第六章：电磁波的辐射

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

$$\text{辐射场：}\ P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$$

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

在真空：$\vec{\boldsymbol{E}} \sim 1/r, \quad \vec{\boldsymbol{B}} \sim 1/r$

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{S} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

在真空：$\vec{E} \sim 1/r, \quad \vec{B} \sim 1/r \quad \Longrightarrow$ 辐射功率 $P_{\mathrm{rad}} = \lim_{r\to\infty} P(r) \neq 0$

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

在真空：$\vec{\boldsymbol{E}} \sim 1/r, \quad \vec{\boldsymbol{B}} \sim 1/r \quad \Longrightarrow$ 辐射功率 $P_{\text{rad}} = \lim_{r\to\infty} P(r) \neq 0$

—— 要激发辐射场，需要外界提供能量

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场：——变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

在真空：$\vec{\boldsymbol{E}} \sim 1/r, \quad \vec{\boldsymbol{B}} \sim 1/r \quad \Longrightarrow$ 辐射功率 $P_{\text{rad}} = \lim_{r\to\infty} P(r) \neq 0$

—— 要激发辐射场，需要外界提供能量

- § 6.1 辐射电磁场的势

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r)=\oint_{\mathcal{S}_r}\vec{\boldsymbol{S}}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma=\oint_{\mathcal{S}_r}(\vec{\boldsymbol{E}}\times\vec{\boldsymbol{H}})\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma\neq 0$

在真空：$\vec{\boldsymbol{E}}\sim 1/r,\quad \vec{\boldsymbol{B}}\sim 1/r \quad\Longrightarrow$ 辐射功率 $P_{\mathrm{rad}}=\lim_{r\to\infty}P(r)\neq 0$

—— 要激发辐射场，需要外界提供能量

- §6.1 辐射电磁场的势
- §6.2 推迟势

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

$$\text{辐射场：}\; P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$$

$$\text{在真空：}\; \vec{\boldsymbol{E}} \sim 1/r, \quad \vec{\boldsymbol{B}} \sim 1/r \quad \Longrightarrow \quad \text{辐射功率}\; P_{\mathrm{rad}} = \lim_{r\to\infty} P(r) \neq 0$$

—— 要激发辐射场，需要外界提供能量

- §6.1 辐射电磁场的势
- §6.2 推迟势
- §6.3 谐变电荷电流分布的多极辐射

第六章：电磁波的辐射

辐射：变化的电荷电流分布产生变化的场，变化的场互相激励，使远离源的空间也存在场。

辐射场： —— 变化的电荷电流分布产生的场，称为辐射场?

问题：对静止电荷或/和稳定电流，在远离源的空间也存在场 —— 静场

辐射场与静场的区别：前者随时间改变，随时间便就一定是辐射场吗?

辐射场：$P(r) = \oint_{\mathcal{S}_r} \vec{\boldsymbol{S}} \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\mathcal{S}_r} (\vec{\boldsymbol{E}} \times \vec{\boldsymbol{H}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma \neq 0$

在真空：$\vec{\boldsymbol{E}} \sim 1/r, \quad \vec{\boldsymbol{B}} \sim 1/r \quad \Longrightarrow$ 辐射功率 $P_{\mathrm{rad}} = \lim_{r \to \infty} P(r) \neq 0$

—— 要激发辐射场，需要外界提供能量

- § 6.1 辐射电磁场的势
- § 6.2 推迟势
- § 6.3 谐变电荷电流分布的多极辐射
- § 6.4 运动点电荷的场

§6.1 辐射电磁场的势

§6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、 变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

§6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{B}=\nabla\times\vec{A}} \qquad \vec{A}\text{：矢势（矢量势）}$$

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}}$$

$\vec{A}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 得，

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\vec{\boldsymbol{A}}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$ 得，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}]=0$$

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\vec{\boldsymbol{A}}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$ 得，

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \left[\vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right] = 0$$

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\vec{\boldsymbol{A}}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$ 得，

$$\nabla \times \vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial}{\partial t}[\nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla \times \left[\vec{\boldsymbol{E}} + \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right] = 0$$

$\left[\vec{\boldsymbol{E}} + \dfrac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right]$ 为无旋场

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\vec{\boldsymbol{A}}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$ 得，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}]=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\left[\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right]=0$$

$\left[\vec{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right]$ 为无旋场

引入标势：$\vec{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}=-\nabla\varphi$

§ 6.1 辐射电磁场的势

一、变化电磁场的矢势和标势

要求解辐射场，出发点：Maxwell 方程。简单起见，仅讨论真空中的辐射场。由于磁感应强度 $\vec{B}$ 是无散场，根据矢量场定理

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{B}}=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}}$$

$\vec{\boldsymbol{A}}$：矢势（矢量势）

代入电场的旋度方程：$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}=-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}$ 得，

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}]=0 \quad\Longrightarrow\quad \nabla\times\left[\vec{\boldsymbol{E}}+\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right]=0$$

$\left[\vec{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}\right]$ 为无旋场

引入标势：$\vec{\boldsymbol{E}}+\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}=-\nabla\varphi \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{\boldsymbol{E}}=-\nabla\varphi-\dfrac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t}}$

