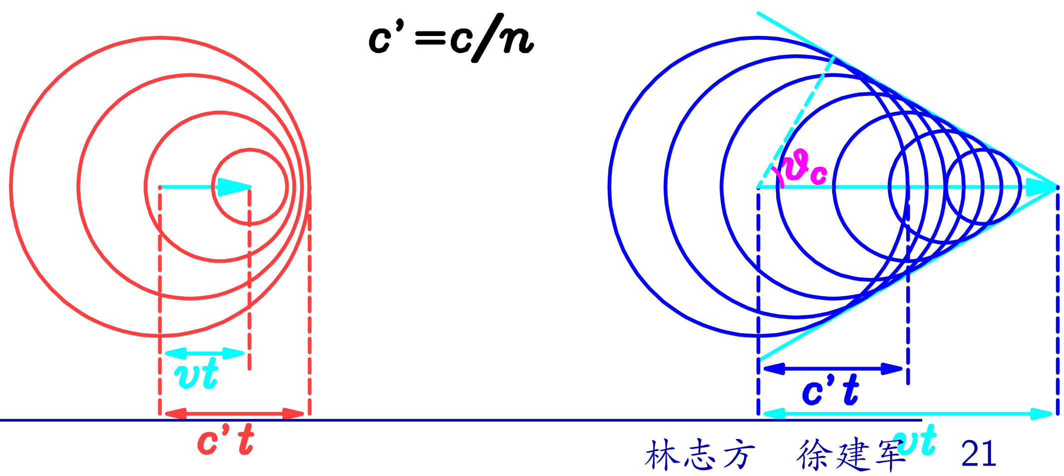
1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

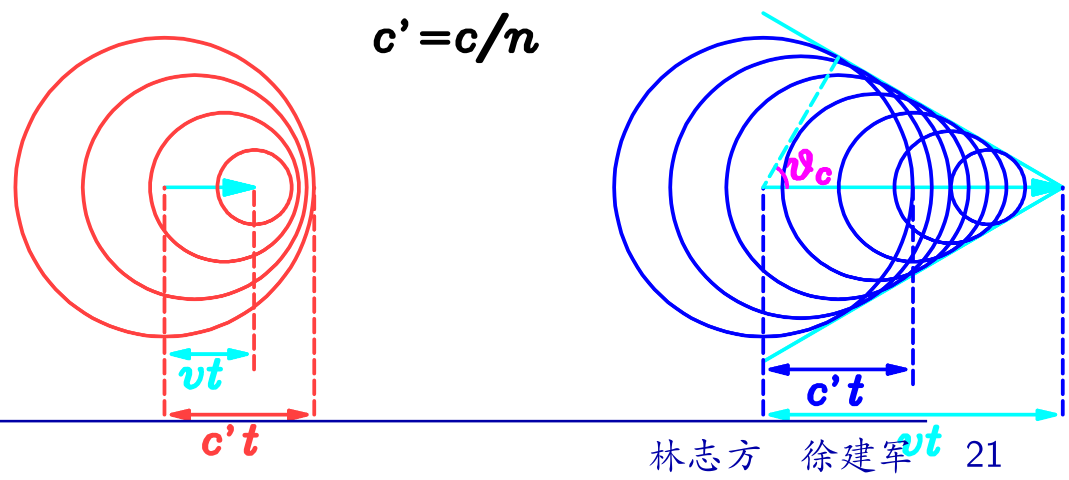


(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现， 1937 Frank、Tamm 理论解释， 1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。



