§2.7 规范变换规范不变性

§2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f, \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

§2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}\qquad \vec{A}\text{：矢势（矢量势）}$$

代入电场的旋度方程，

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程，

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0$$

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程，

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$$

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程，

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$$

$\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$ 为无旋场，引入标势：φ

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程，

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$$

$\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$ 为无旋场，引入标势：φ

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$$

§ 2.7 规范变换规范不变性

一、$\vec{A}$、φ 的引入

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho_f,\qquad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad \nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}}\qquad \vec{A}\text{：矢势（矢量势）}$$

代入电场的旋度方程，

$$\nabla\times\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{A}]=0\quad\Longrightarrow\quad\nabla\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=0$$

$\left[\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]$ 为无旋场，引入标势：φ

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\vec{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$$

二、规范变换

二、规范变换

$$(\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \xleftrightarrow{\text{一一对应？}} \quad (\vec{\boldsymbol{A}}, \varphi)$$

二、规范变换

$$(\vec{\boldsymbol{E}}, \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \overset{\text{一一对应？}}{\longleftrightarrow} \quad (\vec{\boldsymbol{A}}, \varphi)$$

变换

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases}$$

二、规范变换

$$(\vec{\boldsymbol{E}},\ \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \xleftrightarrow{\text{一一对应？}} \quad (\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$$

变换

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{A}}\,' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

易证：$(\vec{\boldsymbol{A}}\,',\ \varphi')$ 和 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$ 对应于同一个场 $(\vec{\boldsymbol{B}},\ \vec{\boldsymbol{E}})$。

$$\vec{\boldsymbol{B}}\,' = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}\,' = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\,' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}\,'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = \vec{\boldsymbol{E}}$$

二、规范变换

$$(\vec{\boldsymbol{E}},\ \vec{\boldsymbol{B}}) \quad \xleftrightarrow{\text{一一对应？}} \quad (\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$$

变换

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{A}} \to \vec{\boldsymbol{A}}\,' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

易证：$(\vec{\boldsymbol{A}}\,',\ \varphi')$ 和 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$ 对应于同一个场 $(\vec{\boldsymbol{B}},\ \vec{\boldsymbol{E}})$。

$$\vec{\boldsymbol{B}}\,' = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}\,' = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}\,' = -\nabla\varphi' - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}\,'}{\partial t} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = \vec{\boldsymbol{E}}$$

由于标量函数 Λ 是任意的，变换 (1) 表明一个场可对应无穷多组势 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$

变换 (1) 称为规范变换

规范变换：
$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{A}} \longrightarrow \vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda \\ \varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

$$\text{规范变换：}\quad \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}\,' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

规范变换：
$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须确定 Λ。不同的选择，称为不同的规范。为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须再人为地引入条件，称为规范条件。

$$\text{规范变换：}\quad \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}\,' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须确定 Λ。不同的选择，称为不同的规范。为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须再人为地引入条件，称为规范条件。　如何引入条件？

$$\text{规范变换:}\quad \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}\,' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须确定 Λ。不同的选择，称为不同的规范。为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须再人为地引入条件，称为规范条件。　如何引入条件？简化方程

$$
\text{规范变换：}\quad \begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}
$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须确定 Λ。不同的选择，称为不同的规范。为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须再人为地引入条件，称为规范条件。　如何引入条件？简化方程

三、$\vec{A}$、φ 满足的方程

$$\text{规范变换：}\quad \begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}\,' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi \to \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{cases} \tag{1}$$

经过规范变换，电磁场（以及其它可测量的物理量）及其所满足的规律（方程）不变，这称为规范不变性。

为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须确定 Λ。不同的选择，称为不同的规范。为了确定 $(\vec{A},\ \varphi)$，必须再人为地引入条件，称为规范条件。 如何引入条件？简化方程

三、$\vec{A}$、φ 满足的方程

出发点：

Maxwell 方程：

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f, \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0, \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$，$\left\{ \begin{aligned} \vec{\boldsymbol{E}} &= -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} &= \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} \end{aligned} \right.$

Let there be light

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$，$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} \end{cases}$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$，$\vec{B} = \mu \vec{H}$，$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)}_{\vec{E}} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，$\vec{B} = \mu\vec{H}$，$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \end{cases}$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\underbrace{\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}_{\vec{E}} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon\vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu\vec{\boldsymbol{H}}$，$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}} \end{cases}$

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\underbrace{(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t})}_{\vec{\boldsymbol{E}}} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \frac{\partial\vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$，$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} \end{cases}$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t})}_{\vec{\boldsymbol{E}}} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$，$\vec{B} = \mu\vec{H}$，$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \end{cases}$

