复旦大学物理系

2011 ～ 2012 学年第一学期期末考试试卷

☐ A 卷　　　☒ B 卷

课程名称：数学物理方法　　　课程代码：PHYS130006.01

开课院系：物理系　　　考试形式：闭卷　(2012.01.11)

姓名：________　　学号：________　　专业：________

题号	1	2	3	4	5	总分
得分						

（可能用到的公式列在试卷的下一页）

1. 简答题:（8分 × 4）

   (1) 试对 $l = 1,\ 2,\ 3$ 求：$\displaystyle\int_{-1}^{1} P_l(x)x\mathrm{d}x$

   (2) 画出 Neumann 函数 $Y_0(x),\ Y_1(x)$ 的示意图，从 $x \to 0$ 到 $Y_1(x)$ 的第四个根。

   (3) 截面积为 S 杨氏模量 Y 的均匀细杆长 l，$x = l$ 端固定，$x = 0$ 端与弹性系数为 k 的弹簧相连，弹簧的另一端固定，当细杆本身处平衡位置时弹簧也处于自然状态，试写出杆纵振动的边界条件。

   (4) 半无限长均匀细杆，截面积 S，杨氏模量 Y，初始时静止且不拉不压。从 $t = 0$ 开始，$x = 0$ 端受压力 $f = \sin\omega t$ 的作用，求杆的纵振动 $u(x,t)$。

   (5) 球心于原点的球壳内外半径分别为 $a/2$ 和 a，内外球面电势分别为 $\cos^2\theta\sin\phi$ 和 $\cos^2\theta$，求球壳外（$r \geq a$ 区）的电势。

2. （20分）一长度为 l 的均匀细杆侧面绝热，起始时杆温度为 0，自 $t = 0$ 开始杆两端保持温度 u_0，求 $t > 0$ 时刻杆上的温度 $u(x,t)$。

3. （20分）半径为 b 的圆形薄板，板面绝热，初始温度 u_0，板边缘保持温度为 u_1。求板内各处温度变化。

4. （20分）阳光照射到半径为 a 的均匀介质球，设阳光的热流强度为 q_0，球与零温环境按牛顿冷却定律交换热量，求达到稳定状态时球心温度。

5. （20分）长为 l 的弦两端固定，从 $t=0$ 开始，受外力密度为 $A\sin\omega t$ 的作用，弦的横方程可表为：$u_{tt}-a^2u_{xx}=h\sin\omega t$。试写出弦横振动 $u(x,t)$ 的定解问题，并求其强迫振动项 v。即：令 $u=v+w$，使 w 满足齐次方程和齐次边条，v 即为强迫振动项。

可能用到的公式

$$(1-x^2)y''-2xy'+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0, \xRightarrow[]{x=0\ \text{有限的解}} y=P_l^m(x)$$

$$P_0(x)=1,\ \ P_1(x)=x,\ \ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$(l+1)P_{l+1}(x)=(2l+1)xP_l(x)-lP_{l-1}(x)$$

$$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_k^m(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{lk}$$

$$x^2y''+xy'+(k^2x^2-\nu^2)y=0 \xRightarrow[]{x=0\ \text{有限的解}} y=J_\nu(kx)$$

$$x^2y''+xy'-(k^2x^2+\nu^2)y=0 \xRightarrow[]{x=0\ \text{有限的解}} y=I_\nu(kx)$$

$$[xJ_1(x)]'=xJ_0(x),\qquad \int J_0(x)x\,\mathrm{d}x=xJ_1(x)$$

$$J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x)-J_{n-1}(x),$$

$$\int_0^a rJ_0\left[\frac{x_n^{(0)}}{a}r\right]J_0\left[\frac{x_m^{(0)}}{a}r\right]\mathrm{d}r=\frac{a^2}{2}J_1^2[x_n^{(0)}]\delta_{mn},$$

其中：$J_0[x_n^{(0)}]=0$

$$\nabla^2u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2},\qquad \int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,\mathrm{d}x=\frac{l}{2}\delta_{mn}$$

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}$$