集合论

王智慧
复旦大学计算机学院

二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

有序对

- 由两个元素x和y按一定顺序排列成的二元组叫做一个**有序对或序偶(Ordered Pair)**, 记作<x, y>, 其中x是它的第一元素, y是它的第二元素.
- 有序对<x, y>具有以下性质:
  - 当x ≠ y时, <x, y> ≠ <y, x>;
  - <x, y> = <u, v>的充分必要条件是x = u且y = v.
- 有序对中的元素是有序的, 而集合中的元素是无序的.
  - 例如: 当x ≠ y时, 有{ x, y } = { y, x }. 但是<x, y> ≠ <y, x>.

笛卡儿积

- 设A和B为集合, 以A中元素为第一元素, B中元素为第二元素构成有序对;所有这样的**有序对组成的集合**叫做A和B的**笛卡儿积(Cartesian Product/Product Set)**, 记作$A \times B$.
- 笛卡儿积的符号化表示为:

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A, y \in B \}$$

- 例如, 设$A = \{ a, b \}$, $B = \{ 0, 1, 2 \}$, 则
  - $A \times B = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle \}$
  - $B \times A = \{ \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle \}$
- 由排列组合的知识不难证明, 如果$|A| = m$, $|B| = n$, 则$|A \times B| = m*n$.

笛卡儿积

- 笛卡儿积运算具有以下性质:
  - 性质1: 对任意集合A, 根据定义有

$$A \times \phi = \phi, \phi \times A = \phi$$

  - 性质2: 不满足交换律, 即

$$A \times B \neq B \times A \text{ (当} A \neq B, A \neq \phi, B \neq \phi \text{时)}$$

  - 性质3: 不满足结合律, 即

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \text{ (当} A \neq \phi, B \neq \phi, C \neq \phi \text{时)}$$

笛卡儿积

- 笛卡儿积运算具有以下性质:
  - 性质**4:** 对并和交运算满足分配律, 即

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(2) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

(3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

笛卡儿积

- 笛卡儿积运算具有以下性质:
  - 性质5: $A \subseteq C \land B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$
  - 性质5的证明和性质4类似, 也采用命题演算的方法.
- 注意性质5的逆命题不成立, 可分多种情况来讨论.
  - $A=B=\phi$
  - $A\neq \phi, B \neq \phi$
  - $A =\phi, B \neq \phi$
  - $A\neq \phi, B = \phi$

笛卡儿积

例: 设$A = \{ 1, 2 \}$, 求$P(A) \times A$.

解: 由幂集可知: $P(A) = \{ \phi, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$

$P(A) \times A$

$= \{ \langle\phi, 1\rangle, \langle\phi, 2\rangle,$

$\langle\{1\}, 1\rangle, \langle\{1\}, 2\rangle,$

$\langle\{2\}, 1\rangle, \langle\{2\}, 2\rangle,$

$\langle\{1, 2\}, 1\rangle, \langle\{1, 2\}, 2\rangle \}$

笛卡儿积

- 例: 设A, B, C, D为任意集合, 判断以下命题是否为真, 并说明理由.
  - (1) $A \times B = A \times C \Rightarrow B = C$
  - (2) $A - (B \times C) = (A - B) \times (A - C)$
  - (3) $A = B \wedge C = D \Rightarrow A \times C = B \times D$
  - (4) 存在集合A, 使得: $A \subseteq A \times A$

解:

(1) 不一定为真.当 $A = \phi$, $B = \{ 1 \}$, $C = \{ 2 \}$时,
有: $A \times B = A \times C = \phi$, 但, $B \neq C$.

(2) 不一定为真.当 $A = B = \{ 1 \}$, $C = \{ 2 \}$时,
$A - (B \times C) = \{ 1 \} - \{ <1, 2> \} = \{ 1 \}$
$(A - B) \times (A - C) = \phi \times \{ 2 \} = \phi$

(3) 真. 因为$A = B$,所以有$A \times C = B \times C$.又因为$C=D$,所以有$A \times C = B \times D$.