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_f \quad\Rightarrow\quad \nabla\cdot\underbrace{\left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)}_{\vec{E}} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla\times\vec{H} = \vec{j}_f + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad\Rightarrow\quad \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu\vec{j}_f + \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

利用 $$\mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\nabla\left[\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right] - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

线性均匀无色散各向同性介质，$\vec{\boldsymbol{D}} = \epsilon \vec{\boldsymbol{E}}$，$\vec{\boldsymbol{B}} = \mu \vec{\boldsymbol{H}}$，$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla\varphi - \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} \\ \vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}} \end{cases}$

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{D}} = \rho_f \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \underbrace{(-\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t})}_{\vec{\boldsymbol{E}}} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{H}} = \vec{\boldsymbol{j}}_f + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \mu \vec{\boldsymbol{j}}_f + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

利用
$$\mu\epsilon\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t} = -\nabla\left[\mu\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2 \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\Rightarrow \quad -\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \mu\vec{\boldsymbol{j}}_f$$

Let there be light

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

Let there be light

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

- 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

- 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 不满足库仑规范，可选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 必满足库仑规范。

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

- 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 不满足库仑规范，可选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 必满足库仑规范。

势所满足的方程：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \mu\epsilon\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = -\mu\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

- 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 不满足库仑规范，可选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 必满足库仑规范。

势所满足的方程：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \mu\epsilon\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = -\mu\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 已满足库仑规范，仍可选取满足方程：$\nabla^2\Lambda = 0$ 的函数 Λ，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 也满足库仑规范，

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

- 库仑规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} = 0$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 不满足库仑规范，可选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}$，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 必满足库仑规范。

势所满足的方程：
$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho_f}{\epsilon} \\ \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} - \mu\epsilon\dfrac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2} - \mu\epsilon\dfrac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = -\mu\vec{\boldsymbol{j}} \end{cases}$$

如果 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 已满足库仑规范，仍可选取满足方程：$\nabla^2\Lambda = 0$ 的函数 Λ，$\vec{\boldsymbol{A}}' = \vec{\boldsymbol{A}} + \nabla\Lambda$ 也满足库仑规范，库仑规范不足于消除规范自由度

- 洛伦兹规范：

- 洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{A}} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Let there be light

- 洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\\&\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}\end{aligned}}$$

- 洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{j}$$

如果 $(\vec{A},\ \varphi)$ 不满足洛伦兹规范

- **洛伦兹规范：**

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\\ &\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}\end{aligned}}$$

如果 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$ 不满足洛伦兹规范

选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\Theta$

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{\boldsymbol{A}}'=\vec{\boldsymbol{A}}+\nabla\Lambda\\ &\varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right.$$ 必满足洛伦兹规范。

- 洛伦兹规范：

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\varphi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ &\nabla^2\vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \mu\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{j} \end{aligned}}$$

如果 $(\vec{A},\ \varphi)$ 不满足洛伦兹规范

选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda - \mu\epsilon\frac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\Theta$

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \\ \varphi' = \varphi - \dfrac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{cases}$$

必满足洛伦兹规范。势方程：

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\varphi - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \\ &\nabla^2\vec{A} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{j} \end{aligned}}$$

- **洛伦兹规范：**

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

如果 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$ 不满足洛伦兹规范

选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\Theta$

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{A}}'=\vec{\boldsymbol{A}}+\nabla\Lambda\\ \varphi'=\varphi-\dfrac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{cases}$$

必满足洛伦兹规范。势方程：

$$\nabla^2\varphi-\mu\epsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}=-\mu\vec{\boldsymbol{j}}$$

如果 $(\vec{\boldsymbol{A}},\ \varphi)$ 已满足洛伦兹规范，仍可选取 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=0$

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{A}}'=\vec{\boldsymbol{A}}+\nabla\Lambda\\ \varphi'=\varphi-\dfrac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{cases}$$

也满足洛伦兹规范。

- 洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\\&\nabla^2\vec{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\vec{j}\end{aligned}}$$

如果 $(\vec{A},\ \varphi)$ 不满足洛伦兹规范

选取函数 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=-\nabla\cdot\vec{A}-\mu\epsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=-\Theta$

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda\\&\varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

必满足洛伦兹规范。势方程：

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla^2\varphi-\mu\epsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho_f}{\epsilon}\\&\nabla^2\vec{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{j}\end{aligned}}$$

如果 $(\vec{A},\ \varphi)$ 已满足洛伦兹规范，仍可选取 Λ 满足方程：$\nabla^2\Lambda-\mu\epsilon\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial t^2}=0$

$$\left\{\begin{aligned}&\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\Lambda\\&\varphi'=\varphi-\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}\right.$$

也满足洛伦兹规范。洛伦兹规范也不足于消除规范自由度