集合论

王智慧
复旦大学计算机学院

函数

- 函数的定义与性质
- 函数的复合与反函数
- 双射函数与集合的基数

函数的定义

定义：设F为二元关系，若$\forall x \in \mathrm{dom}F$，都存在唯一的$y \in \mathrm{ran}F$，使$xFy$成立，则称F为函数(或映射).对于函数F，如果有$xFy$，则记作$y=F(x)$，并称y为F在x的值.

例：设$A=\{1, 2, 3\}$，F_1和F_2为A上的二元关系：

$$F_1 = \{ <1, 2>, <2, 2>, <1, 3> \}$$

$$F_2 = \{ <1, 2>, <2, 3> \}$$

请判断F_1和F_2是否为A上的函数?

函数的相等

由于函数是集合, 可用集合相等来定义函数的相等:

定义. 设F和G为函数, 则 $F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$.

由以上定义可知, 如果两个函数F和G相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}F = \mathrm{dom}G$, 都有 $F(x) = G(x)$

例: 请判断函数$F(x) = (x^2-1)/(x+1)$, $G(x) = x-1$是否相等?

因为 $\mathrm{dom}F = \{ x \mid x\in R \wedge x \neq -1 \}$, $\mathrm{dom}G = R$.

从A到B的函数

定义: 设A和B为集合, 如果f为函数, 且domf = A, ranf⊆B, 则称f为**从A到B的函数**, 记作$f: A \to B$.

例如:

$f: N \to N$, $f(x) = 2x$是从N到N的函数,

$g: N \to N$, $g(x) = 2$也是从N到N的函数.

定义: 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 读作"B上A".符号化表示为$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$.

从A到B的函数

例: 设$A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{ a, b \}$, 求B^A.

解: $B^A = \{ f_0, f_1, \ldots, f_7 \}$, 其中

$f_0 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, a> \}$ $f_1 = \{ <1, a>, <2, a>, <3, b> \}$

$f_2 = \{ <1, a>, <2, b>, <3, a> \}$ $f_3 = \{ <1, a>, <2, b>, <3, b> \}$

$f_4 = \{ <1, b>, <2, a>, <3, a> \}$ $f_5 = \{ <1, b>, <2, a>, <3, b> \}$

$f_6 = \{ <1, b>, <2, b>, <3, a> \}$ $f_7 = \{ <1, b>, <2, b>, <3, b> \}$

由排列组合知识不难证明: 若$|A| = m$, $|B| = n$, 且$m, n > 0$, 则$|B^A| = n^m$.

在上面的例子中, $|A| = 3$, $|B| = 2$, 所以, $|B^A| = 2^3 = 8$.

从A到B的函数

当A或B中至少有一个集合是空集时，可以分成下面三种情况:

1). $A = \phi$且$B = \phi$, 则$B^A = \phi^\phi = \{ \phi \}$.

2). $A = \phi$且$B \neq \phi$, 则$B^A = B^\phi = \{ \phi \}$.

3). $A \neq \phi$且$B = \phi$, 则$B^A = \phi^A = \phi$.

函数的像与完全原像

定义：设函数$f: A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$.

(1) 令$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$, 称$f(A_1)$为$A_1$在f下的像.特别的，当$A_1=A$时称$f(A)$为函数的像.

(2) 令$f^{-1}(B_1) = \{ x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1 \}$, 称$f^{-1}(B_1)$为$B_1$在f下的完全原像.

注意：

- 函数的值和像的区别.函数值$f(x) \in B$, 而像$f(A_1) \subseteq B$.
- 设$B_1 \subseteq B$, 那么B_1在f下的完全原像 $f^{-1}(B_1)$是A的子集.
- 考虑$A_1 \subseteq A$, 那么$f(A_1) \subseteq B$. $f(A_1)$的完全原像就是$f^{-1}(f(A_1))$.

一般来说，$f^{-1}(f(A_1)) \neq A_1$, 但是$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$.

函数的像与完全原像

例: 函数f: { 1, 2, 3 }→{ 0, 1 }, 满足 f(1)=f(2)=0, f(3)=1,

令A_1 = { 1 }, 那么, $f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{0\}) = \{1, 2\}$

此时, $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

例: 设f: N→N, 且

$$f(x)=\begin{cases} x/2 & 若x为偶数 \\ x+1 & 若x为奇数 \end{cases}$$

令A = { 0, 1 }, B = { 2 }, 那么有

f(A) = f({0,1}) = { f(0), f(1) } = { 0, 2 }

$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{2\}) = \{1, 4\}$

满射、单射和双射

定义：设$f: A \to B$,

(1) 若$\mathrm{ran}f = B$, 则称$f: A \to B$是满射的;

(2) 若$\forall y \in \mathrm{ran}f$, 都存在唯一的$x \in A$, 使得$f(x) = y$, 则称$f: A \to B$是单射的

(3) 若f既是满射又是单射, 则称f是双射的(或一一映射).