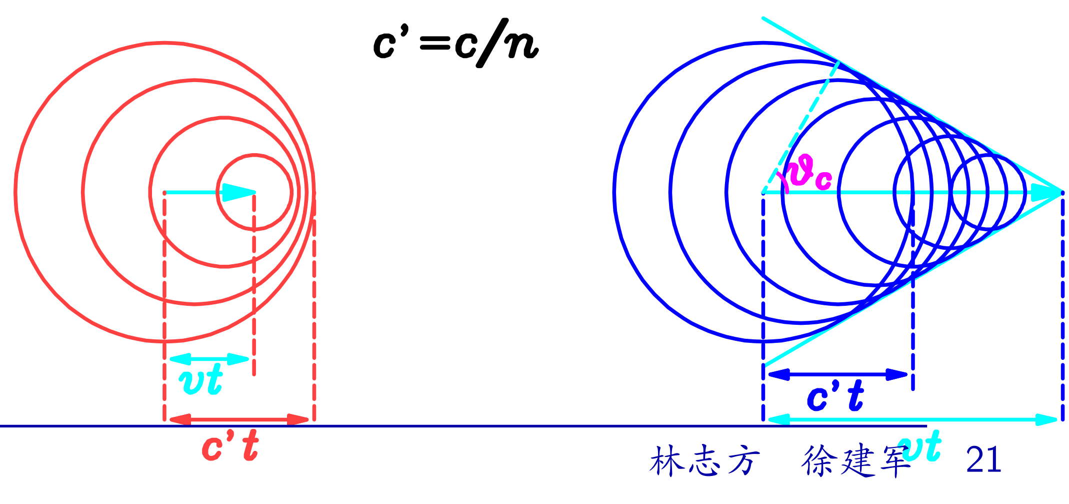
(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现， 1937 Frank、Tamm 理论解释， 1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

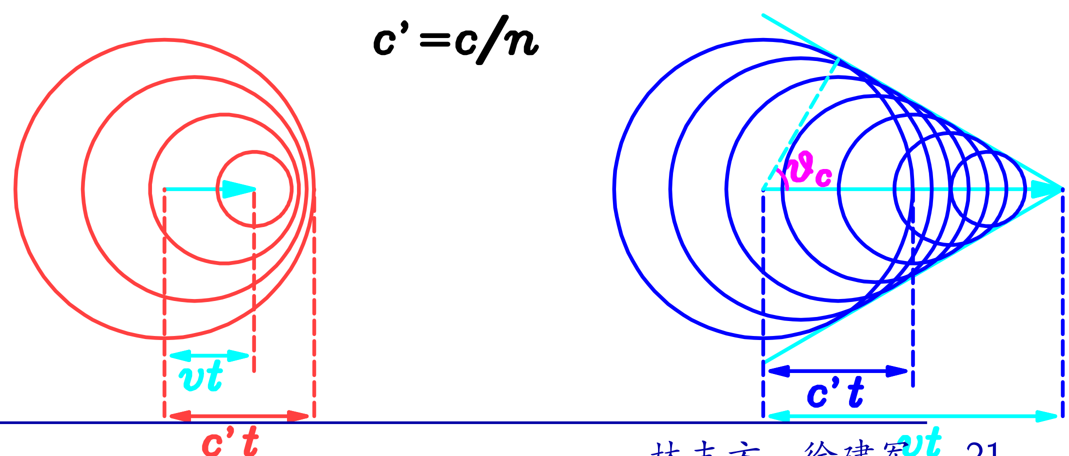
1934: Cerenkov 发现， 1937 Frank、Tamm 理论解释， 1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，   1937 Frank、Tamm 理论解释，   1958 分享诺贝尔物理奖

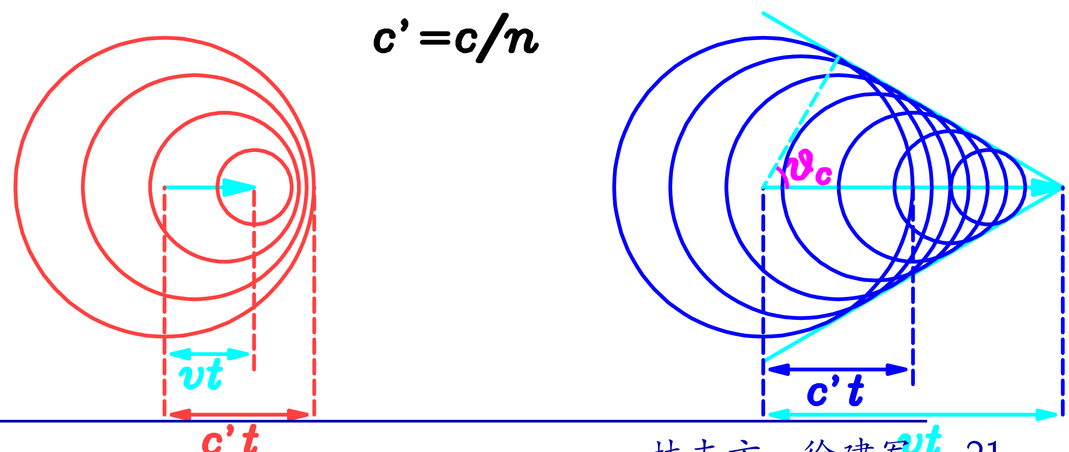
1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