φ：标势（标量势）

二、达朗贝尔方程

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§ 2.7）

洛伦兹规范：
$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

洛伦兹规范：
$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

达朗贝尔方程：
$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}\end{aligned}}$$

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

洛伦兹规范： $\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

达朗贝尔方程：

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{j}\end{aligned}}$$

由 $\vec{A}$ 和 φ 所满足的方程可看到，选取洛伦兹规范的优点是

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

洛伦兹规范：
$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

达朗贝尔方程：
$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{j}\end{aligned}}$$

由 $\vec{A}$ 和 φ 所满足的方程可看到，选取洛伦兹规范的优点是

(1)　方程退耦，矢势决定于电流 $\vec{j}$，标势决定于电荷 ρ，可分别求解

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

洛伦兹规范： $$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

达朗贝尔方程：
$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{j}\end{aligned}}$$

由 $\vec{A}$ 和 φ 所满足的方程可看到，选取洛伦兹规范的优点是

(1) 方程退耦，矢势决定于电流 $\vec{j}$，标势决定于电荷 ρ，可分别求解

(2) 矢势方程和标势方程简单对称，只需求解一个方程，其余类似得解

二、达朗贝尔方程

引入矢势和标势后，场由势表示，求场的问题归结为求矢势和标的问题。

势所满足的方程与规范条件有关，对辐射场，常取洛伦兹规范，这时势满足的方程为达朗贝尔方程（参阅：§2.7）

洛伦兹规范： $\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

达朗贝尔方程：

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \nabla^2\vec{A}-\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\vec{j}\end{aligned}}$$

由 $\vec{A}$ 和 φ 所满足的方程可看到，选取洛伦兹规范的优点是

(1) 方程退耦，矢势决定于电流 $\vec{j}$，标势决定于电荷 ρ，可分别求解

(2) 矢势方程和标势方程简单对称，只需求解一个方程，其余类似得解

最后，求得达朗贝尔方程的解后，须验证其满足洛伦兹规范才能保证是真正的解

§6.2 推迟势

§6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

泊松方程的解为：

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

泊松方程的解为：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

泊松方程的解为：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

从上一章知，真空中电磁波以光速 c 传播，因此可以“猜想” $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处观察到的势应该是电荷、电流在前一时刻：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 产生的。

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

泊松方程的解为：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

从上一章知，真空中电磁波以光速 c 传播，因此可以“猜想” $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处观察到的势应该是电荷、电流在前一时刻：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 产生的。

从而达氏方程的解很可能就是：推迟势

§ 6.2 推迟势

要求得矢势和标势，须求解达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

对于静态问题，达氏方程退化为泊松方程：$\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \nabla^2\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$

泊松方程的解为：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

从上一章知，真空中电磁波以光速 c 传播，因此可以“猜想” $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处观察到的势应该是电荷、电流在前一时刻：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 产生的。

从而达氏方程的解很可能就是：推迟势

$$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$, $\quad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：推迟场？

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：推迟场?

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：推迟场?

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

现在验证是否满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：推迟场？

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \overset{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \overset{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

现在验证是否满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范：$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,', \quad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$$

达朗贝尔 (d'Alembert) 方程：

$$\Box^2\varphi \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2\vec{\boldsymbol{A}} \equiv \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{\boldsymbol{A}} = -\mu_0\vec{\boldsymbol{j}}$$

的解是推迟势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau',\qquad \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$

其中：$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$。 —— 这只是一个猜想，需要验证。

思考： 为什么是势推迟，而不是场推迟：推迟场？

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,')}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

现在验证是否满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范： $\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$

$$\begin{aligned}\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,', \quad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) \;= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{R}\,\nabla\rho + \rho\,\nabla\,\frac{1}{R}\right]\,\mathsf{d}\tau',$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) \;=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\,\nabla\rho+\rho\,\nabla\,\frac{1}{R}\right]\,\mathsf{d}\tau',\qquad t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\nabla\frac{1}{R}\right]\,\mathsf{d}\tau',$$

$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$

$\nabla\rho$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau',$$

$$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathsf{d}\tau',$$

$$t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\,\nabla\frac{1}{R}\right] \mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t - \frac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathsf{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t - \frac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau',\qquad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t - \frac{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \quad\Longrightarrow$$

$$\nabla\rho = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol r}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol r}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol r}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol r}-\vec{\boldsymbol r}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol r}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol r}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol R}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol R}}{R} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol R}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol R}}{R}\end{aligned}}$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\end{aligned}}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

Let there be light

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\end{aligned}}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau',\qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \implies \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\end{aligned}}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} &= \frac{1}{R^2}\\ \nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} &= 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}})\end{aligned}}$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho + \rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{r}\,',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{r}\,',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R} \implies \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R}\end{aligned}}$$

$$\nabla\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^2} &= \frac{1}{R^2}\\ \nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3} &= 4\pi\delta(\vec{R})\end{aligned}}$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{R}}{R^2}\cdot\nabla\dot\rho + \dot\rho\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^2}\right] - \left[\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\right]$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{1}{R}\nabla\rho+\rho\,\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

$$\nabla\rho = \nabla\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla t_r = \frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla\overbrace{\left(t-\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}\right)}^{t_r}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\nabla R = -\frac{1}{c}\frac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{\partial t_r}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} = -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R} \implies \boxed{\begin{aligned}\nabla\rho &= -\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\\ \nabla\dot\rho &= -\frac{\ddot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\end{aligned}}$$

$$\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} &= \frac{1}{R^2}\\ \nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} &= 4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{R}})\end{aligned}}$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right] = -\frac{1}{c}\left[\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}\cdot\nabla\dot\rho+\dot\rho\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}\right]-\left[\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-\frac{\dot\rho}{c\,R^2}\right]-\left[-\frac{\dot\rho}{c\,R^2}+4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}})\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}})$$