注意:

- 若$f: A \to B$是满射的, 则对于$\forall y \in B$, 都存在$x \in A$, 使得$f(x) = y$;
- 若$f: A \to B$是单射的, 则对于$\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, 一定有$f(x_1) \neq f(x_2)$; 也就是说, 若$\forall x_1, x_2 \in A$, 有 $f(x_1) = f(x_2)$, 则有 $x_1 = x_2$.

满射、单射和双射

例：判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的?

(1) $f: R \to R, f(x) = -x^2+2x-1$

(2) $f: R \to Z, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(3) $f: R \to R, f(x) = 2x+1$

解:

(1)不是单射, 因为$x=0, f(x)=-1; x=2, f(x) = -1$.

不是满射, 因为不存在x使得$f(x) = 1$.

(2) 是满射的, 不是单射的, 因为 $f(1.5) = f(1.2) = 1$.

(3) 依据定义,可以证明$f(x) = 2x+1$是双射的.

满射、单射和双射

例：对于以下给定的A、B和f, 判断是否能构成函数f:A→B. 如果能, 说明f: A→B是否为单射,满射,双射的, 并根据要求进行计算.

(1) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{6,7,8,9,10\}$,

$f =\{\langle 1,8\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 4,10\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 5,9\rangle\}$

(2) $A = B = R$, $f(x) = x^2$

(3) $A=B=R \times R$, $f(\langle x,y\rangle)=\langle x+y,x-y\rangle$;

令$L=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R \wedge y=x+1\}$, 计算f(L).

解：(1) 能. 既不是单射, 也不是满射.

(2) 能. 既不是单射, 也不是满射.

(3) 能. 是双射. $f(L) = \{ \langle 2x+1, -1\rangle \mid x\in R \} = R \times \{-1\}$.

满射、单射和双射

例: 对于给定的集合A和B构造双射函数f: A→B.

(1) A = [0,1], B=[3,5]

(2) A=P({1,2}), B=$\{0,1\}^{\{0,1\}}$

解: (1) 建立过点(0,3)和(1,5)的线性方程

$$\frac{5-f(x)}{1-x}=\frac{5-3}{1-0}\Leftrightarrow f(x)=2x+3$$

(2) A={ϕ,{1},{2},{1,2}}, B={f_0, f_1, f_2, f_3}, 其中

f_0={<0,0>,<1,0>}, f_1={<0,0>,<1,1>},

f_2={<0,1>,<1,0>}, f_3={<0,1>,<1,1>}

故可以令f: A→B, 使得

$f(\phi) = f_0$, $f(\{1\}) = f_1$, $f(\{2\}) = f_2$, $f(\{1,2\}) = f_3$

常用的函数

定义:

(1) 设$f:A\to B$, 若$\exists c\in B$, $\forall x\in A$, $f(x) = c$, 则称 $f: A\to B$是常函数;

(2) $\forall x\in A$, 都有 $I_A(x) = x$, 称恒等关系I_A为A上的恒等函数;

(3) 设$<A, \le>$和$<B, \le>$为偏序集, $f: A\to B$

$\forall x_1, x_2\in A$, 若$x_1<x_2$, 则有 $f(x_1) \le f(x_2)$, 则称f为单调递增的

$\forall x_1, x_2\in A$, 若$x_1<x_2$, 则有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称f为严格单调递增的

类似地也可定义单调递减和严格单调递减的函数

(4) 设A为集合, 对于任意的$A' \subseteq A$, A'的特征函数$\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1 & a \in A' \\ 0 & a \in A - A' \end{cases}$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令$g: A\to A/R$,

$$g(a) = [a], \forall a\in A,$$

称g是从A到商集A/R的自然映射.

常用的函数

说明:

- 单调函数可以定义于一般的偏序集上. 例如:
  - 实数集R上的函数$f: R\to R$, $f(x) = x+1$是严格单调递增的
  - 给定偏序集$<P(\{a, b\}), R_{\subseteq}>$, $<\{0, 1\}, \le>$. 令$f: P(\{a,b\})\to\{0,1\}$, $f(\phi)=f(\{0\})=f(\{1\})=0$, $f(\{0,1\}) = 1$.
- 集合的特征函数
  - 设A为集合, A的每一个子集A'都对应于一个特征函数,不同的子集对应于不同的特征函数.
  - 由于A的子集与特征函数之间的对应关系,可以用特征函数来标记A的不同子集.
- 自然映射
  - 给定集合A和A上的一个等价关系R,就可以确定一个自然映射$g: A\to A/R$. 不同的等价关系将确定不同的自然映射.
  - 恒等关系所确定的自然映射是双射. 而其他自然映射一般来说只是满射.