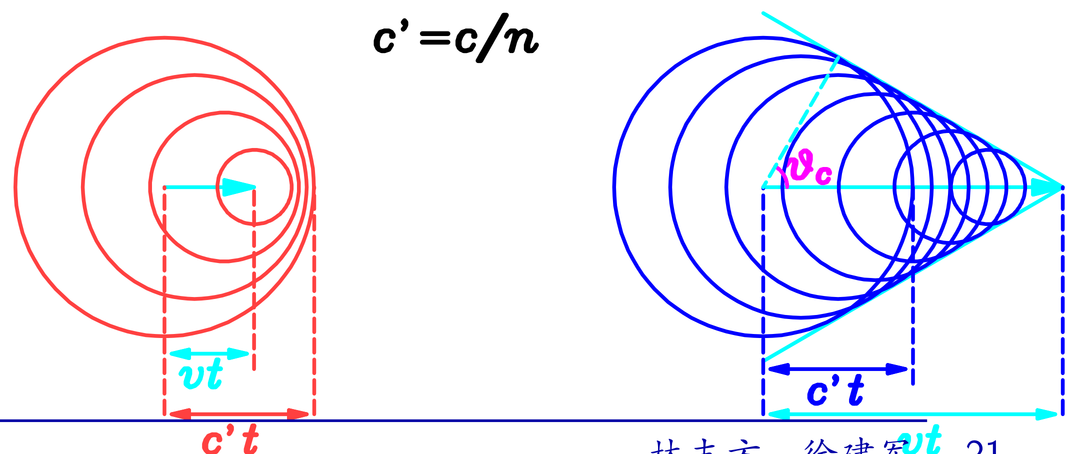
物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

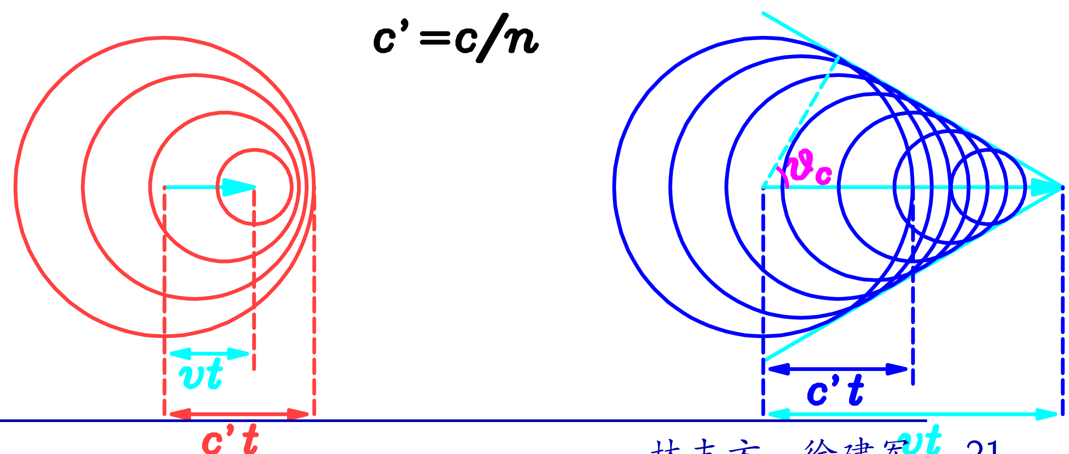
物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$　　—— 切伦科夫角。



