第八讲　动态最优问题求解：（I）拉格朗日方法

樊潇彦

复旦大学经济学院

本讲主要内容

确定性动态最优问题的描述、分类与求解方法

确定性（deterministic）动态最优问题中没有外生的随机冲击 $z(t)$，只有内生的状态变量和决策变量组成的向量 $x(t)$，目标函数也不用取期望。一般化描述为：

$$\underset{x(t)\in X_T}{Max} \quad U\left(x\left(t\right);\theta\right)$$
$$s.t. \quad G\left(x\left(t\right);\theta\right)=0$$

分类与求解方法：

	离散时间：拉格朗日方法	连续时间：最优控制方法
有限期界（$T<\infty$） 生命周期储蓄问题	$Max \sum_{t=1}^{T} \beta^t \ln c_t$ $s.t.\ k_t = w+(1+r)k_{t-1}-c_t$ $k_0 = k_T = 0$	$Max \int_0^T e^{-\rho t}\ln(c)\,dt$ $s.t.\ \frac{dk}{dt} \equiv \dot{k} = w+rk-c$ $k(0)=0,\ k(T)=0$
无限期界（$T\to\infty$） 最优增长问题	$Max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \ln c_t$ $s.t.\ k_t = zk_{t-1}^{\alpha}-c_t$ $k_0 = 1$ $\lim_{t\to\infty} h(c_t,k_t)=0$	$Max \int_0^\infty e^{-\rho t}\ln(c)\,dt$ $s.t.\ \frac{dk}{dt} \equiv \dot{k} = zk^{\alpha}-\delta k-c$ $k(0)=1$ $\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u'(c)\,k=0$

生命周期储蓄问题

$$Max \sum_{t=1}^{T} \beta^t \ln c_t$$
$$s.t.\ k_t = w + (1+r)k_{t-1} - c_t$$
$$k_0 = k_T = 0$$

t		1	2	...	T	$T+1$
期初存量		$k_0 = 0$	k_1	...	k_{T-1}	$k_T = 0$
当期流量	收入	w	$w+rk_1$	...	$w + rk_{T-1}$	0
	消费	c_1	c_2	...	c_T	0

拉格朗日方法求解

写出拉格朗日方程（记 $R = 1 + r$）：

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} \beta^t \ln c_t - \sum_{t=1}^{T} \lambda_t \left(k_t - w - Rk_{t-1} + c_t\right)$$

由一阶条件得到欧拉方程（Euler equation）：

$$\begin{array}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\beta^t}{c_t} = \lambda_t \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \lambda_{t+1} R \end{array} \Rightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta R$$

与预算约束条件联立构成线性二元一阶差分方程组：

$$\begin{bmatrix} c_{t+1} \\ k_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta R & 0 \\ -\beta R & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t \\ k_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$$

拉格朗日方法求解最优增长问题

对于无限期界的最优增长问题，用横截性条件代替边界条件：

$$
\begin{aligned}
&Max \ \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \ln c_t \\
&s.t. \ k_t = zk_{t-1}^{\alpha} - c_t \\
&\qquad k_0 = 1, \ \lim_{t\to\infty} h(c_t, k_t) = 0
\end{aligned}
$$

相应的拉格朗日方程为：

$$
\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln c_t - \sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t \left(k_t - zk_{t-1}^{\alpha} + c_t\right)
$$

由一阶条件得到欧拉方程：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow \frac{\beta^t}{c_t} = \lambda_t \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_t} = 0 \Rightarrow \lambda_t = \lambda_{t+1} \alpha z k_t^{\alpha-1}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta \alpha z k_t^{\alpha-1}
$$

与预算约束条件联立得到非线性二元一阶差分方程组：

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= \beta \alpha z k_t^{\alpha-1} c_t \\
k_{t+1} &= zk_t^{\alpha} - c_{t+1}
\end{aligned}
$$

稳态和转移动态

将非线性二元一阶差分方程组写为 $x_{t+1} = F(x_t)$ 的形式：

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= \beta\alpha z k_t^{\alpha-1} c_t \equiv F^1(c_t, k_t) \\
k_{t+1} &= z k_t^{\alpha} - c_{t+1} = z k_t^{\alpha} - \beta\alpha z k_t^{\alpha-1} c_t \equiv F^2(c_t, k_t)
\end{aligned}
$$

首先定义稳态（steady state）$\lim_{T\to\infty} x_T = x^*$。不难验证，最优增长达到稳态时的资本存量和消费分别为：

$$
k^* = (\alpha\beta z)^{\frac{1}{1-\alpha}},\ c^* = \left(\frac{1}{\alpha\beta} - 1\right) k^*
$$