函数的阶

- 定义:
  - 若存在正数c和n_0使得对于一切$n \ge n_0$, 有$0 \le f(n) \le cg(n)$,则记作$f(n)=O(g(n))$;
  - 若存在正数c和n_0使得对于一切$n \ge n_0$, 有$0 \le cg(n) \le f(n)$,则记作$f(n)=\Omega(g(n))$;
  - 若$f(n)=O(g(n))$且$f(n)=\Omega(g(n))$,则记作$f(n)=\Theta(g(n))$;
- 例如:
  - $f(n)=n^2$, $g(n)=n^3$, $h(n)=n^2+n$, 则有

    $f(n)=O(g(n))$, $g(n)=\Omega(f(n))$, $f(n)=\Theta(h(n))$
- 一些常用函数的阶的比较
  - $n!$, 2^n, $n\log n$, $\log n$, $\log\log n$, ……
- 衡量算法的复杂性
  - 给定规模为n的输入,算法所做基本运算的次数可表示为n的函数f(n).
  - 当n较大时, 函数值f(n)的增长取决于函数的阶. 阶越高的函数,增长的越快,相应的算法的复杂度就越高,同时意味着算法的效率越低.

函数的复合

函数是一种特殊的二元关系，函数的复合就是关系的右复合.关系右复合有关的定理都可用于函数的复合.

函数的复合

定理：设F和G是函数, 则F∘G也是函数, 且满足

$$(1)\ \mathrm{dom}(F\circ G) = \{\ x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\ \}$$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$, 有: $F\circ G(x) = G(F(x))$

证明：首先证明F∘G为函数.

因为F和G是关系, 所以, F∘G也是关系.

若$\exists x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$, 且$x(F\circ G)y_1$和$x(F\circ G)y_2$, 则

$<x, y_1>\in F\circ G \wedge <x, y_2>\in F\circ G$

$\Rightarrow \exists t_1(<x, t_1>\in F \wedge <t_1, y_1>\in G) \wedge \exists t_2(<x, t_2>\in F \wedge <t_2, y_2>\in G)$

$\Rightarrow \exists t_1\exists t_2(t_1=t_2 \wedge <t_1, y_1>\in G \wedge <t_2, y_2>\in G$ (F为函数)

$\Rightarrow y_1=y_2$ (G为函数)

所以, F∘G为函数.

函数的复合

定理：设F和G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $dom(F\circ G) = \{ x \mid x\in domF \wedge F(x)\in domG \}$

(2) $\forall x\in dom(F\circ G)$, 有: $F\circ G(x) = G(F(x))$

证明: (续)

任取x, $x\in dom(F\circ G)$

$\Rightarrow \exists t\exists y(\langle x, t\rangle\in F \wedge \langle t, y\rangle\in G)$

$\Rightarrow \exists t(x\in domF \wedge t=F(x) \wedge t\in domG)$

$\Rightarrow x\in\{ x \mid x\in domF \wedge F(x)\in domG \}$

任取x, $x\in domF \wedge F(x)\in domG$

$\Rightarrow \langle x, F(x)\rangle\in F \wedge \langle F(x), G(F(x))\rangle\in G$

$\Rightarrow \langle x, G(F(x))\rangle\in F\circ G$

$\Rightarrow x\in dom(F\circ G) \wedge F\circ G(x) = G(F(x))$

所以, (1)和(2)得证.

函数的复合

推论1 设F, G和H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$$

证明：由刚才的定理和复合运算的性质容易得证.

推论2 设$f: A\to B$, $g: B\to C$, 则, $f\circ g: A\to C$, 且$x\in A$, 都有

$$f\circ g(x) = g(f(x)).$$

证明：由刚才的定理可知 $f\circ g$是函数, 且

$$\mathrm{dom}(f\circ g) = \{ x \mid x\in \mathrm{dom}f \wedge f(x)\in \mathrm{dom}g \}$$
$$= \{ x \mid x\in A \wedge f(x)\in B\} = A$$

$$\mathrm{ran}(f\circ g) \subseteq \mathrm{ran}g \subseteq C$$

因此, 由$f\circ g: A\to C$, 且$x\in A$, 有 $f\circ g(x) = g(f(x))$.

函数的复合

定理：设$f: A \to B$, $g: B \to C$.

(1) 若函数f和g都是满射, 则$f \circ g$也是满射;

(2) 若函数f和g都是单射, 则$f \circ g$也是单射;

(3) 若函数f和g都是双射, 则$f \circ g$也是双射.