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

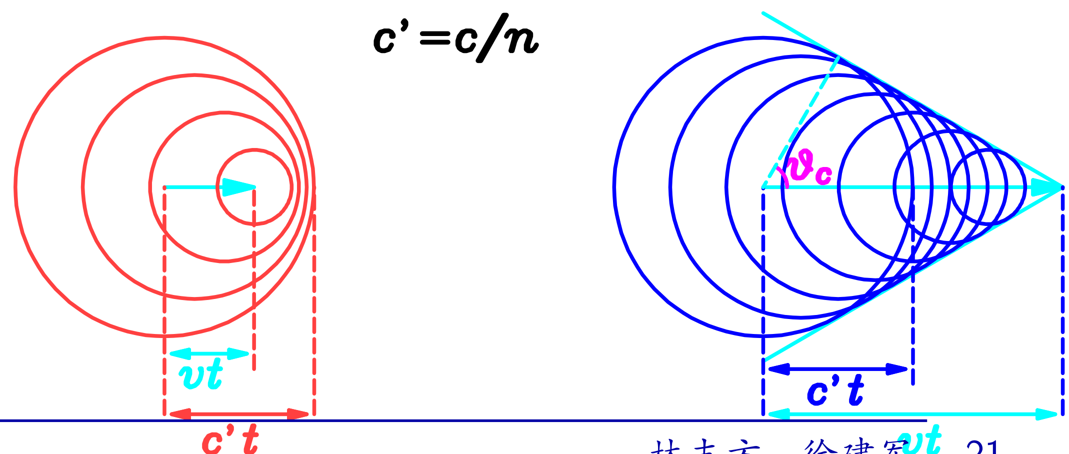
球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$　　—— 切伦科夫角。

是否辐射？



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

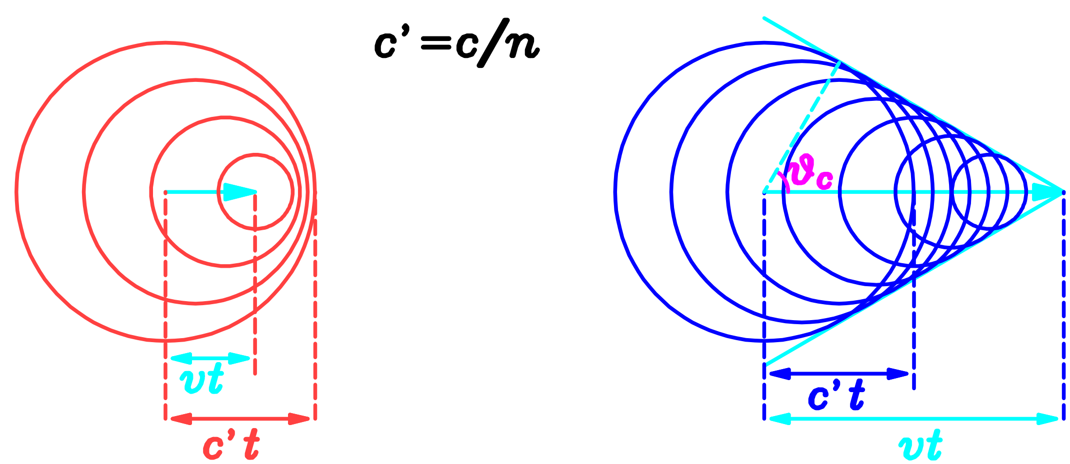
球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$ —— 切伦科夫角。

是否辐射？ $\displaystyle\oint_{闭合面\, S} \vec{n} \cdot \vec{S}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　1937 Frank、Tamm 理论解释，　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