Let there be light

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} - \rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathsf{d}\tau',$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} - \rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) \quad = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}),$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\,\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}), \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}), \qquad t_r = t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

从而 $$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} - \rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2} - \rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{R} - 4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}), \qquad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

从而 $\nabla^2\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int\dfrac{\ddot{\rho}}{R}\mathrm{d}\tau' - \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \dfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R} - 4\pi\rho\delta(\vec{R}), \qquad t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

从而 $$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

推迟势 $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R} - 4\pi\rho\delta(\vec{R}), \qquad t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

从而 $\nabla^2\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$

推迟势 $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R} - 4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}), \qquad t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$$

从而 $$\nabla^2\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

(1) 超前势： $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_a)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}\mathrm{d}\tau', \qquad t_a = t + \frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|}{c}$

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2} - \rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R} - 4\pi\rho\delta(\vec{R}), \qquad t_r = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

从而 $\nabla^2\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau' - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$

推迟势 $\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{A}(\vec{r},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

(1) 超前势：$\varphi(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau', \qquad t_a = t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

类似可证，超前势也满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范

$$\nabla^2\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^2}-\rho\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\right]=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{\boldsymbol{R}}), \qquad t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$$

从而 $\nabla^2\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\int\frac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau'-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)$

推迟势 $\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

(1) 超前势：$\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_a)}{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}\mathrm{d}\tau'$, $\quad t_a=t+\frac{|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|}{c}$

类似可证，超前势也满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范

故超前势也满足 Maxwell 方程，

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{\rho}}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{R}), \qquad t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

从而 $$\nabla^2\varphi=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{c^2}\int\frac{\ddot{\rho}}{R}\mathrm{d}\tau'-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$$

推迟势 $\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

(1) 超前势：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$, $\qquad t_a=t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

类似可证，超前势也满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范

故超前势也满足 Maxwell 方程，但因果律 (principle of causality) 要求取推迟势。

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]\mathrm{d}\tau', \qquad \varphi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\left[-\frac{\dot\rho}{c}\frac{\vec{R}}{R^2}-\rho\frac{\vec{R}}{R^3}\right]=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot\rho}{R}-4\pi\rho\delta(\vec{R}), \qquad t_r=t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c$$

从而 $\nabla^2\varphi=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int\dfrac{\ddot\rho}{R}\mathrm{d}\tau'-\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\dfrac{1}{\epsilon_0}\rho(\vec{r},t)$

推迟势 $\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 满足 d'Alembert 方程

类似可证 $\vec{A}(\vec{r},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$ 也满足 d'Alembert 方程

讨论：

(1) 超前势：$\varphi(\vec{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(\vec{r}\,',t_a)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\tau'$, $\qquad t_a=t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$

类似可证，超前势也满足 d'Alembert 方程和洛伦兹规范

故超前势也满足 Maxwell 方程，但因果律 (principle of causality) 要求取推迟势。

可以证明：对初值问题，只要初始场能量有限，必对应于推迟势。(Am. J. Phys. **60** 465)

(2) 洛伦兹规范条件

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\vec{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\vec{A}}(\boldsymbol{\vec{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{\vec{j}}(\boldsymbol{\vec{r}}',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau'$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\right]\,\mathrm{d}\tau'\end{aligned}$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)-\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\right\}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)-\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\right\}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)-\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\right]\right\}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)-\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\Big|_{t_r\ \text{不变}}\right]\right\}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\Big|_{t_r\ \text{不变}}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{\boldsymbol{n}}\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\mathrm{d}\sigma+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\Big|_{t_r\ \text{不变}}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\Big|_{t_r\ \text{不变}}\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)-\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\right\}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\,\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\sigma+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\,\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\,\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t_r}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)-\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\right\}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\mathrm{d}\sigma+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t_r}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\underbrace{\left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\text{ 不变}}+\frac{\partial}{\partial t_r}\rho(\vec{r}\,',t_r)\right]}_{\text{电荷守恒：此式为 0}}\mathrm{d}\tau'$$

(2) 洛伦兹规范条件

满足 d'Alembert 方程并不能保证一定是 Maxwell 方程的解，还需满足洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\nabla\cdot\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left\{-\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\cdot\nabla'\frac{1}{R}-\frac{1}{R}\left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)-\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\right]\right\}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[-\nabla'\cdot\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}+\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\right]\mathrm{d}\tau' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{\vec{n}\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\mathrm{d}\sigma+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\mathrm{d}\tau' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}\mathrm{d}\tau'
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial t_r}\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\mathrm{d}\tau'$$

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R}\underbrace{\left[\nabla'\cdot\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)\Big|_{t_r\,\text{不变}}+\frac{\partial}{\partial t_r}\rho(\vec{r}\,',t_r)\right]}_{\text{电荷守恒：此式为 0}}\mathrm{d}\tau'=0$$

(3) 电磁作用的有限速度传播

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R}\, \mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场
依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 处 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时间