证明:

(1) 任取$c \in C$, 因为$g: B \to C$是满射, 所以, $\exists b \in B$, 使得 $g(b) = c$.

对于b, 由于$f: A \to B$也是满射, 所以, $\exists a \in A$, 使得$f(a) = b$.

又 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, 所以, 对任意一个$c \in C$, $\exists a \in A$, 有 $f \circ g(a) = c$.

由满射的定义可知, $f \circ g: A \to C$是满射.

函数的复合

定理：设$f: A\rightarrow B$, $g: B\rightarrow C$.

(1) 若函数f和g都是满射, 则$f\circ g$也是满射;

(2) 若函数f和g都是单射, 则$f\circ g$也是单射;

(3) 若函数f和g都是双射, 则$f\circ g$也是双射.

证明: (续)

(2) 假设: 存在$x_1, x_2\in A$, 使得 $f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$, 则有$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

由"$g: B\rightarrow C$是单射"可知: $f(x_1) = f(x_2)$.

又由"$f: A\rightarrow B$是单射"可知: $x_1 = x_2$.

所以, 若存在$x_1, x_2\in A$, 使得 $f\circ g(x_1)=f\circ g(x_2)$, 则$x_1 = x_2$.

所以, $f\circ g: A\rightarrow C$是单射.

(3) 由(1)和(2)可以得证.

函数的复合

　　上述定理说明函数的复合运算能够保持函数单射、满射和双射的性质. 但该定理的逆命题不为真, 即如果$f \circ g: A \to C$是单射(或满射、双射), 不一定有$f: A \to B$和$g: B \to C$都是单射(或满射、双射).

考虑集合$A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$, $B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$, $C = \{ c_1, c_2, c_3 \}$

$$f = \{ <a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_3> \}$$

$$g = \{ <b_1, c_1>, <b_2, c_2>, <b_3, c_3>, <b_4, c_3> \}$$

则 $f \circ g = \{ <a_1, c_1>, <a_2, c_2>, <a_3, c_3> \}$

不难看出$f: A \to B$和$f \circ g: A \to C$都是单射, 但$g: B \to C$不是单射.

再考虑集合$A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$, $B = \{ b_1, b_2, b_3 \}$, $C = \{ c_1, c_2 \}$

$$f = \{ <a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_2> \}$$

$$g = \{ <b_1, c_1>, <b_2, c_2>, <b_3, c_2> \}$$

则 $f \circ g = \{ <a_1, c_1>, <a_2, c_2>, <a_3, c_2> \}$

其中 $g: B \to C$和$f \circ g: A \to C$是满射的, 但$f: A \to B$不是满射的.

函数的复合

定理：设$f: A\to B$, 则有：$f = f\circ I_B = I_A\circ f$.

证明：易知 $f\circ I_B: A\to B$和$I_A\circ f: A\to B$,

任取$<x, y>$, $<x, y>\in f \Rightarrow <x, y>\in f \wedge y\in B$

$\Rightarrow <x, y>\in f \wedge <y, y>\in I_B$

$\Rightarrow <x, y>\in f\circ I_B$

任取$<x, y>$, $<x, y>\in f\circ I_B \Rightarrow \exists t(<x, t>\in f \wedge <t, y>\in I_B)$

$\Rightarrow <x, t>\in f \wedge t=y$

$\Rightarrow <x, y>\in f$

所以, $f = f\circ I_B$.

同理可证 $I_A\circ f = f$.

上述定理说明恒等函数在函数复合中的特殊作用.

特别地, 对于$f\in A^A$, 都有：$f\circ I_A = I_A\circ f = f$.

函数的逆运算及反函数

任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 一般来说只是一个二元关系.

例如: $F = \{ <x_1, y_1>, <x_2, y_1> \}$, 则有$F^{-1} = \{ <y_1, x_1>, <y_1, x_2> \}$.显然, F^{-1}不是函数.因为对于y_1, 有x_1和x_2与之对应, 不符合函数的定义.

任给单射函数$f: A \to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从ranf到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数.因为对于某些$y \in B - \mathrm{ranf}$, f^{-1}没有值与之对应.

什么样的函数$f: A \to B$, 其逆$f^{-1}: B \to A$是从B到A的函数$f^{-1}: B \to A$?

函数的逆运算及反函数

定理：设$f: A \to B$是双射，则$f^{-1}: B \to A$也是双射.

证明：

先证明f^{-1}是从B到A的函数，即 $f^{-1}: B \to A$.

因为f是函数，所以 f^{-1}是关系.