(4) 真.当$A = \phi$时, 有: $A \subseteq A \times A$成立.

二元关系

- 若一个集合满足以下条件之一:

  (1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

  (2) 集合是空集

  则称该集合为二元关系(**Binary Relation**), 记作**R**.

- 二元关系也可简称为关系. 若$\langle x, y\rangle \in R$, 可记作: xRy;否则, 记作: $x\not R y$.
- 例如: $R_1 = \{ \langle 1, 2\rangle, \langle a, b\rangle \}$, $R_2 = \{ \langle 1, 2\rangle, a, b \}$, 则$R_1$是二元关系, R_2不是二元关系.

二元关系

- 设A和B为集合, $A \times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**.当$A = B$时, 则称该关系为**A上的二元关系**.

  例如: $A = \{ 0, 1 \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$, 那么,

  $R_1 = \{ <0, 2> \}$　　$R_2 = A \times B$

  $R_3 = \phi$　　$R_4 = \{<0, 1>\}$

  都是从A到B的二元关系, 且R_3和R_4也是A上的二元关系.

- 集合A上二元关系的数目依赖于A中的元素数.
  - 若$|A| = n$, 则, $|A \times A| = n^2$, $A \times A$的子集就有2^{n^2}个.
  - 因为每一个子集代表一个A上的二元关系, 所以, A上有2^{n^2}个不同的二元关系.
  - 例如: $|A| = 3$, 则A上有$2^{3^2} = 512$个不同的二元关系.

空关系,全域关系和恒等关系

- 对于任何集合A, 称空集ϕ为A上的空关系.
- 对任意集合A, A上的全域关系(Universal Relation) 为

$$E_A = \{ <x, y> \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A;$$

A上的恒等关系(Identity Relation)为 $I_A = \{ <x, x> \mid \forall x \in A \}$.

例如, A = { 1, 2 }, 则

$$E_A = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2> \}$$

$$I_A = \{ <1, 1>, <2, 2> \}$$

常用的关系

- 除空关系,全域关系和恒等关系这三种特殊关系之外,还有一些常用的关系:

$$L_A = \{ <x, y> \mid x, y \in A, x \le y, A \subseteq R \}$$

$$D_B = \{ <x, y> \mid x, y \in B, x\text{整除}y, B \subseteq Z^* \}$$

$$R_{\subseteq} = \{ <x, y> \mid x, y \in C, x \subseteq y, C\text{是集合族} \}$$

其中,L_A叫做A上的小于等于(≤)关系,D_B叫做B上的整除关系,其中x是y的因子,$R_{\subseteq}$叫做C上的包含关系.

例如, A = { 1, 2, 3 }, B = { a, b }, 则有

$$L_A = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 3> \}$$

$$D_A = \{ <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3> \}$$

设C={ϕ,{a},{b}},则有

$$R_{\subseteq} = \{<\phi , \phi>, <\phi , \{a\}>, <\phi , \{b\}>, <\{a\} , \{a\}>, <\{b\} , \{b\}>\}$$

类似地,还可以定义大于等于关系,小于关系,大于关系,真包含关系等.

关系的表示

- 给出一个关系的方法有三种:
  - 集合表达式
  - 关系矩阵
  - 关系图

关系的表示

设A = { x_1, x_2, ..., x_n }, R是A上的关系.令

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & <x_i, x_j> \in R \\ 0 & <x_i, x_j> \notin R \end{cases} \quad (i, j = 1,2,\ldots,n)$$

则, R的关系矩阵M_R如下所示.

$$M_R = (r_{ij}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

关系的表示

设$A = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$, R是A上的关系. 令图$G = <V, E>$, 其中顶点集合$V = A$, 边集为E. 对于$\forall x_1, x_2 \in V$, 满足: $<x_1, x_2> \in E \Leftrightarrow <x_1, x_2> \in R$, 称图G为R的关系图, 记作$G_R$.

