集合论

王智慧
复旦大学计算机学院

集合代数

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 有穷集的计数
- 集合恒等式

集合的基本概念

- 集合(**Set**)是一些个体汇集在一起所组成整体.通常把整体中的个体称为集合的**元素或成员**. 例如:
  - 方程$x^2 - 1 = 0$的实数解集合, 1和-1是该集合的元素;
  - 26个英文字母的集合, a, b, …, z是该集合的元素;
  - 坐标平面上所有点的集合;
    <0, 0>, <0, 1>, <1, 1>是该集合的元素;
- 常用的集合名称
  - N: 自然数集合(本课程中认为0也是自然数)
  - Z: 整数集合 Q: 有理数集合
  - R: 实数集合 C: 复数集合

集合的表示法

- 集合有两种常用的表示方法: 列元素法和谓词表示法.
- 列元素法: 列出集合中的所有元素，各元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来. 例如:
  - $A = \{ a, b, c, \ldots, z \}$ $Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \}$
- 谓词表示法: 用谓词来概括集合中元素的属性. 例如:
  - $B = \{ x \mid x \in R$ 且 $x^2 - 1 = 0 \}$
  - 集合B表示方程$x^2 - 1 = 0$的实数解集.
- 许多集合可用两种方法来表示, 如: $B = \{ -1, 1 \}$.
- 有些集合不能用列元素法表示, 如: 实数集合, 不能列举出所有集合中的所有元素.
- 此外，也有用一个圆来表示，圆中的点表示集合中的元素. 这样方法称为图示法.

集合的元素

- 集合的元素是彼此不同的.
- 若同一个元素在集合中多次出现, 则只认为其是一个元素
  - 如: { 1, 1, 2, 2, 3 } = { 1, 2, 3 }
- 集合的元素是无序的, 如:
  - { 3, 1, 2 } = { 1, 2, 3 }
- 本课程规定: 集合的元素都是集合.

集合的元素

- 元素(Element)和集合之间的隶属关系: “属于”或“不属于”.
- “属于”关系记作$\in$, “不属于”记作$\notin$. 例如:

  $A = \{ a, \{ b, c \}, d, \{ \{ d \} \} \}$.

  $a \in A$, $\{ b, c \} \in A$, $d \in A$, $\{ \{ d \} \} \in A$,

  $b \notin A$, $\{ d \} \notin A$.

  b和$\{ d \}$是A元素的元素.
- 为了体系的严谨性, 规定: 对任何集合A, 都有: $A \notin A$.

集合之间的关系

- 设A和B为集合, 若B中的每个元素都是A的元素, 则称B是A的子集合, 简称子集(Subset), 也可称B被A包含, 或A包含B, 记作$B \subseteq A$.
- 如果B不被A包含, 则记作$B \nsubseteq A$.
- 包含的符号化表示为 $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$
  - 例如: $N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$.
- 显然, 对任何集合A, 都有: $A \subseteq A$.

注意:

- 包含关系表示集合之间的关系;
- 隶属关系表示元素和集合之间的关系, 但也可表示某些集合之间关系. 如:
  - $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$ (看作两个不同层次上的集合)
  - $\{a\} \subseteq \{a, \{a\}\}$ (看作同一层次上的两个集合)

集合相等

- 设A和B为集合, 如果$A \subseteq B$且$B \subseteq A$, 则称**A与B相等**, 记作: $A = B$.
- 若A与B不相等, 则记作: $A \neq B$.
- 相等的符号化表示为
  - $A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \land B\subseteq A$

    $\Leftrightarrow \forall x(x\in A \to x\in B) \land \forall x(x\in B \to x\in A)$

真子集

- 设A和B为集合, 如果$B \subseteq A$且$B \neq A$, 则称B是A的真子集(Proper Subset), 记作$B \subset A$.
- 若B不是A的真子集, 则记为: $B \not\subset A$.
- 真子集的符号化表示为:
  - $B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \land B \neq A$
- 例如: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$, 但, $N \not\subset N$.