又 $\mathrm{dom}f^{-1} = \mathrm{ran}f = B$, $\mathrm{ran}f^{-1} = \mathrm{dom}f = A$

对于$\forall x \in B = \mathrm{dom}f^{-1}$. 假设$y_1, y_2 \in A$，使得

$$<x, y_1> \in f^{-1} \land <x, y_2> \in f^{-1}$$

则由逆运算的定义有 $<y_1, x> \in f \land <y_2, x> \in f$

根据f的单射性可知 $y_1 = y_2$.

所以，f^{-1}是函数. 考虑到$\mathrm{dom}f^{-1} = \mathrm{ran}f = B$，故$f^{-1}: B \to A$是满射的函数.

函数的逆运算及反函数

定理：设$f: A \to B$是双射, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射.

证明: (续)

再证明$f^{-1}: B \to A$的单射性.

若$\exists x_1, x_2 \in B$, 使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$, 则有

$<x_1, y> \in f^{-1} \land <x_2, y> \in f^{-1}$

$\Rightarrow <y, x_1> \in f \land <y, x_2> \in f$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (因为f是函数)

综上所述, 设$f: A \to B$是双射, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射.

对于双射函数$f: A \to B$, 称$f^{-1}: B \to A$是它的反函数.

函数的逆运算及反函数

定理：设$f: A \to B$是双射，则：$f^{-1} \circ f = I_B$, $f \circ f^{-1} = I_A$.

证明：

由前述定理可知，此时$f^{-1}: B \to A$也是双射，且$f^{-1} \circ f: B \to B$, $f \circ f^{-1}: A \to A$.

任取$<x, y>$, $<x, y> \in f^{-1} \circ f$

$\Rightarrow \exists t(<x, t> \in f^{-1} \wedge <t, y> \in f)$

$\Rightarrow \exists t(<t, x> \in f \wedge <t, y> \in f)$

$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in B$ (因为f是函数)

$\Rightarrow <x, y> \in I_B$

任取$<x, y>$, $<x, y> \in I_B$

$\Rightarrow x=y \wedge x, y \in B$

$\Rightarrow \exists t(<t, x> \in f \wedge <t, y> \in f)$ ($f: A \to B$是双射)

$\Rightarrow \exists t(<x, t> \in f^{-1} \wedge <t, y> \in f)$

$\Rightarrow <x, y> \in f^{-1} \circ f$

所以有$f^{-1} \circ f = I_B$.

同理可证：$f \circ f^{-1} = I_A$.

函数的逆运算及反函数

例：设f: R→R, g: R→R

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 3 \\ -2 & x<3 \end{cases},\quad g(x)=x+2$$

求f∘g, g∘f. 如果f和g存在反函数，求出它们的反函数.

解：

f∘g: R→R

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\geq 3 \\ 0 & x<3 \end{cases}$$

g∘f: R→R

$$g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\geq 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

f: R→R不是双射，不存在其反函数.

g: R→R是双射，其反函数g^{-1}: R→R, $g^{-1}(x)$ = x-2.

集合的等势

集合的势是量度集合所含元素多少的量. 集合的势越大, 所含的元素越多.

定义: 若存在着从集合A到集合B的双射函数, 则称A和B是等势的, 记作: A ≈ B. 否则, 称A与B不等势, 则记作A ≉ B.

例: Z ≈ N

f: Z→N, $f(x)=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ -2x-1 & x<0 \end{cases}$

f是Z到N的双射函数, 因此, Z ≈ N.

集合的等势

例：$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \approx \mathbf{N}$

例：$\mathbf{N} \approx \mathbf{Q}$

集合的等势

例: $(0, 1) \approx R$, 其中 $(0, 1) = \{ x \mid x \in R, 且 0<x<1 \}$.

证明: 令 $f: (0, 1) \to R$, $f(x) = \tan(2x-1)\pi/2$. 显然, f是单调上升的, 且ran$f$ = R. 所以, f是双射函数, 即 $(0, 1) \approx R$.

集合的等势

例: $[0,1] \approx (0,1)$, 其中 $(0, 1) = \{ x \mid x\in R, 0<x<1 \}$, $[0,1] = \{ x \mid x\in R, 0 \le x \le 1 \}$.

证明: 构造[0,1]到(0,1)的双射函数需解决端点0和1的对应问题. 为此, 选择一个无限序列: $1/2, 1/2^2, 1/2^3, \ldots, 1/2^n, \ldots$. 然后, 构造下面一一对应关系:

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 1/2, & 1/2^2, \ldots, & 1/2^n, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1/2, & 1/2^2, & 1/2^3, & 1/2^4, \ldots, & 1/2^{n+2}, \ldots \end{array}$$

区间[0,1]中其余的数则自己对应自己.