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 处 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)&=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}\\&=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2}-\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{c^2R}\right]\mathrm{d}\tau'\end{aligned}\tag{1}$$

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2}-\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{c^2R}\right]\mathrm{d}\tau' \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)$$

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场

依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{c^2 R}\right]\mathrm{d}\tau' \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau' \qquad (2)$$

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R} \, \mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r = t - |\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}}, t) - \frac{\partial \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\, \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)\, \vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{c^2 R} \right] \mathrm{d}\tau' \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \nabla \times \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{cR^2} \right] \times \vec{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}\tau' \qquad (2)$$

方程 (1 – 2) 称为 Jefimenko 方程，

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2}-\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{c^2R}\right]\mathrm{d}\tau' \qquad (1)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R^3}+\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau' \qquad (2)$$

方程 (1 – 2) 称为 Jefimenko 方程，表明尽管描述电磁场的矢势和标势可写成推迟形式，电磁场并不能简单地写成推迟形式。

(3) 电磁作用的有限速度传播

推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$ 表明 $\vec{\boldsymbol{r}}$ 处 t 时刻的场依赖于 $\vec{\boldsymbol{r}}\,'$ 处 $t_r=t-|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时刻的源，推迟了 $|\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}\,'|/c$ 时间

$\Longrightarrow$ 反映了电磁作用在真空中确实以有限速度光速 c 传播

(4) Jefimenko 方程

求得矢势和标势，即可求得电磁场：

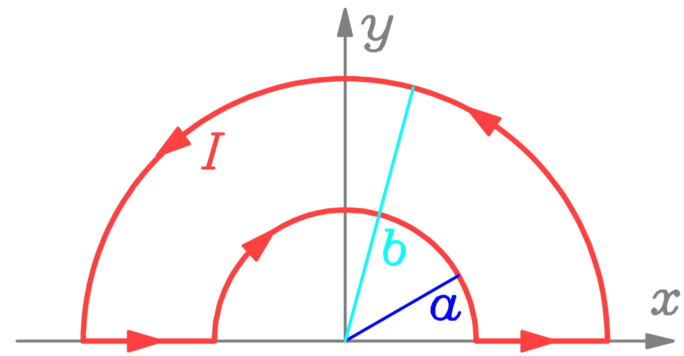
$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-\nabla\varphi(\vec{\boldsymbol{r}},t)-\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{cR^2}-\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{c^2R}\right]\mathrm{d}\tau' \qquad (1)$$

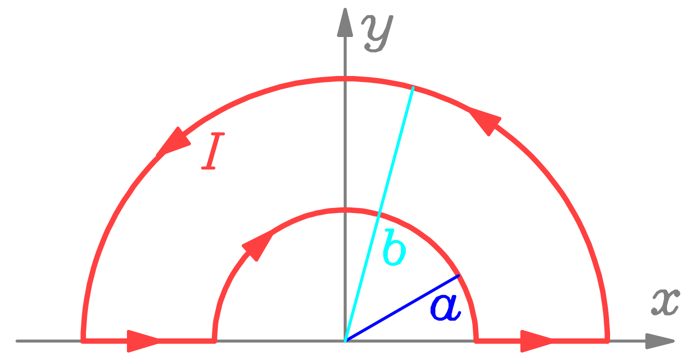
$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\nabla\times\vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{R^3}+\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,',t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau' \qquad (2)$$

方程 (1 – 2) 称为 Jefimenko 方程，表明尽管描述电磁场的矢势和标势可写成推迟形式，电磁场并不能简单地写成推迟形式。例如，如果电场只是简单的推迟形式[(1) 式的第一项]，则该电场显然没有包括由于磁场随时间改变而激发的那部分感应电场。类似地，磁场的推迟形式 [(2) 式的第一项] 也没有包括由于电场随时间变化而激发的那部分磁场。

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t) = kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。

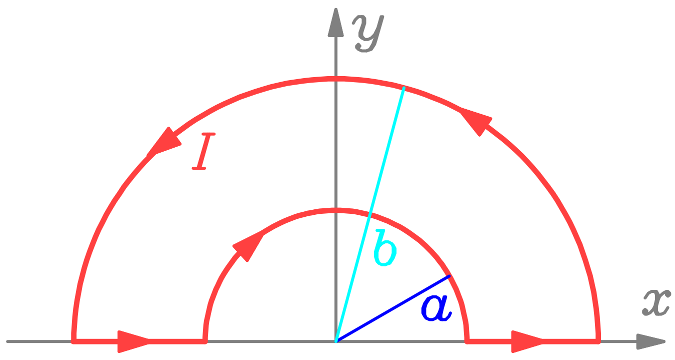


例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t) = kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



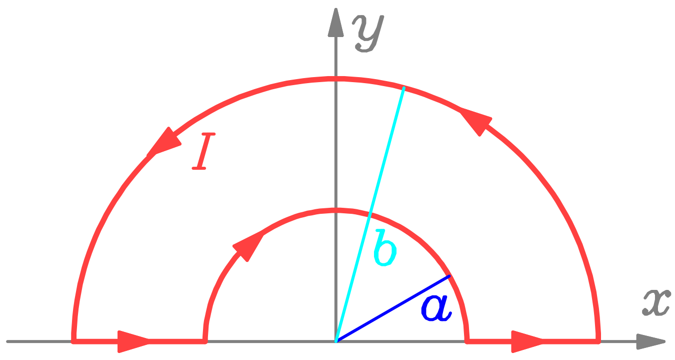
推迟势：$\vec{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