关系的基本运算

- 关系的基本运算有: 定义域, 值域, 域, 逆关系, 右复合(左复合), 限制和像等七种.
- 设R是二元关系
  - R中所有有序对的第一元素构成的集合称为R的定义域(Domain), 记作domR.其形式化表示为: $\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R) \}$
  - R中所有有序对的第二元素构成的集合称为R的值域(Range), 记作ranR.其形式化表示为: $\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R) \}$
  - R的定义域和值域的并集称为R的域(Field), 记作fldR. 其形式化表示为: $\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$
- 例: 设 $R = \{ \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle \}$,
  - $\mathrm{dom}R = \{ 1, 2, 4 \}$, $\mathrm{ran}R = \{ 2, 3, 4 \}$, $\mathrm{fld}R = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

关系的基本运算

- 设R为二元关系, 把R的逆关系简称R的逆, 记作R^{-1}, 其中 $R^{-1} = \{ <x, y> \mid <y, x> \in R \}$
- 设F和G为二元关系, G对F的右复合F∘G定义为:

  $$F \circ G = \{ <x, y> \mid \exists t(<x, t> \in F \wedge <t, y> \in G) \}$$

- 类似地, 可以定义关系的左复合, 即:

  $$F \circ G = \{ <x, y> \mid \exists t(<x, t> \in G \wedge <t, y> \in F) \}$$

- 如无特殊说明,本课程采用的复合运算遵循右复合的定义.
- 例: 设$F = \{ <3, 3>, <6, 2> \}$, $G = \{ <2, 3> \}$, 则
  - $F^{-1} = \{ <3, 3>, <2, 6> \}$, $F \circ G = \{ <6, 3> \}$, $G \circ F = \{ <2, 3> \}$

关系的基本运算

- 设R为二元关系, A是集合
  - (1) R在A上的限制, 记作$R\upharpoonright A$, 其中$R\upharpoonright A = \{ \langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \wedge x \in A \}$
  - (2) A在R下的像, 记作R[A], 其中$R[A] = \mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$

- 不难看出: R在A上的限制是R的子关系, A在R下的像是ranR的子集.

关系基本运算的性质

- 定理 设F是任意的关系, 则
  - (1) $(F^{-1})^{-1} = F$
  - (2) $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$

证明:

(1) 任取$<x, y>$, 由逆的定义可知:

$$<x, y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x, y>\in F$$

所以, 有: $(F^{-1})^{-1} = F$.

(2) 任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(<y, x>\in F)$$

$$\Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以, 有: $\mathrm{dom}F^{-1} = \mathrm{ran}F$.

同理可证: $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质

- **定理 设F, G和H是任意关系, 则**
  - **(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$**
  - **(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$**

证明:

(1) 任取<x, y>,

$$
\begin{aligned}
& \langle x, y\rangle \in (F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\underline{\langle x, t\rangle \in F\circ G} \land \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t(\underline{\exists s(\langle x, s\rangle \in F \land \langle s, t\rangle \in G)} \land \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\exists t\exists s}(\langle x, s\rangle \in F \land \langle s, t\rangle \in G \land \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \underline{\exists s\exists t}(\langle x, s\rangle \in F \land \langle s, t\rangle \in G \land \langle t, y\rangle \in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s(\langle x, s\rangle \in F \land \underline{\exists t(\langle s, t\rangle \in G \land \langle t, y\rangle \in H)}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s(\langle x, s\rangle \in F \land \underline{\langle s, y\rangle \in G\circ H}) \\
\Leftrightarrow\ & \langle x, y\rangle \in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

关系基本运算的性质

- 定理 设F, G和H是任意关系, 则
  - (1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$
  - (2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证明:

(2) 任取$<x, y>$,

$$
\begin{aligned}
&<x, y>\in(F\circ G)^{-1} \\
&\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G \\
&\Leftrightarrow \exists t(<y, t>\in F \wedge <t, x>\in G) \\
&\Leftrightarrow \exists t(<t, y>\in F^{-1} \wedge <x, t>\in G^{-1}) \\
&\Leftrightarrow \exists t(<x, t>\in G^{-1} \wedge <t, y>\in F^{-1}) \\
&\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}
\end{aligned}
$$

所以, $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$.