这样,得到双射函数f: $[0,1] \to (0,1)$ 如右所示. 所以, $[0, 1] \approx (0, 1)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & x = 0 \\ 1/2^2 & x = 1 \\ 1/2^{n+2} & x = \dfrac{1}{2^n}, n = 1,2,\ldots \\ x & \text{其它}x \end{cases}$$

集合的等势

例: $[0,1] \approx [a,b]$, 其中 $a, b \in R$, 且 $a \neq b$.

证明: 构造一个从点<0, a>和<1, b>的单调函数.

由解析几何知识容易得到双射函数:

$$f: [0, 1] \rightarrow [a, b],\ f(x) = (b-a)x + a$$

所以, $[0, 1] \approx [a, b]$.

集合的等势

例：设A为任意集合, 则$P(A) \approx \{0, 1\}^A$.

证明：

构造函数$f: P(A) \to \{0,1\}^A$, $f(A') = \chi_{A'}$, $\forall A' \in P(A)$. 其中$\chi_{A'}$是集合A'的特征函数. 显然, f是单射的.

又因为对于任意的$g \in \{0,1\}^A$, 有$g: A \to \{0, 1\}$. 令

$$B = \{ x \mid x \in A, g(x) = 1 \},$$

则$B \subseteq A$, $\chi_B = g$, 即 $\exists B \in P(A)$, $f(B) = g$. 所以, f是满射的.

由等势定义可得, $P(A) \approx \{0,1\}^A$.

集合的等势

定理：设A, B和C是任意集合,

(1) $A \approx A$

(2) 若$A \approx B$, 则$B \approx A$

(3) 若$A \approx B$, $B \approx C$, 则$A \approx C$

由上述定理可知, 等势关系是自反, 对称和传递的.

根据前面的例子和上述定理, 可知

$$N \approx Z \approx Q \approx N \times N, \qquad R \approx [0, 1] \approx (0, 1)$$

后一个结果可进一步推广成: 任何实数区间(包括开区间, 闭区间以及半开半闭的区间)都与实数集合R等势.

康托定理

定理(康托定理)

(1) $N \not\approx R$;　　(2) 对任意集合A, 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明:

(1) 只需证明 $N \not\approx [0,1]$, 就可得到 $N \not\approx R$. 下面,证明任何函数f: $N \to [0,1]$都不是满射的.

对$\forall x \in [0, 1]$, 令$x = 0.x_1x_2\ldots$, $(0 \le x_i \le 9)$. 但在上述表示中, 同一个x可能存在两种不同的表示, 例如, 0.24999…和 0.25000… 是同一个x的表示. 为了保证表示法的唯一性, 如果遇到上述情况, 则将x表示为0.25000… .

不难看出, 任何函数f: $N \to [0, 1]$的值都可以用这种表示式给出.

康托定理

证明: (1) (续)

设f: N →[0, 1]是从N到[0, 1]的任何一个函数.如下列出f的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\ldots$$

$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\ldots$$

$$\ldots$$

$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\ldots$$

$$\ldots$$

设y是[0, 1]之中的一个小数, y的表示式为$0.b_1b_2\ldots$, 并且满足 $b_i \neq a_i^{(i)}$, i=1, 2, … . 显然, y是可以构造出来的, 且y与上面列出的任何一个函数值都不相等.

因此, $y \notin ran f$, 即: f不是满射的.

康托定理

定理(康托定理)

(1) $N \not\approx R$;　　(2) 对任意集合A, 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明: (2) 只需证明任何函数 $g: A \to P(A)$ 都不是满射的.

设 $g: A \to P(A)$ 是从A到P(A)的函数. 可以构造出集合

$$B = \{ x \mid x \in A, x \notin g(x) \},$$

则 $B \in P(A)$, 但对 $\forall x \in A$, 都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x).$$

因此, 对 $\forall x \in A$, 都有 $B \neq g(x)$, 即 $B \notin \mathrm{ran}g$.

优势与真优势

定义:

(1) 若存在从集合A到集合B的单射函数, 则称**B优势于A**, 记作$A \leqslant\cdot B$; 如果B不是优势于A, 则记作$A \not\leqslant\cdot B$.

(2) 设A和B是集合, 若$A \leqslant\cdot B$且$A \not\approx B$, 则称**B真优势于A**, 记作$A <\cdot B$;如果B不是真优势于A, 则记作$A \not<\cdot B$.

例如: $N \leqslant\cdot N$, $N \leqslant\cdot R$, $A \leqslant\cdot P(A)$, $R \not\leqslant\cdot N$

$N <\cdot R$, $A <\cdot P(A)$, $N \not<\cdot N$.

优势的性质

定理：设A, B, C是任意集合, 则

(1) $A \leqslant\cdot A$;

(2) 若$A \leqslant\cdot B$, $B \leqslant\cdot A$, 则$A \approx B$;

(3) 若$A \leqslant\cdot B$, $B \leqslant\cdot C$, 则$A \leqslant\cdot C$.