根据一阶泰勒展开公式 $x_{t+1} = x^* + DF(x^*)(x_t - x^*)$，下面的线性二元一阶方程组刻画了模型在稳态附近的转移动态（transitional dynamics）：

$$
\begin{bmatrix} c_{t+1} - c^* \\ k_{t+1} - k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta c^* f''(k^*) \\ -1 & 1/\beta - \beta c^* f''(k^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_t - c^* \\ k_t - k^* \end{bmatrix}
$$

其中 $f''(k^*) = \alpha(\alpha-1) z (k^*)^{\alpha-2}$。

稳态附近的线性近似解

重写雅各比矩阵：

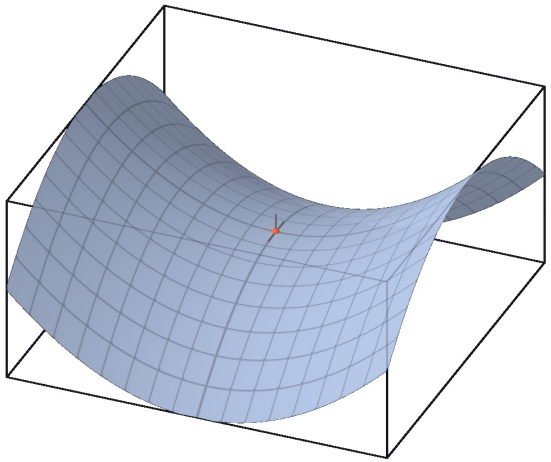
$$J(c^*,k^*)=DF\left(c^*,k^*\right)=\begin{bmatrix}1 & \beta c^* f''\left(k^*\right)\\ -1 & 1/\beta-\beta c^* f''\left(k^*\right)\end{bmatrix}$$

$J(c^*,k^*)$ 有两个实特征根：（其中 $\varphi=1+\frac{1}{\beta}-\beta c^* f''(k^*)>1+\frac{1}{\beta}$）

$$\lambda_1=\frac{\varphi+\sqrt{\varphi^2-4/\beta}}{2}>1,\quad \lambda_2=\frac{\varphi-\sqrt{\varphi^2-4/\beta}}{2}\in(0,1)$$

差分方程的通解为 $x_t=C_1\lambda_1^t+C_2\lambda_2^t$，$C_1$ 和 C_2 为两个待定系数。由于 $\lambda_1>1$，当 $t\to\infty$ 时，经济要达到稳态就只能令 $C_1=0$；再利用初始条件，$t=0$ 时有 $C_2=x_0$。模型在稳态附近鞍点路径（saddle path）的线性近似解为：

$$c_t=c^*+\left(c_0-c^*\right)\lambda_2^t$$
$$k_t=k^*+\left(k_0-k^*\right)\lambda_2^t$$