关系基本运算的性质

定理 设R为A上的关系，则，$R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

证明：任取$<x, y>$，$<x, y> \in R \circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t(<x, t> \in R \wedge <t, y> \in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t(<x, t> \in R \wedge t = y)$

$\Rightarrow <x, y> \in R$

任取 $<x, y>$，$<x, y> \in R$

$\Rightarrow <x, y> \in R \wedge y \in A$

$\Rightarrow <x, y> \in R \wedge <y, y> \in I_A$

$\Rightarrow \exists y(<x, y> \in R \wedge <y, y> \in I_A)$

$\Rightarrow <x, y> \in R \circ I_A$

综合上述可得：$R \circ I_A = R$.

同理可证：$I_A \circ R = R$.

关系基本运算的性质

定理 设F、G和H为任意关系，则：

$$F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H \quad (1)$$

$$(G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F \quad (2)$$

$$F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H \quad (3)$$

$$(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F \quad (4)$$

关系基本运算的性质

定理 设F、G和H为任意关系，则:

$$(1)\ F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$$

$$(2)\ (G\cup H)\circ F = G\circ F\cup H\circ F$$

$$(3)\ F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$$

$$(4)\ (G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$$

由数学归纳法可以证得：上述定理的结论，对于n个关系的并和交也是成立的，即有：

$$(1)\ R\circ(R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup\ldots\cup R\circ R_n$$

$$(2)\ (R_1\cup R_2\cup\ldots\cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup\ldots\cup R_n\circ R$$

$$(3)\ R\circ(R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap\ldots\cap R\circ R_n$$

$$(4)\ (R_1\cap R_2\cap\ldots\cap R_n)\circ R \subseteq R\circ R_1\cap R_2\circ R\cap\ldots\cap R_n\circ R$$

关系基本运算的性质

定理 设F为关系, A和B为集合, 则

$$(1)\ F\restriction(A\cup B) = F\restriction A \cup F\restriction B$$

$$(2)\ F[A\cup B] = F[A] \cup F[B]$$

$$(3)\ F\restriction(A\cap B) = F\restriction A \cap F\restriction B$$

$$(4)\ F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$$

关系的幂运算

定义. 设R为A上的关系, n为自然数, 则**R的n次幂**定义为:

(1) $R^0 = \{ <x, x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

由定义可知: 对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

也就是说, A上任何关系的0次幂都相等, 都等于A上的恒等关系I_A. 此外, 对A的任何关系R都有$R^1 = R$, 因为

$$R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$$

关系的幂运算

给定A上的关系R和自然数n, 如何计算R^n?

若n=0, $R^0=I_A$; n=1, $R^1=R$;

下面考虑 $n\geqslant 2$ 的情况:

- R是用集合表达式给出的, 可以通过n-1次右复合计算得到R^n;
- R是用关系矩阵M给出的, 则R^n的关系矩阵是M^n, 即n个矩阵M之积.与普遍矩阵乘法不同的是其相加是逻辑加, 即:

$$1+1 = 1,\ 1+0 = 0+1 = 1,\ 0+0 = 0$$

- R是用关系图G给出的, 可直接由图G得到R^n的关系图G'. G'的顶点集与G相同.对于G的每个顶点x_i, 如果在G中从x_i出发经过n条边到达顶点x_j, 则在G'中加一条从x_i到x_j的边. 当把所有这样的边都找到以后, 所得到图就是G'.

幂运算的性质

定理 设A为n元集合, R是A上的关系,
则存在自然数s和t, 使得: $R^s = R^t$.

证明:

R为A上的关系, 对任何自然数k, R^k都是$A \times A$的子集, 又知$|A \times A| = n^2$, $|P(A \times A)| = 2^{n^2}$, 即: $A \times A$共有2^{n^2}个不同的子集.

当列出R的各次幂$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots$时, 必存在自然数s和t, 使得: $R^s = R^t$.