上述定理不仅为证明集合之间的优势提供了方法, 也为证明集合之间的等势提供了有力的工具.

因为在一些情况下, 直接构造从集合A到集合B的双射函数是相当困难的. 相比之下, 构造两个单射函数$f: A \to B$ 和 $g: B \to A$, 则可能要容易得多.

优势的性质

例: 请证明$\{0, 1\}^N \approx [0, 1)$.

证明: 设x是[0,1)内的小数, $0.x_1x_2\ldots$是x的二进制表示.
为保证表示的唯一性, 在表示式中不允许出现连续无数个1的情况, 例如: $x = 0.1010111\ldots$应记为$0.1011000\ldots$.

任取$x\in[0,1), x = 0.x_1x_2\ldots$是x的二进制表示. 定义 $f: [0,1)\to\{0,1\}^N$, 使得 $f(x) = t_x$, 且$t_x: N\to\{0,1\}$, $t_x(n) = x_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ 例如, $x = 0.10110100\ldots$, 则对应于x的函数t_x是:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$t_x(n)$	1	0	1	1	0	1	0	0	…

显然, $t_x\in\{0,1\}^N$. 同时, 对于$\forall x, y\in[0,1)$, $x \neq y$, 有: $t_x \neq t_y$, $f(x) \neq f(y)$. 所以, $f: [0,1)\to\{0,1\}^N$是单射的. 即, $[0,1) \preccurlyeq\cdot \{0,1\}^N$.

优势的性质

例: 请证明$\{0, 1\}^N \approx [0, 1)$.

注意到, 我们在上面证明中定义的f不是满射的.
考虑$t\in\{0,1\}^N$, 其中$t(0) = 0$, $t(n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$.
按照f的映射规则, 只有$x = 0.011\ldots$才能满足$f(x) = t$. 但根据x的表示法, 这个数x应该表为$0.100\ldots$. 所以, 不存在$x\in[0,1)$, 使得 $f(x) = t$.

为解决该问题, 我们来定义另一单射函数$g: \{0,1\}^N\rightarrow[0,1)$.

优势的性质

例: 请证明$\{0, 1\}^N \approx [0, 1)$.

证明: (续)

下面, 先定义另一单射函数$g: \{0,1\}^N \to [0,1)$.

g的映射规则恰好与f相反, 即$\forall t \in \{0, 1\}^N$, $t: N \to \{0, 1\}$, $g(t) = 0.x_1x_2\ldots$, 其中$x_{n+1} = t(n)$.

但不同的是, 将$0.x_1x_2\ldots$看作数x的十进制表示.例如, $t_1, t_2 \in \{0, 1\}^N$, $g(t_1) = 0.0111\ldots$, $g(t_2) = 0.1000\ldots$. 注意到, 因为将$g(t_1)$和$g(t_2)$都看成十进制表示, 所以$g(t_1) \neq g(t_2)$.

这样就避免了因为进位造成的干扰, 从而保证了g的单射性. 所以, $\{0,1\}^N \leqslant\cdot [0,1)$.

综上所述, $\{ 0,1 \}^N \approx [0,1)$.

自然数与自然数集

前面在介绍“有穷集”时, 只直观地理解为含有有限多个元素的集合, 并没有精确地给出有穷集的定义.

为解决该问题, 下面先定义自然数和自然数集合.

定义: 用空集和后继n^+(紧跟在n后面的自然数)可以把所有的自然数定义为集合, 即

$$0 = \emptyset$$

$$n^+ = n \cup \{ n \}, \forall n \in N$$

自然数与自然数集

利用集合论的知识可以证明许多有关自然数的性质. 例如:

1. 对任何自然数n, 有 $n \approx n$

2. 对任何自然数n和m, 若$m \subset n$, 则$m \not\approx n$

3. 对任何自然数n和m, 若$m \in n$, 则$m \subset n$

4. 对任何自然数n和m, 三个式子: $m \in n$, $m \approx n$, $n \in m$, 有且仅有一个成立, 该性质称为自然数的三岐性.

有了上面概念和性质, 可定义自然数的相等与大小顺序, 即对任何自然数n和m, 有

$$m = n \Leftrightarrow m \approx n$$

$$m < n \Leftrightarrow m \in n$$

有穷集与无穷集

定义：一个集合是**有穷的**, 当且仅当它与某个自然数等势;

如果一个集合不是有穷的, 则称作**无穷集**.

例如:

{a, b, c}是有穷集, 因为3 = {0,1,2}, 并且 { a, b, c } ≈ { 0, 1, 2 } = 3.

而N和R都是无穷集, 因为没有自然数与N和R等势.

