数理方法期中考试试题　（2009年11月10日）

学号：__________　专业：__________　姓名：__________　成绩：__________

1. **简答（多重选择）题:**　（8×6 **分**）

   (1) 试将 $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ 在环域 $|z-a| > |a-b|$ 内展开为Laurent级数。

   (2) $z = \infty$ 是函数 $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z}$ 的哪一种奇点？试计算其留数 $\mathrm{Res}\big[f(\infty)\big]$。

   (3) $z = z_0$ 是函数 $f(z)$ 的孤立的 n 阶极点，求 $\big[f'(z)/f(z)\big]$ 在 z_0 的留数。

   (4) 求：$\displaystyle\int_c \frac{\mathrm{d}z}{z}$，其中 c 为从 $z = -3i$ 经过 $z = -1$ 点到 $z = 2i$ 的一段圆弧。

   (5) 设 c 为 $|z| \le 1$ 边界的正向，求：$I = \displaystyle\oint_c \frac{\mathrm{d}z}{z\sin^3 z \cos z}$

   (6) 若将 $\dfrac{e^z - 1}{(e^z+1)\cos z}$ 在 $z = 1$ 邻域展成 Taylor 级数，求该级数的收敛半径 r_c

   (7) $f(z)$ 在某区域展开为 Laurent 级数 $f(z) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$，那么：

   (a) 如 $f(z)$ 在 $z = 0$ 解析，则 $k < 0$ 时 $a_k = 0$　　(b) a_{-1} 为 $f(z)$ 在 $z = 0$ 的留数

   (c) 如 $f(z)$ 在 $z = 0$ 解析，则 $k > 0$ 时 $a_k = f^{(k)}(0)/k!$　　(d) 以上都未必正确

   (8) D 为单连通区域，c 为 D 内任一简单闭合曲线，$f(z) = u + iv$ 在 D 内解析，$f^*(z)$ 为 $f(z)$ 的复共轭，那么：

   (a) $\displaystyle\oint_c u\mathrm{d}z = 0$　　(b) $\displaystyle\oint_c u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = 0$　　(c) $\displaystyle\oint_c f'(z)\mathrm{d}z = 0$　　(d) $\displaystyle\oint_c f^*(z)\mathrm{d}z = 0$

2. （18 **分**）试确定函数 $f(z) = \dfrac{z}{e^{iz} - 1}$ 在有限远处的奇点及其类型。

3. （18 **分**）求 $I = \displaystyle\oint_C \frac{\sin e^{\frac{1}{z}}}{z}\,\mathrm{d}z$，$C$ 为 $|z| = 1$ 逆时针转一周。

4. （18 **分**）求 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$。

5. （18 **分**）取多值函数 $f(z) = \dfrac{z^p(z-1)^{1-p}}{z^2-1}$（其中 $-1 < p < 2$）的割线为连接 $z = 0$ 和 $z = 1$ 的直线段，并且在割线上岸的 $z_0 = \frac{1}{2} + i0^+$ 处，$f(z_0) = \frac{2}{3}e^{ip\pi}$，试求 $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z)$ 及 $\mathrm{Res}\big[f(\infty)\big]$。