幂运算的性质

定理 设R为A上的关系, m, n∈N, 则

$$(1)\ R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(2)\ (R^m)^n = R^{mn}$$

证明：用归纳法

(1) 对于任意给定的m∈N, 对n进行归纳.

若n = 0, 则有: $R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有:

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n} \circ R = R^{m+n+1}$$

所以, 对一切m, n∈N, 有: $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质

定理 设R为A上的关系, m, n∈N, 则

$$(1)\ R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(2)\ (R^m)^n = R^{mn}$$

证明: 用归纳法

(2) 对于任意给定的m∈N, 对n进行归纳.

若n = 0, 则有: $(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m*0}$

假设 $(R^m)^n = R^{m*n}$, 则有:

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = R^{m*n} \circ R^m = R^{m*n+m} = R^{m(n+1)}$$

所以, 对一切m, n∈N, 有: $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理 设R为A上的关系, 若存在自然数s, t(s<t), 使得:

$R^s = R^t$, 则

(1) 对$\forall k \in N$, 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对$\forall k, i \in N$, 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$

(3) 令$S = \{ R^0, R^1, ..., R^{t-1} \}$, 则$\forall q \in N$, 有 $R^q \in S$

证明:

(1) $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$

(2) 对k进行归纳.

若$k = 0$, 则有 $R^{s+0p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$, 则有:

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+pk+p+i} = R^{s+pk+i} \circ R^p$$

$$= R^{s+i} \circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

幂运算的性质

定理 设R为A上的关系，若存在自然数s, t(s<t)，使得：

$$R^s = R^t,$$ 则

(1) 对 $\forall k \in N$，有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对 $\forall k, i \in N$，有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 $p = t-s$

(3) 令 $S = \{ R^0, R^1, \ldots, R^{t-1} \}$，则 $\forall q \in N$，有 $R^q \in S$

证明：

(3) 任取 $q \in N$，

若 $q<t$，显然有：$R^q \in S$；

若 $q \geqslant t$，则存在自然数k和i，使得：$q = s+kp+i$，其中 $0 \leq i \leq p-1$. 于是有：

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而 $s+i \leq s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$

显然，$R^q \in S$.

幂运算的性质

由上面定理可看出,有穷集A上的关系R的幂序列R^0, R^1, R^2, ...是一个周期性变化的序列. 利用该周期性可将R的高次幂化简为R的低次幂.

例: 设$A = \{ a, b, c, d, e, f \}$, $R = \{ \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle, \langle f, d\rangle \}$, 求出最小的自然数m和n, 使得$m<n$且$R^m = R^n$.

解: 由R的定义可以看出A中的元素可分成两组, 即 {a, b }和{ d, e, f }. 其在R的右复合运算下分别有下述变化规律:

$a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \ldots$

$d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \ldots$

对于a和b, 其变化周期是2;对于d, e, f, 其变化周期是3. 因此, 一定有: $R^m = R^{m+6}$, 其中6是2和3的最小公倍数. 所以, 取: $m = 0, n = 6$, 即可满足要求.

关系的性质

自反性

对称性

传递性

反自反性

反对称性

自反与反自反的关系

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称R在A上是自反的;

(2) 若$\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称R在A上是反自反的.

例如:

- A上的全域关系E_A和恒等关系I_A都是A上的自反关系
- 小于等于关系L_A, 整除关系D_B分别是A和B上的自反关系
- 包含关系是给定集合簇A上的自反关系
- 小于关系和真包含关系都是给定集合或集合簇上的反自反关系

自反与反自反的关系

例. 设$A = \{ 1, 2, 3 \}$, R_1, R_2和R_3都是A上的关系.其中

$$R_1 = \{ <1, 1>, <2, 2> \}$$

$$R_2 = \{ <1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <1, 2> \}$$

$$R_3 = \{ <1, 3> \}$$

说明R_1, R_2和R_3是否为A上自反关系和反自反的关系.

