《课堂练习2》参考答案

孙贺

一、填空题（20**分，每格**5**分，注意：请在空格内填入计算结果，填写组合表达式不得分。**）

1．设方程为$x_1+x_2+x_3=14$，则所有变量均不超过8的正整数解的组数总共有______ 。

解答：排列总数为$C(14-1,2-1)-3\cdot C(6-1,3-1)=78-3\times 10=48$。 ❐

2．将a,b,c,d,e,f,g排成一行，使得beg和cad都不出现，则排列总数有_____ 。

解答：排列总数为

$$7!-5!-5!+3!=4806$$

❐

3．确定多重集$S=\{3\cdot a,4\cdot b,2\cdot c\}$ 的排列数，使得在这些排列中同类字母的全体不能相邻。排列总数：_____ 。

解答：多重集合S的排列总数为$=\frac{9!}{3!4!2!}=1260$；若aaa连续出现，则S的排列总数为$\frac{7!}{4!2!}=105$；若bbbb连续出现；则S的排列总数为$\frac{6!}{3!2!}$；若cc连续出现，则S排列总数为$\frac{8!}{3!4!}$；若aaa和bbbb连续出现，则排列总数为$\frac{4!}{2!}=12$,依此类推,$\cdots\cdots$

所以排列总数为

$$1260-105-60-280+20+12+30-6=871$$

❐

4．十进制中，没有重复数字的4位数个数为______。

解答：没有重复数字的4位数个数为

$$9\times 9\times 8\times 7=4536$$

❐

二、计算题（**共**3**小题，每题**10**分，总共**30**分**）

1．设函数$f:A\mapsto B,|A|=n,|B|=m$ 。确定从A到B的满射函数个数。

解答：分情况讨论：(1) 若$n<m$，则不存在从A到B的满射。

(2) 若$n=m$，则从A到B的满射个数为$n!$。

(3) 现讨论$n>m$的情况。因为从A到B存在m^n个函数，从定义域A的n元集合到B的m个集合有$C(m,1)\cdot(m-1)^n$个函数恰好缺少m个元素中的1个元素，$C(m,2)\cdot(m-2)^n$个函数恰好缺少m个元素中的2个元素，$\cdots$，有$C(m,m-1)\cdot 1^n$个元素恰好缺少m个元素中的$m-1$个元素，故由容斥原

理得满射个数为

$$m^n - C(m,1)\cdot(m-1)^n + C(m,2)\cdot(m-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(m,m-1)\cdot 1^n$$

❐

2．求1000!的末尾的零的个数。

解答：此问题等价于求把1000!分解成素数时，2和5的幂是多少？1000!的尾数零的个数等于2和5的幂中较小的一个。显然，5的幂的个数远小于2的幂的个数。

在1至1000共1000个数中，5的倍数的数有200个，$5^2 = 25$的倍数的有40个，其中$5^3 = 125$的倍数的有8个，$5^4 = 625$的倍数的有1个。

所以1000!的质因数分解时，5的幂应为$200 + 40 + 8 + 1 = 249$。故1000!的末尾有249个零。 ❐

3．John去参加一展览会，展览会的门票为50元。在售票处，John发现了一个奇怪的现象：在排队购票的$2n$个人中，总有n个人拿的是面值为100元的钞票，而另外的n个人拿的是面值为50元的钞票。假设售票处原来没有零钱。那么共有多少种排队方式，使得售票处不至出现找不开钱的局面。

解答：构造组合模型如下：我们用1表示有一个手拿\$50的人，用0表示手拿\$100的人，那么我们所求解的问题可以转化为：n个1 和n个0组成一个$2n$位的二进制数，要求从左到右扫描，1的累计数不小于0的累计数，求满足这个条件的二进制的数的个数。

在$2n$位上填入n个1的方案数为$C(2n,n)$ 不填1的其余n位自动填入0。从$C(2n,n)$中减去不符合要求的方案数就是问题的解。不符合要求的是指从左到右扫描，出现0的累计数超过出现1的累计数。