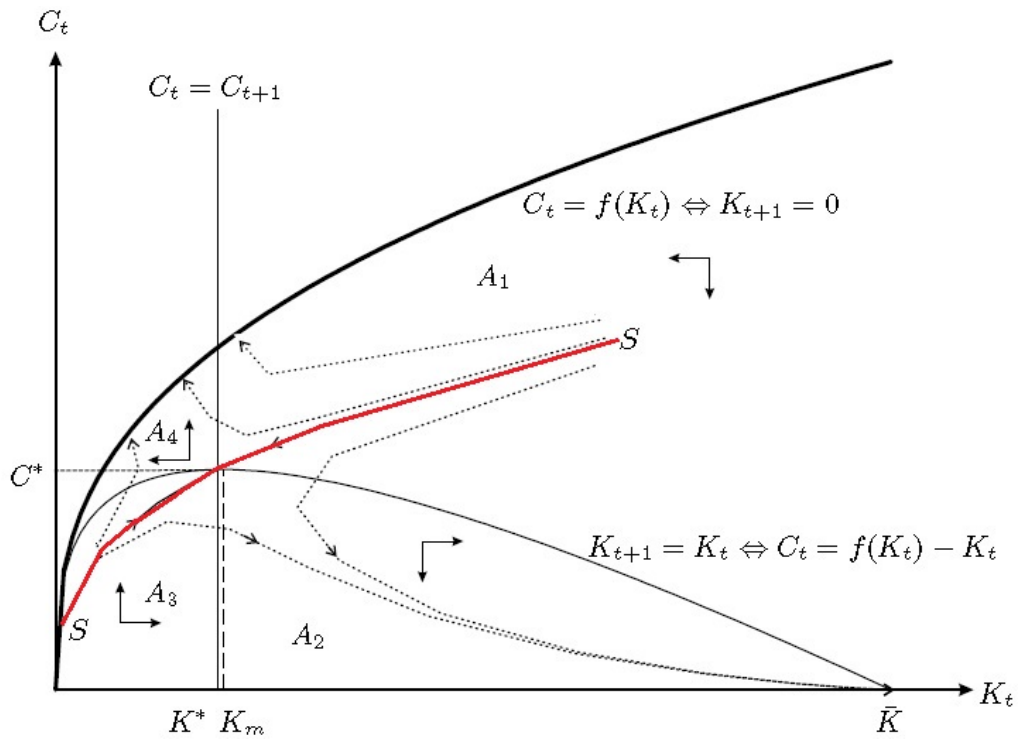


图片来源：Wiki百科。

最优增长问题的相图

差（微）分方程是我们分析动态最优问题的基本工具，它不仅决定着经济最终能达到的“均衡状态”，也可以刻画经济从初始水平向稳态过渡的“转移动态”。我们还可以用 $c-k$ 平面上的相图（phase diagram）直观地展示经济从初始状态向最终的稳态逐步收敛的动态过程，红线即为鞍点路径。

$$
\begin{aligned}
c_{t+1} &= \beta\alpha z k_t^{\alpha-1} c_t \\
k_{t+1} &= z k_t^{\alpha} - c_{t+1} \\
\Rightarrow \quad & k_t^{ss} = (\alpha\beta z)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
& c_t^{ss} = z(k_t^{ss})^{\alpha} - k_t^{ss} \\
\Rightarrow \quad & k_t > k_t^{ss}, c_{t+1} < c_t \\
& c_t > c_t^{ss}, k_{t+1} < k_t
\end{aligned}
$$



Source: Heer and Maubner(2009), Figure 1.2.

企业最优投资问题

给定 $k_0 = 1$、参数 $a, b, c > 0$，假定企业面临下面的最优投资问题：

$$Max\ \Pi_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ak_t - \tfrac{b}{2}k_t^2 - \tfrac{c}{2}(k_{t+1} - k_t)^2 \right]$$
$$s.t.\ k_0 = 1,\ \lim_{t\to\infty} h(I_t, k_t) = 0$$

一阶条件为：

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial k_{t+1}} = 0 \Rightarrow c\left(k_{t+1} - k_t\right) = \beta\left(a - bk_{t+1} + c\left(k_{t+2} - k_{t+1}\right)\right)$$

记 $I_t = k_{t+1} - k_t$，一阶条件变为 $cI_t = \beta\left(a - bk_{t+1} + cI_{t+1}\right)$。模型的动态由下面的二元一阶差分方程组决定：

$$k_{t+1} = k_t + I_t$$
$$I_{t+1} = \tfrac{b}{c}k_{t+1} + \tfrac{1}{\beta}I_t - \tfrac{a}{c}$$

稳态、转移动态与近似解

重写差分方程组：

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= k_t + I_t \equiv G^1\left(k_t, I_t\right) \\
I_{t+1} &= \tfrac{b}{c} k_t + \left(\tfrac{1}{\beta} + \tfrac{b}{c}\right) I_t - \tfrac{a}{c} \equiv G^2\left(k_t, I_t\right)
\end{aligned}
$$

稳态为 $I^* = 0,\ k^* = \frac{a}{b}$。在稳态附近做一阶泰勒展开得到转移动态方程：

$$
\begin{bmatrix} k_{t+1} \\ I_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^* \\ I^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{b}{c} & \frac{1}{\beta} + \frac{b}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_t - k^* \\ I_t - I^* \end{bmatrix}
$$

雅各比矩阵的两个实特征根为（记 $\varphi = 1 + 1/\beta + b/c$）：

$$
\lambda_1 = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4/\beta}}{2} > 1, \lambda_2 = \frac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4/\beta}}{2} \in (0, 1)
$$