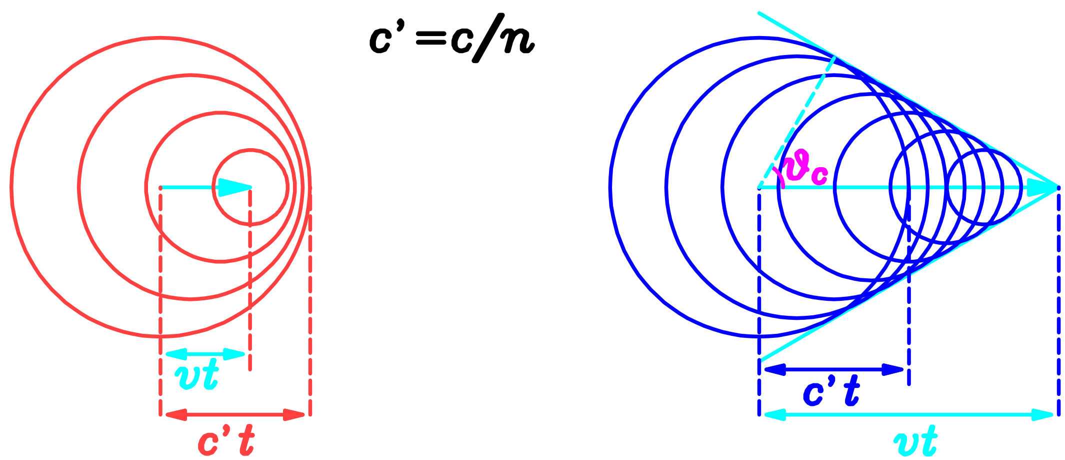
若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$ —— 切伦科夫角。

是否辐射？ $\displaystyle\oint_{\text{闭合面 } S} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma \neq 0$

为何辐射？电荷在两个不同时刻激发的场同时到达空间某点。



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\boldsymbol{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　1937 Frank、Tamm 理论解释，　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

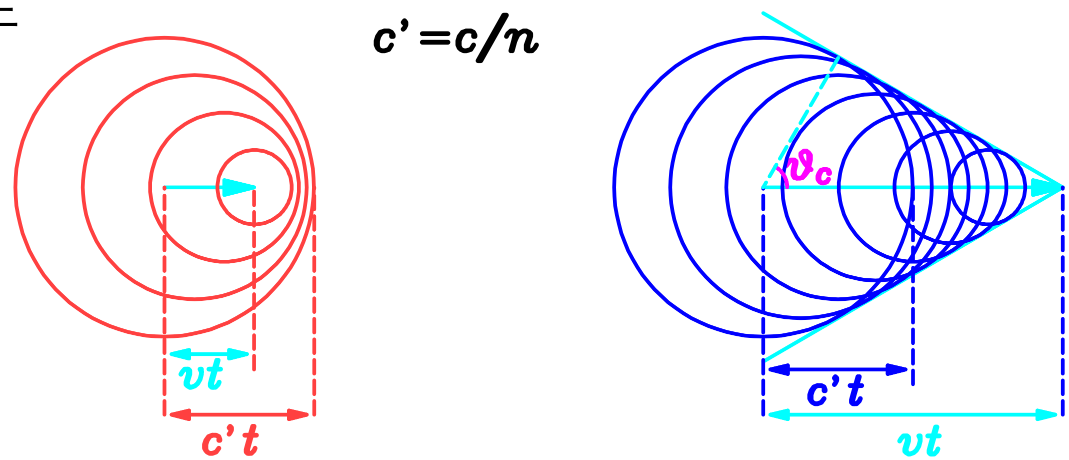
若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$ —— 切伦科夫角。

是否辐射？ $\displaystyle\oint_{\text{闭合面 } S} \vec{\boldsymbol{n}} \cdot \vec{\boldsymbol{S}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

为何辐射？电荷在两个不同时刻激发的场同时到达空间某点。

数学形式：粒子的 L-W 势有两项，对应于两个不同的辐射时刻。



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}} = 0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　1937 Frank、Tamm 理论解释，　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p = c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v < c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