空集

- 不含任何元素的集合叫做空集, 记作: ϕ.
- 空集可以符号化表示为: $\phi = \{ x \mid x \neq x \}$. 例如:
  - $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$是方程$x^2+1=0$的实数解集, 因为该方程无实数解, 所以, 其解集是空集.

定理 空集是一切集合的子集.

推论 空集是唯一的.

集合的子集

- 含有n个元素的集合，称为**n元集**. 它的含有m个元素的子集，称为它的**m元子集**.
- 对任给一个n元集合A，如何求出它的全部子集?
- 对n元集合A，有:

  0元子集有C_n^0个，1元子集有C_n^1个
  …，m元子集有C_n^m个，…
  n元子集有C_n^n个
  子集总数为 $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$个

幂集

- 设A为集合, 把A的全体子集构成的集合叫做A的**幂集(Power Set)**, 记作P(A), PA, 或2^A.
- 幂集的符号化表示为: $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$.
- 例如: 对于集合$A = \{ 1, 2, 3 \}$, 有: $P(A) = \{ \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$.
- 不难看出, 若A是n元集, 则P(A)有2^n个元素.

全集

- 在某具体问题中,若所涉及的集合都是某个集合的子集,则称该集合为**全集(Universal Set)**,记作E.
- 全集是有相对性的,不同的问题有不同的全集,即使是同一个问题也可以取不同的全集.
  - 例如:在研究平面上直线的相互关系时,可把整个平面上所有点的集合看作全集,也可把整个空间上所有点的集合看作全集.
- 一般地说,全集取得小一些,问题的描述和处理会简单些.

并,交和相对补

- 设A和B为集合, A与B的并集$A\cup B$, 交集$A\cap B$, B对A的相对补集A-B分别定义如下:
  - $A\cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
  - $A\cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
  - $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

- 由定义可知: $A\cup B$是由A或B的元素构成, $A\cap B$由A和B的公共元素构成, A-B由属于A, 但不属于B的元素构成.

  例如: $A = \{ a, b, c \}, B = \{ a \}, C = \{ b, d \}$, 则:

  $A\cup B = \{ a, b, c \}$

  $A\cap B = \{ a \}$

  $A - B = \{ b, c \}$

  $B - A = \phi, B\cap C = \phi$

并和交运算的推广

- n个集合的并和交:

$$\cup_{i=1..n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee \ldots \vee x \in A_n)$$

$$\cap_{i=1..n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge \ldots \wedge x \in A_n)$$

- 无穷多个集合的并和交:

$$\cup_{i=1..\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

$$\cap_{i=1..\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

对称差与绝对补

- 集合的对称差集(Symmetric Difference)和绝对补集 (Absolute Complement)
- 设A和B为集合, A与B的对称差集$A \oplus B$定义为:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

  - 例如: $A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ b, d \}$, 则: $A \oplus B = \{ a, c, d \}$
- 对称差运算的另一种定义是 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- 在给定全集E以后, $A \subseteq E$, A的绝对补集~A定义如下:
  - $\sim A = E - A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}$
  - 因为 E是全集, $x \in E$是真命题, 故 ~A也可定义为$\sim A = \{ x \mid x \notin A \}$.
  - 例如: $E = \{ a, b, c, d \}$, $A = \{ a, b, c \}$, 则, $\sim A = \{ d \}$.

