复旦大学物理系

2008 ~ 2009 学年第一学期期末考试试卷

□ A 卷　　☒ B 卷

课程名称：数学物理方法　　课程代码：PHYS130006.01

开课院系：物理系　　考试形式：闭卷　(2010.01.12)

姓名：________　学号：________　专业：________

题号	1	2	3	4	5	总分
得分						

（可能用到的公式列在试卷下一页）

1. **简答题**:

   (1) 试用行波法求解 $b\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $(-\infty<x<+\infty)$, $u(x,0)=\psi(x)$。

   (2) 某函数 $z_n(x)$ 满足以下递推关系，试求 $z_n(x)$ 满足的微分方程

   $$[x^{n+1}z_n(x)]'=x^{n+1}z_{n-1}(x),\qquad [x^{-n}z_n(x)]'=-x^{-n}z_{n+1}(x)$$

   (3) 试对 $l=0,\ 2,\ 4$ 求：$\displaystyle\int_{-1}^{1}P_l(x)\mathrm{d}x$

   (4) 均匀细杆长 l，侧面绝热，热流强度为 q 的热量从左端流入，右端按牛顿冷却定律与温度为 0 的环境热交换，试写出定解问题的边界条件。

   (5) 一均匀细杆长 l，竖直放置，杆下端 $x=0$ 固定，上端 $x=l$ 压一重物 mg，开始时用手托住重物使杆没有位移，$t=0$ 时突然放手，忽略杆自身的重力，试写出定解条件（不必求解）。

   (6) 一无限长均匀空心圆柱，内、外径分别为 a 和 $2a$。内外表面温度分别保持为 u_0 和 $2u_0$，试求圆柱内稳定温度分布。

2. 截面积为 1 的均匀细杆长 1，$x=0$ 端受一与时间无关的拉力 F 作用，$x=1$ 端与弹性系数为 k 的弹簧相连，弹簧的另一端固定，并且当细杆无位移时弹簧也处于自然状态，设杆的初始位移为 $h(1-x)$，试写出求解细杆纵振动 $u(x,t)$ 的定解条件（不必求解），现令 $u=v+w$使得 w 满足齐次方程和齐次边条，试求 v。

3. **用分离变量法求解定解问题（其中 h 为常数）**

$$\begin{cases} u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad (0 \le x \le l) \\ u_x(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = h\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) \end{cases}$$

4. **一球心于坐标原点半径为 1 的薄球壳被 $z = h < 1$ 的绝缘平面分成两部分，已知 $z > h$ 部分的球壳电势为 $u_0 \cos\theta$，$z < h$ 部分的球壳电势为 $-u_0$，试求球心电势。其中 θ 为球坐标系的极角。**

5. **半径为 b 的圆形薄板，板面绝热，初始温度 u_0，板边缘保持温度为 u_1。求板内各处温度变化。**

可能用到的公式

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0, \quad \Longrightarrow \quad y = P_l^m(x)$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_{l+1}(x) = \frac{1}{l+1}\left[(2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)\right]$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_k^m(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{lk}$$

$$x^2y'' + xy' + (k^2x^2 - \nu^2)y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = J_\nu(kx)$$

$$x^2y'' + xy' - (k^2x^2 + \nu^2)y = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = I_\nu(kx)$$

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x), \qquad \int J_0(x) x\,\mathrm{d}x = xJ_1(x)$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x),$$

$$\int_0^a rJ_0\left[\frac{x_n^{(0)}}{a}r\right]J_0\left[\frac{x_m^{(0)}}{a}r\right]\mathrm{d}r = \frac{a^2}{2}J_1^2[x_n^{(0)}]\delta_{mn},$$

其中：$J_0[x_n^{(0)}] = 0$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\delta_{mn}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}$$