若电子运动速度 $v > c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

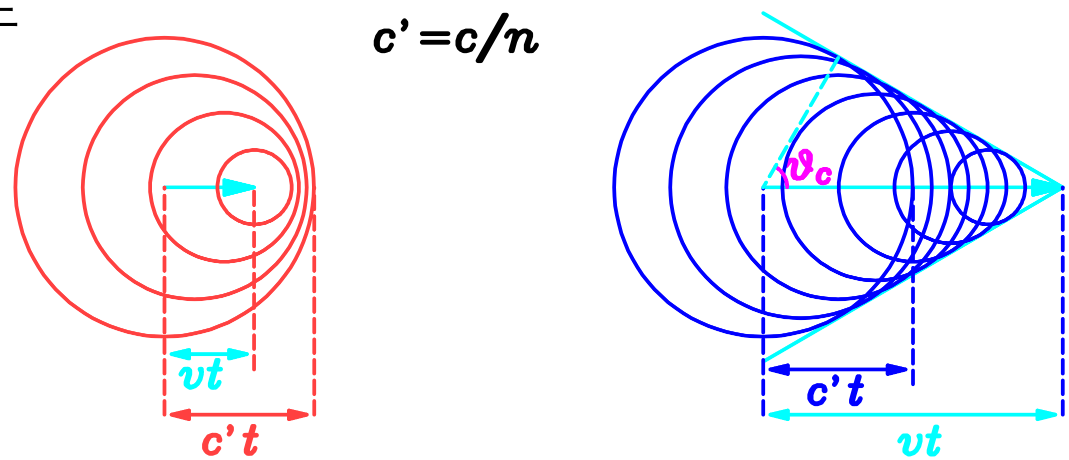
辐射方向：$\cos\theta_c = \dfrac{c/n}{v}$ —— 切伦科夫角。

是否辐射？ $\displaystyle\oint_{\text{闭合面 } S} \vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma \neq 0$

为何辐射？电荷在两个不同时刻激发的场同时到达空间某点。

数学形式：粒子的 L-W 势有两项，对应于两个不同的辐射时刻。

反向切伦科夫辐射



(6) 切伦科夫辐射 (Cerenkov radiation)：$\dot{\vec{v}}=0$, 但粒子速度大于粒子所在介质中的光速

1934: Cerenkov 发现，　　1937 Frank、Tamm 理论解释，　　1958 分享诺贝尔物理奖

1934 切伦科夫发现，液体在 γ 射线作用下发出淡蓝紫色光。

物理机制：γ 在液体中打出电子，高速运动电子引起介质分子极化，辐射出球面次波。

球面次波在介质中以相速度 $v_p=c/n$ 传播。

若电子运动速度 $v<c/n$，各点发出的次波不相干，观察不到辐射。如左图

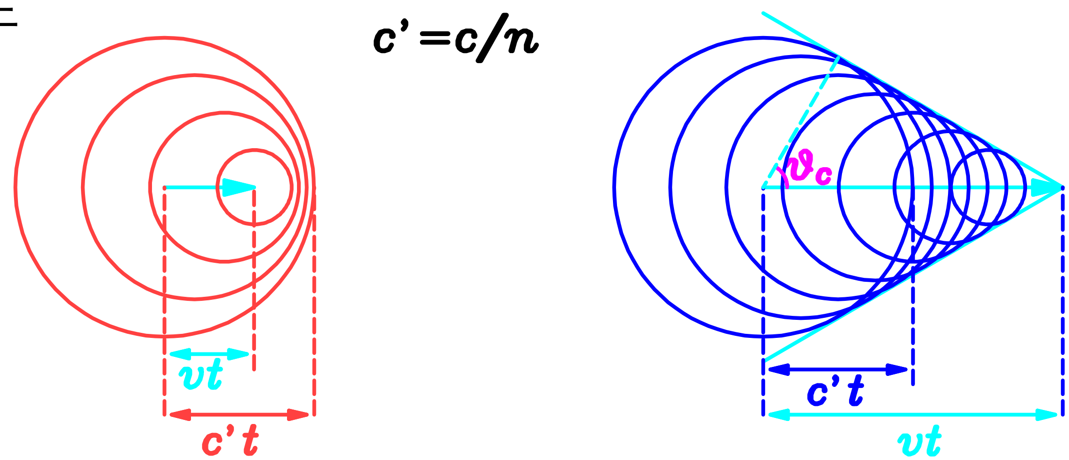
若电子运动速度 $v>c/n$，球面次波相干，在特定方向上可观察到辐射。如右图

辐射方向：$\cos\theta_c=\dfrac{c/n}{v}$ —— 切伦科夫角。

是否辐射？ $\displaystyle\oint_{\text{闭合面 } S}\vec{n}\cdot\vec{S}\,\mathrm{d}\sigma\neq 0$

为何辐射？电荷在两个不同时刻激发的场同时到达空间某点。

数学形式：粒子的 L-W 势有两项，对应于两个不同的辐射时刻。



反向切伦科夫辐射

—— SCIENCE **299**, 368(2003)