广义并

设A为集合, A的元素的元素构成的集合称为A的广义并, 记为$\cup A$.符号化表示为:

$$\cup A = \{ x \mid \exists z(z \in A \land x \in z) \}$$

例: 设 $A = \{ \{a, b, c\}, \{ a, c, d \}, \{ a, e, f \} \}$

$B = \{ \{a\} \}$　$C = \{ a, \{ c, d \} \}$

则 $\cup A = \{ a, b, c, d, e, f \}, \cup B = \{ a \},$

$\cup C = a \cup \{ c, d \}$

根据广义并的定义不难得到: 若$A = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$, 则

$$\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

广义交

设A为非空集合, A的所有元素的公共元素所构成的集合称为A的广义交, 记为$\cap A$.符号化表示为

$$\cap A = \{ x \mid \forall z(z \in A \rightarrow x \in z) \}$$

例: 设 $A = \{ \{a, b, c\}, \{ a, c, d \}, \{ a, e, f \} \}$

$B = \{ \{a\} \}$　　$C = \{ a, \{ c, d \} \}$

则 $\cap A = \{ a \}$, $\cap B = \{ a \}$, $\cap C = a \cap \{ c, d \}$

根据广义交的定义, 若$A = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$, 则$\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

注意:

在广义交的定义中特别强调A是非空集合;

对于空集ϕ可以进行广义并, 即: $\cup \phi = \phi$;

空集ϕ不可进行广义交, 因为$\cap \phi$不是集合;

广义并与广义交

例：设 $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$，计算 $\cup\underline{\cup A}$, $\cap\underline{\cap A}$和

$\cap\underline{\cup A} \cup (\cup\underline{\cup A} - \cup\underline{\cap A})$.

解：

$\cup A = \{a, b\}$ $\cap A = \{a\}$

$\cup\underline{\cup A} = a \cup b$ $\cap\underline{\cap A} = a$

$\cap\underline{\cup A} = a \cap b$ $\cup\underline{\cap A} = a$

$\cap\underline{\cup A} \cup (\cup\underline{\cup A} - \cup\underline{\cap A})$

$= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a)$

$= (a \cap b) \cup (b - a)$

$= b$

所以 $\cup\underline{\cup A} = a \cup b$, $\cap\underline{\cap A} = a$,

$\cap\underline{\cup A} \cup (\cup\underline{\cup A} - \cup\underline{\cap A}) = b$.

集合运算的顺序

- 称广义并, 广义交, 幂集, 绝对补运算为一类运算, 并, 交, 相对补和对称差运算为二类运算.
  - 一类运算优先于二类运算
  - 一类运算之间由右向左顺序进行
  - 二类运算之间由括号决定先后顺序

文氏图

- 集合之间的关系和运算可以用文氏图(Venn Diagram)来形象描述.
- 文氏图的构造方法如下:
  - 首先画一个大矩形表示全集E,
  - 然后在矩形内画一些圆,用圆的内部表示集合
  - 不同的圆代表不同的集合.
  - 如果没有关于集合不相交的说明,任何两个圆应彼此相交.图中阴影的区域表示新组成的集合.
- 文氏图可以用来辅助解决有穷集合的计数问题.

包含排斥原理

- 设S为有穷集, P_1, P_2, …, P_m是m个性质.S中的任何元素x或者具有性质P_i, 或者不具有性质P_i(i=1..m), 两种情况必居其一.
- 令A_i表示S中具有性质P_i的元素构成的子集, 则S中不具有性质P_1, P_2, …, P_m的元素数为:

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_m}| \\
&=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| \\
&\quad-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|
\end{aligned}
$$

包含排斥原理

- **推论** S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$$

集合恒等式

幂等律

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

结合律

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

分配律

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

集合恒等式

同一律

$A \cup \phi = A$

$A \cap E = A$

零律

$A \cup E = E$

$A \cap \phi = \phi$

排中律

$A \cup \sim A = E$

矛盾律

$A \cap \sim A = \phi$

集合恒等式

吸收律

$A \cup (A \cap B) = A$

$A \cap (A \cup B) = A$

德摩根律

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$

$\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$

$\sim\phi = E$

$\sim E = \phi$

双重否定律

$\sim(\sim A) = A$

其他重要结果

其他一些关于集合运算性质的重要结果.

$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

$A - B \subseteq A$

$A - B = A \cap \sim B$

$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A\text{-}B = \phi$

$A \oplus B = B \oplus A$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

$A \oplus \phi = A$

$A \oplus A = \phi$

$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$