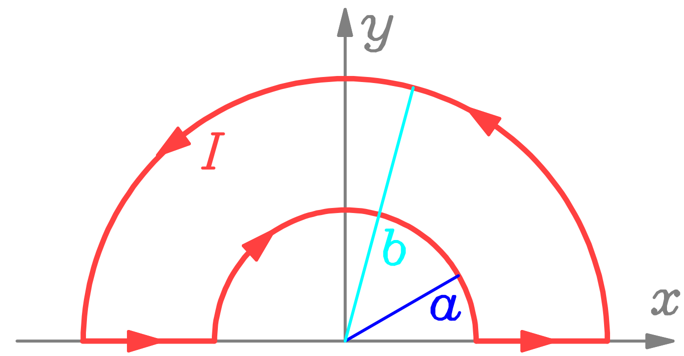
推迟势：$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{I}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



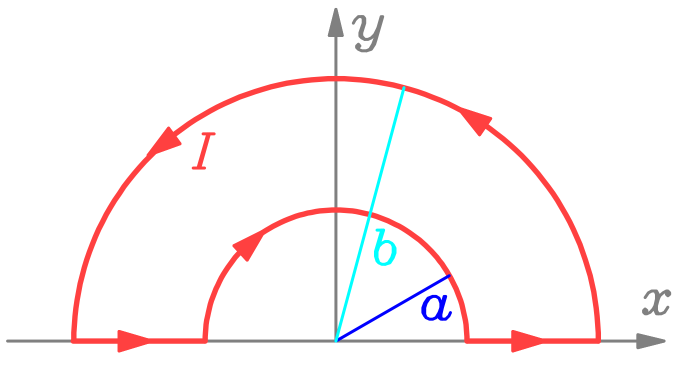
推迟势：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}(\vec{r}\,',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int\frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



推迟势：
$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{A}} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{I}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int\frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}}{R}-\frac{1}{c}\oint\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}\right)\end{aligned}$$

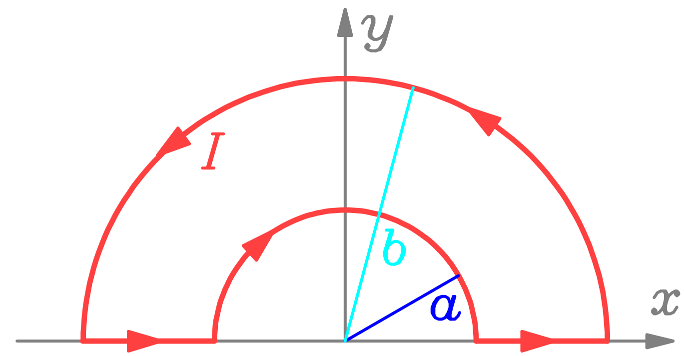
例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



推迟势：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t) = kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。

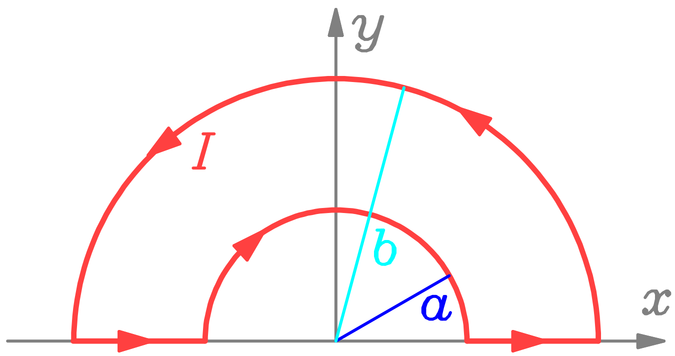


推迟势：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t - R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$= \frac{\mu_0 k t}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。

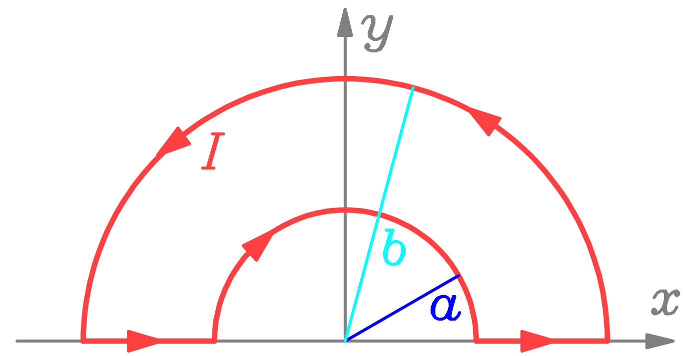


推迟势：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$$
$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b} + \frac{2a}{a} + 2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。

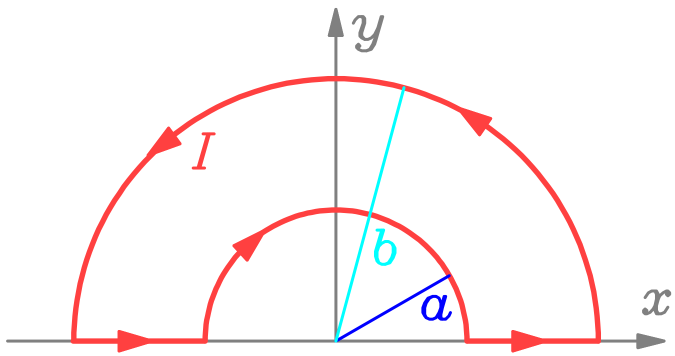


推迟势：
$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}(\vec{r}',t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l} \\
&= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int\frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l} \\
&= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R}-\frac{1}{c}\oint\mathrm{d}\vec{l}\right) \\
&= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b}+\int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b}+\int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x+\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right] \\
&= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b}+\frac{2a}{a}+2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x
\end{aligned}$$