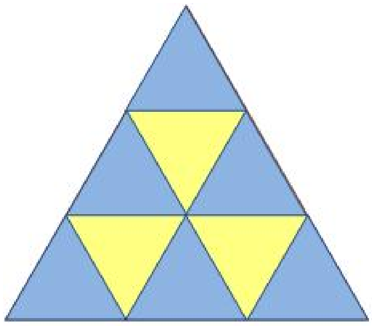
不符合要求的数的特征是从左到右扫描时，必然在某一奇数位$2m+1$位上首先出现$m+1$个0和m个1；而后的$2(n-m)-1$位上有$n-m$ 个1，$n-m-1$个0。如果把后面这部分$2(n-m)-1$位的0与1互换，使之成为$n-m$个0，$n-m-1$个1，结果得到一个由$n+1$个0和$n-1$个1组成的$2n$位数。即一个不符合要求的数对应一个由$n+1$个0和$n-1$个1组成的一个排列。

反之，任何一个由$n+1$个0和$n-1$个1组成的$2n$位数，由于0的个数多于2个，$2n$是偶数，所以一定在某一个奇数位上出现0的累计数超过1的累计数。同样在后面的部分，令0和1互换，使之成为一个由n个0和n个1组成的$2n$位数。即$n+1$个0和$n-1$个1组成的$2n$位数，一定对应一个不符合要求的数。所以不符合要求的数的总数为$C(2n,n+1)$

所以我们所求的结果便可表示为$C(2n,n) - C(2n,n+1) = \frac{1}{n+1}C(2n,n)$ ❐

三、证明题（共5题，每题10分，总共50分）

1．一运动员是25天内的冠军，该选手每天至少比赛一场，但是总共比赛次数不超过41场。证明：存在着连续的若干天使得该选手恰好进行了8场比赛。



解答：令x_i为该运动员从第1天到第i天比赛的总次数，$1 \le i \le 25, \forall x_i : x_i \in \{1, \cdots, 41\}$。

因此对所有的x_i成立$x_i + 8 \le 49$。由于$x_1, x_2, \cdots, x_{25}, x_1 + 8, x_2 + 8, \cdots, x_{25} + 8$共50个元素，且每个元素均在集合$\{1, \cdots, 49\}$中，所以必存在两个元素相等。

由于该运动员每天至少比赛一场，所以对于所有的$1 \le i < j \le 25$，成立$x_i < x_j$。所以存在i, j，使得$x_i + 8 = x_j$。即该运动员在从第i天到第j天间恰好进行了8场比赛。 ❐

2. 在边长为1的正三角形内任意放入$n^2 + 1$ 个点，证明：一定存在两点，其距离不超过$1/n$，其中$n \in \mathbb{N}$。

解答：对三角形的三边进行n等分，并连接相应的等分点。当$n = 3$时三角形的划分情况如图1所示。因此，一个边长为1的正三角形被分成了n^2个小三角形，且每个三角形的边长为$1/n$。所以若将$n^2 + 1$个点放入大三角形中，由抽屉原则，至少有两个点A、B在同一个小三角形中。因为小三角形的边长为$1/n$，所以A、B间的距离不超过$1/n$。 ❐

3. 证明：

$$\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$$

解答：在二项式系数中，令$y = 1$，则得：

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C(n,k)x^k$$

对上式两边求导，得：

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)x^{k-1}$$

令$x = 1$，则：

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$$

❐

4．证明：

$$C(m+n,m)=C(m+n-1,m)+C(m+n-1,m-1)$$

解答：

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}+\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}\\&=\frac{n(m+n)!}{m!n!(m+n)}+\frac{m(m+n)!}{m!n!(m+n)}\\&=\frac{(m+n)!}{m!n!}\\&=\text{左边}\end{aligned}\tag{1}$$

❐

5．证明：

$$C(m,0)C(m,n)+C(m,1)C(m-1,n-1)+\cdots+C(m,n)C(m-n,0)=2^nC(m,n)$$

解答: 利用组合意义对此恒等式进行证明: 假设有m个球，现要求取出其中的n个球并放入A，B两个有区别的袋子中，求放置方法的总数。

恒等式左边的意义：可从m个球中先取出i个球放入A袋中，并在剩余的$m-i$个球中取出$n-i$个球放入B袋中，其中$0\le i\le n$。所以方法总数为$C(m,0)C(m,n)+C(m,1)C(m-1,n-1)+\cdots+C(m,n)C(m-n,0)$

恒等式右边的意义：可从m个球中首先取出n个球。对于取出n个球中的每个球，都可将该球放入A袋或不放入A袋（放入B袋）共两种可能性，所以方法总数为$2^nC(m,n)$。

综上所述，恒等式成立。 ❐