利用自然数的性质可知, 任何有穷集只与唯一的自然数等势.

基数

定义：(1) 对于有穷集合A, 称与A等势的那个唯一的自然数为A的基数, 记作cardA(有时也记作|A|), 即

$$\text{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$(读作阿列夫零), 即

$$\text{card}N = \aleph_0$$

(3) 实数集R的基数记作$\aleph$(读作阿列夫), 即

$$\text{card}R = \aleph$$

定义：设A和B为集合, 则

(1) $\text{card}A = \text{card}B \Leftrightarrow A \approx B$

(2) $\text{card}A \le \text{card}B \Leftrightarrow A \preccurlyeq\cdot B$

(3) $\text{card}A < \text{card}B \Leftrightarrow \text{card}A \le \text{card}B \land \text{card}A \ne \text{card}B$

基数

根据前面关于势的讨论, 可知:

$\mathrm{card}Z = \mathrm{card}Q = \mathrm{card}N\times N = \aleph_0$

$\mathrm{card}P(N) = \mathrm{card}\ \{0, 1\}^N = \mathrm{card}[a, b] = \mathrm{card}(c, d) = \aleph$

$\aleph_0 < \aleph$

集合的基数是集合势的大小度量. 基数越大, 势就越大.

是否存在最大的基数?

由于对任何集合A, 都满足 $A <\cdot P(A)$, 所以, 有

$$\mathrm{card}A < \mathrm{card}P(A)$$

注意: 这说明不存在最大的基数.

基数

将已知基数按从小到大的顺序排列, 可得到

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \aleph_0, \aleph, \ldots$$

其中

- 0, 1, …, n, …是全体自然数, 是有穷集合的基数, 也叫有穷基数;
- $\aleph_0$, $\aleph$, …是无穷集合的基数, 也叫做无穷基数;
- $\aleph_0$是最小的无穷基数, $\aleph$后面还有更大的基数, 如cardP(R)等.

可数集

定义：设A为集合,若cardA $\le \aleph_0$, 则称A为可数集或可列集.

例如:

- { a, b, c }, 5, 整数集Z, 有理数集Q, 以及N × N等都是可数集;
- 实数集R不是可数集, 与R等势的集合也不是可数集.

注意:

- 对于任何可数集, 其元素都可以排列成一个有序图形. 也就是说,都可找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序.

可数集

关于可数集有以下性质成立:

1. 可数集的任何子集都是可数集
2. 两个可数集的并是可数集
3. 两个可数集的笛卡尔积是可数集
4. 可数个可数集的笛卡尔积仍是可数集
5. 无穷集A的幂集P(A)不是可数集

集合的基数: 例子

例: 求下列集合的基数.

(1) T = { x | x是单词“BASEBALL”中的字母 }

(2) $B = \{ x \mid x \in R, x^2 = 9, 2x = 8 \}$

(3) $C = P(A)$, $A = \{ 1, 3, 7, 11 \}$

解:

(1) 由T = { B, A, S, E, L}可知 cardT = 5

(2) 由$B = \phi$可知 cardB = 0

(3) 由$|A| = 4$可知 $\text{card}P(A) = |P(A)| = 2^4 = 16$

集合的基数: 例子

例: 设A和B为集合, $cardA = \aleph_0$, $cardB = n$, n是自然数,

$n \neq 0$, 求$cardA \times B$.

解:

由$cardA = \aleph_0$, $cardB = n$可知 A和B都是可数集. 令

$A = \{ a_0, a_1, a_2, \dots \}$, $B = \{ b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \}$

对任意$<a_i, b_j>, <a_k, b_l> \in A \times B$, 有:

$<a_i, b_j> = <a_k, b_l> \Leftrightarrow i=k \wedge j=l$

定义函数 $f: A \times B \to N$

$f(<a_i, b_j>) = i*n+j$, $(i=0,1,\dots, j=0,1,\dots,n-1)$

显然, f是$A \times B$到N的双射函数.

所以, $cardA \times B = cardN = \aleph_0$.

集合的基数: 例子

例: 设A和B为集合, $\mathrm{card}A = \aleph_0$, $\mathrm{card}B = n$, n是自然数, $n \neq 0$, 求$\mathrm{card}A \times B$.

解: (也可以直接使用可数集的性质)

由$\mathrm{card}A = \aleph_0$, $\mathrm{card}B = n$可知 A和B都是可数集. 根据性质3 "两个可数集的笛卡尔积是可数集"可知, $A \times B$也是可数集, 所以, $\mathrm{card}A \times B \leq \aleph_0$.

又当$B \neq \phi$时, $\mathrm{card}A \leq \mathrm{card}A \times B$.

所以, $\mathrm{card}A \times B = \aleph_0$.