对闭合线圈，$\oint\mathrm{d}\vec{l}=0$

$$\Longrightarrow\quad \vec{A}=\frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t) = kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



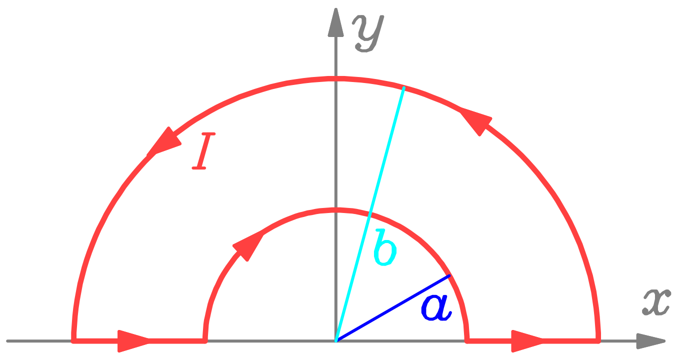
推迟势：
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t - R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$
$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$= \frac{\mu_0 k t}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$$
$$= \frac{\mu_0 k t}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b} + \frac{2a}{a} + 2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad\Longrightarrow\quad \vec{A} = \frac{\mu_0 k t}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

推迟势：
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



推迟势：$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

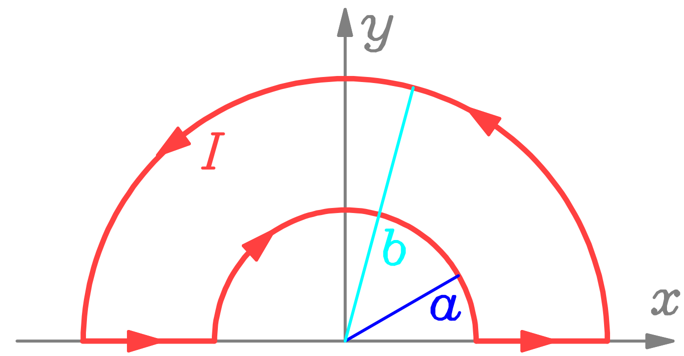
$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$$

$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b} + \frac{2a}{a} + 2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad \Longrightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

推迟势：$\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 k}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$

体系电中性，电场来自磁场的变化。

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



推迟势：$\vec{A}$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}', t_r)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l} \\ &= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right) \\ &= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right] \\ &= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b} + \frac{2a}{a} + 2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad\Longrightarrow\quad \vec{A} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln(b/a)\;\hat{\boldsymbol{e}}_x\end{aligned}$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

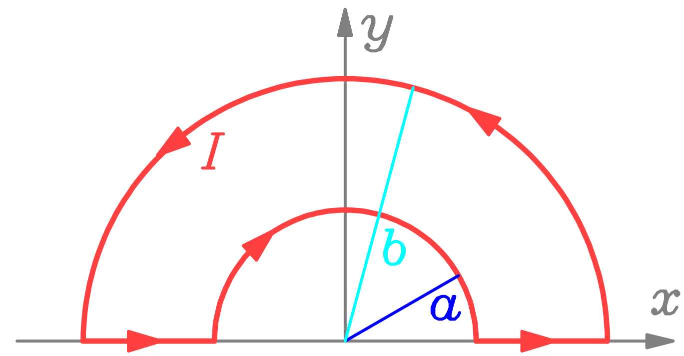
推迟势：$\vec{E}$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi}\ln(b/a)\;\hat{\boldsymbol{e}}_x$$

体系电中性，电场来自磁场的变化。

也可从 Jefimenko 方程求

例 1：如图所示电中性线圈中流有线性增加的电流 $I(t)=kt$，求坐标原点处的电场，并说明电场的来源。



推迟势：$\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\, \mathrm{d}\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}(\vec{r}\,', t_r)}{R}\, \mathrm{d}\vec{l}$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\int \frac{(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \frac{\mu_0 k}{4\pi}\left(t\oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{R} - \frac{1}{c}\oint \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

对闭合线圈，$\oint \mathrm{d}\vec{l} = 0$

$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\int_{C_b}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{C_a}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{b} + \int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x}\,\hat{\boldsymbol{e}}_x\right]$$

$$= \frac{\mu_0 kt}{4\pi}\left[\frac{-2b}{b} + \frac{2a}{a} + 2\ln\frac{b}{a}\right]\hat{\boldsymbol{e}}_x \quad\Longrightarrow\quad \vec{A} = \frac{\mu_0 kt}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$$

推迟势：$\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 k}{2\pi}\ln(b/a)\ \hat{\boldsymbol{e}}_x$

体系电中性，电场来自磁场的变化。

也可从 Jefimenko 方程求 $\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{r}\,',t_r)\,\vec{R}}{R^3} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_r)\,\vec{R}}{cR^2} - \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,',t_r)}{c^2R}\right]\mathrm{d}\tau'$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z,$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z,$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s,ϕ,z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R=\sqrt{s^2+z^2} \text{ 故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z=\sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}},$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s,ϕ,z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}},$$