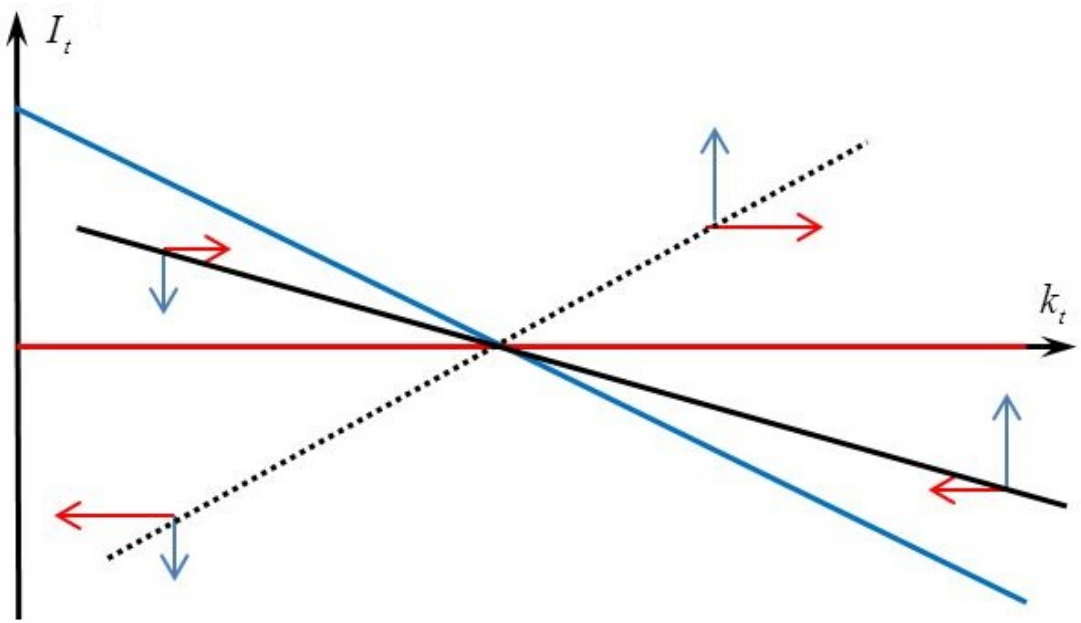
得到稳态附近的线性近似解：

$$
\begin{aligned}
k_t &= k^* + \left(k_0 - k^*\right) \lambda_2^t \\
I_t &= I^* + \left(I_0 - I^*\right) \lambda_2^t
\end{aligned}
$$

企业最优投资问题的相图

$$k_{t+1} = k_t + I_t$$
$$I_{t+1} = \frac{b}{c}k_{t+1} + \frac{1}{\beta}I_t - \frac{a}{c}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} I_t^{ss} = 0 \\ I_t^{ss} = \frac{b\beta}{c(\beta-1)}\left(k_t^{ss} - \frac{a}{b}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} I_t > I_t^{ss}, k_{t+1} > k_t \\ k_t > k_t^{ss}, I_{t+1} > I_t \end{array}$$



消费者最优的线性二次型模型

假定消费者面临下面的线性二次型（linear quadratic model）动态最优问题，其中效用为消费的二次函数，产出为资本的线性函数，参数 $\beta \in (0,1)$、$a, b > 0$、$z > 1/\beta$：

$$
\begin{aligned}
&Max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \left(ac_t - \frac{bc_t^2}{2} \right) \\
&s.t. k_t = zk_{t-1} - c_t \\
&k_0 = 1, \ \lim_{t \to \infty} h(c_t, k_t) = 0
\end{aligned}
$$

1. 写出拉格朗日方程和欧拉方程；
2. 求模型的稳态、稳态附近的转移动态方程和鞍点路径的近似解；
3. 做出模型的相图。

一般化的最优增长模型

在前文的最优增长模型中，我们假定效用函数为对数形式 $u(c_t) = lnc_t$，资本折旧率 $\delta = 1$，因此得到了下面的动态方程组：

$$c_{t+1} = \beta\alpha z k_t^{\alpha-1} c_t$$
$$k_{t+1} = z k_t^{\alpha} - c_{t+1}$$

1. 请验证 $c_t = (1-\alpha\beta) z k_t^{\alpha}$，$k_t = \alpha\beta z k_t^{\alpha}$ 是上述方程组的解，写出 c_t，k_t 的解析解（表示为 k_0 和时间 t 的函数）；
2. 一般情况下，假定效用函数为CRRA形式，折旧率 $\delta \in (0,1)$，问题变为：

$$Max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$
$$s.t.\ k_t = z k_{t-1}^{\alpha} + (1-\delta) k_{t-1} - c_t$$
$$k_0 = 1,\ \lim_{t\to\infty} h(c_t, k_t) = 0$$

请重新求解（包括欧拉方程、稳态、转移动态、线性近似解和相图分析）。