利用：$\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R=\sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z=\sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}},$$ 利用：$\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R,$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}\ \text{故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：}\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2} \quad \text{故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：}\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(s,t) = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z, \qquad s < ct$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2} \text{ 故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：} \delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{A}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{e}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_z, \qquad s < ct$$

$$\vec{B}(s,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{e}_\phi = -\frac{\mu_0 q_0 c s}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_\phi, \qquad s < ct$$

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2}\ \text{故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：}\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{A}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{e}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_z, \qquad s < ct$$

$$\vec{B}(s,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{e}_\phi = -\frac{\mu_0 q_0 c s}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_\phi, \qquad s < ct$$

电磁场以光速传播，对空间一点 s，$t < s/c$ 时场还没有传递过来，电磁场为 0。

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2} \text{ 故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：}\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{A}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{e}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_z, \qquad s < ct$$

$$\vec{B}(s,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{e}_\phi = -\frac{\mu_0 q_0 c s}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_\phi, \qquad s < ct$$

电磁场以光速传播，对空间一点 s，$t < s/c$ 时场还没有传递过来，电磁场为 0。

当 $t = s/c$ 时出现电磁场峰值，此后电磁场衰减，时间足够长时，分别以 t^{-2} 和 t^{-3} 幂次衰减。

例 2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{A}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{e}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R=\sqrt{s^2+z^2}$$ 故被积函数是偶函数

$$\vec{A}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z=\sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}},$$ 利用：$\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{e}_z}{2\pi}\int_s^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{A}(s,t) = \begin{cases}\dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{e}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s<ct\\ 0 & s>ct\end{cases}$$

$$\vec{E}(s,t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_z, \qquad s<ct$$

$$\vec{B}(s,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{e}_\phi = -\frac{\mu_0 q_0 c s}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{e}_\phi, \qquad s<ct$$

电磁场以光速传播，对空间一点 s，$t<s/c$ 时场还没有传递过来，电磁场为 0。

当 $t=s/c$ 时出现电磁场峰值，此后电磁场衰减，时间足够长时，分别以 t^{-2} 和 t^{-3} 幂次衰减。

思考：脉冲电流为何不产生脉冲电磁场？

例2：无限长直导线有一电流脉冲 $I = q_0\delta(t)$，求空间电磁场。

设直导线在 z 轴，由对称性知，推迟势 $\vec{\boldsymbol{A}}$ 仅为 s，t 的函数，(s, ϕ, z) 为柱坐标。

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{4\pi}\int_{\infty}^{+\infty}\frac{q_0\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad R = \sqrt{s^2+z^2} \quad \text{故被积函数是偶函数}$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\,\mathrm{d}z, \qquad z = \sqrt{R^2-s^2} \implies \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(t-R/c)}{R}\frac{R\,\mathrm{d}R}{\sqrt{R^2-s^2}}, \qquad \text{利用：}\delta(t-R/c) = c\delta(R-ct)$$

$$= \frac{c\mu_0 q_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_z}{2\pi}\int_{s}^{+\infty}\frac{\delta(R-ct)}{\sqrt{R^2-s^2}}\,\mathrm{d}R, \qquad \vec{\boldsymbol{A}}(s,t) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 q_0 c}{2\pi}\dfrac{\hat{\boldsymbol{e}}_z}{\sqrt{(ct)^2-s^2}} & s < ct \\ 0 & s > ct \end{cases}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(s,t) = -\frac{\partial\vec{\boldsymbol{A}}}{\partial t} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z, \qquad s < ct$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}(s,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial s}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -\frac{\mu_0 q_0 c s}{2\pi[(ct)^2-s^2]^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \qquad s < ct$$

电磁场以光速传播，对空间一点 s，$t < s/c$ 时场还没有传递过来，电磁场为 0。

当 $t = s/c$ 时出现电磁场峰值，此后电磁场衰减，时间足够长时，分别以 t^{-2} 和 t^{-3} 幂次衰减。

思考：脉冲电流为何不产生脉冲电磁场？如何理解当 $ct \gg s$ 时电磁场分别以 t^{-2} 和 t^{-3} 幂次衰减

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right] \mathrm{d}\tau'$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{cR^2}\right] \mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = 0, \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0) = \dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)\, t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right] \mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = 0, \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0) = \dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)\, t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

代入电场表达式：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0) + \dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t_r}{R^2} + \frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}\right] \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{cR^2} \right] \mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = 0, \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = -[\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0) = \dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)\, t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}}, 0)$

代入电场表达式：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', 0) + \dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', 0)t_r}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', 0)}{cR} \right] \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\, \mathrm{d}\tau'$

由 $t_r = t - \dfrac{R}{c}$：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\overbrace{\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', 0) + \dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', 0)t}{R^2}}^{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}', t)} \underbrace{- \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', 0)\frac{R}{c}}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}', 0)}{cR}}_{0} \right] \frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\, \mathrm{d}\tau'$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right]\mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = 0, \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0) = \dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}},0)\,t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

代入电场表达式：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t_r}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}\right]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

由 $t_r = t - \dfrac{R}{c}$：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\overbrace{\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t}{R^2}}^{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)} \underbrace{-\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)\frac{R}{c}}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}}_{0}\right]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)\ \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r}) \implies \rho(\vec{r},t) = -[\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r})]t + \rho(\vec{r},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{r}',t_r)}{R^3}\vec{R} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}',t_r)}{cR^2}\vec{R} - \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}',t_r)}{cR^2}\right]\mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{j}}(\vec{r}',t_r) = 0, \quad \rho(\vec{r},t) = -[\nabla\cdot\vec{j}(\vec{r})]t + \rho(\vec{r},0) = \dot{\rho}(\vec{r},0)\,t + \rho(\vec{r},0)$

代入电场表达式：$\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{r}',0)+\dot{\rho}(\vec{r}',0)t_r}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}',0)}{cR}\right]\frac{\vec{R}}{R}\mathrm{d}\tau'$

由 $t_r = t - \dfrac{R}{c}$：$\vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\overbrace{\frac{\rho(\vec{r}',0)+\dot{\rho}(\vec{r}',0)t}{R^2}}^{\rho(\vec{r}',t)}\underbrace{-\frac{\dot{\rho}(\vec{r}',0)\frac{R}{c}}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}',0)}{cR}}_{0}\right]\frac{\vec{R}}{R}\mathrm{d}\tau'$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}',t)\,\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau' \quad \text{—— 无推迟效应的库仑场}$$

例3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})\implies\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t+\rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}}-\frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right]\mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)=0,\quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)=-[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t+\rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)=\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}},0)\,t+\rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

代入电场表达式：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t_r}{R^2}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}\right]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

由 $t_r=t-\dfrac{R}{c}$：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t)=\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\Bigg[\overbrace{\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t}{R^2}}^{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)}\underbrace{-\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)\frac{R}{c}}{R^2}+\frac{\dot{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}}_{0}\Bigg]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)\,\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$ —— 无推迟效应的库仑场

(2) 电流缓变，泰勒展开，略去高阶项：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)=\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t)+(t_r-t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t)+\cdots$

例 3：试证明(1)若电流恒定，体系产生的电场退化为静电库仑场; (2)若电流变化缓慢，则电流产生的磁场近似为静磁场。

(1) 电流恒定，由电荷守恒律：$\dfrac{\partial\rho(\vec{\boldsymbol{r}},t)}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \implies \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

由 Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3}\vec{\boldsymbol{R}} + \frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\vec{\boldsymbol{R}} - \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right]\mathrm{d}\tau'$

恒定电流：$\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = 0, \quad \rho(\vec{\boldsymbol{r}},t) = -[\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}})]t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0) = \dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)\,t + \rho(\vec{\boldsymbol{r}},0)$

代入电场表达式：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \left[\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t_r}{R^2} + \frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}\right]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

由 $t_r = t - \dfrac{R}{c}$：$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\left[\overbrace{\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)+\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)t}{R^2}}^{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)}\underbrace{-\frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)\frac{R}{c}}{R^2} + \frac{\dot\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',0)}{cR}}_{0}\right]\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R}\,\mathrm{d}\tau'$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}}',t)\ \vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau' \qquad \text{—— 无推迟效应的库仑场}$$

(2) 电流缓变，泰勒展开，略去高阶项：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}',t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau'$

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = \vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) + \cdots$

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \left[\dfrac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R^3} + \dfrac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{cR^2}\right] \times \vec{\boldsymbol{R}}\, \mathrm{d}\tau'$

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r)}{cR^2}\right] \times \vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau'$

由泰勒展开式：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t_r) = \dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}', t)$

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = \vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{R}\,\mathrm{d}\tau'$

由泰勒展开式：$\vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = \vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) \quad\Longrightarrow\quad \dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t_r) = \dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t)$

代入 Jefimenko 方程：$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R^3}\left[\vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) + \frac{R}{c}\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t)\right]\times\vec{R}\,\mathrm{d}\tau'$

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = \vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$\vec{B}(\vec{r}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t_r)}{cR^2}\right] \times \vec{R}\,\mathrm{d}\tau'$

由泰勒展开式：$\vec{j}(\vec{r}\,', t_r) = \vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t_r) = \dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t)$

代入 Jefimenko 方程：$\vec{B}(\vec{r}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{1}{R^3}\left[\vec{j}(\vec{r}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t) + \frac{R}{c}\dot{\vec{j}}(\vec{r}\,', t)\right] \times \vec{R}\,\mathrm{d}\tau'$

利用 $t_r - t = R/c$：$\quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t) \times \vec{R}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$ —— 无推迟效应的静磁场

(2) 电流缓变，泰勒展开：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + \cdots$

Jefimenko 方程：$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{R^3} + \frac{\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r)}{cR^2}\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau'$$

由泰勒展开式：$\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r) = \vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) \quad\Longrightarrow\quad \dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t_r) = \dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t)$

代入 Jefimenko 方程：$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{1}{R^3}\left[\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + (t_r - t)\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t) + \frac{R}{c}\dot{\vec{\boldsymbol{j}}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t)\right]\times\vec{\boldsymbol{R}}\,\mathrm{d}\tau'$$

利用 $t_r - t = R/c$：$$\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{\boldsymbol{j}}(\vec{\boldsymbol{r}}\,', t)\times\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\,\mathrm{d}\tau'$$ —— 无推迟效应的静磁场