解:

R_1既不是自反的, 也不是反自反的;

R_2是自反的;

R_3是反自反的;

对称与反对称的关系

定义 设R为A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$, 则称R在A上是对称的关系;

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称R在A上是反对称的关系

例如:

- A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系ϕ都是A上对称的关系
- 恒等关系I_A和空关系ϕ都是A上反对称的关系
- 全域关系E_A一般不是A上的反对称关系, 除非A为单元集或空集

对称与反对称的关系

例. 设$A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系.

$R_1 = \{ <1, 1>, <2, 2> \}$

$R_2 = \{ <1, 1>, <1, 2>, <2, 1> \}$

$R_3 = \{ <1, 2>, <1, 3> \}$

$R_4 = \{ <1, 2>, <2, 1>, <1, 3> \}$

说明R_1, R_2, R_3和R_4是否为A上对称和反对称的关系.

解: R_1既是对称的也是反对称的

R_2是对称的但不是反对称的

R_3是反对称的但不是对称的

R_4既不是对称的也不是反对称的

传递的关系

定义 设R为A上的关系，若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \land xRy \land yRz \rightarrow \langle x, z\rangle \in R),$$

则称R为A上传递的关系.

例如:

- A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系ϕ都是A上的传递关系
- 小于等于关系，整除关系，包含关系，小于关系和真包含关系是相应集合上的传递关系

关系的性质

定理 设R为A上的关系，则

R在A上是自反的，当且仅当$I_A \subseteq R$

证明：

(必要性：R在A上是自反的 $\Rightarrow I_A \subseteq R$)

由R在A上自反的可知，$\forall x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \in R$.

所以，$\forall x \in A$，$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$，即 $I_A \subseteq R$.

(充分性：$I_A \subseteq R \Rightarrow$ R在A上是自反的)

任取x，有 $x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R$.

因此，R在A上是自反的.

关系的性质

定理 设R为A上的关系, 则

R在A上是反自反的, 当且仅当$R \cap I_A = \phi$.

证明:

(必要性: R在A上是反自反的$\Rightarrow R \cap I_A = \phi$.)(用反证法)

假设$R \cap I_A \neq \phi$, 则$\exists \langle x, y \rangle \in R \cap I_A$.由于$I_A$是A上的恒等关系, 从而有 $x \in A$且$\langle x, x \rangle \in R$.这与R在A上是反自反的相矛盾.

(充分性: $R \cap I_A = \phi \Rightarrow$ R在A上是反自反的.)

任取$x \in A$, 有$\langle x, x \rangle \in I_A$, 但由于$R \cap I_A = \phi$, 故有 $\langle x, x \rangle \notin R$,

从而证明了R在A上是反自反的.

关系的性质

定理 设R为A上的关系, 则

R在A上是对称的, 当且仅当$R = R^{-1}$

证明:

(必要性: R在A上是对称的 $\Rightarrow R = R^{-1}$)

任取$\langle x, y\rangle$, 如果R在A上是对称的, 则有

$$\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1}$$

所以, $R = R^{-1}$.

(充分性: $R = R^{-1} \Rightarrow$ R在A上是对称的)

任取$\langle x, y\rangle$, 由 $R = R^{-1}$可得:

$$\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \Rightarrow \langle y, x\rangle \in R$$

所以, R在A上是对称的.

关系的性质

定理 设R为A上的关系，则

R在A上是反对称的，当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

证明：

(必要性：R在A上是反对称的 $\Rightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$)

任取$<x, y>$，有

$<x, y> \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y> \in R \wedge <x, y> \in R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y> \in R \wedge <y, x> \in R$

$\Rightarrow x = y$ (因为R在A上是反对称的)

$\Rightarrow <x, y> \in I_A$

(充分性：$R \cap R^{-1} \subseteq I_A \Rightarrow$ R在A上是反对称的)

任取$<x, y>$，

$<x, y> \in R \wedge <y, x> \in R$

$\Rightarrow <x, y> \in R \wedge <x, y> \in R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y> \in R \cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x, y> \in I_A$

$\Rightarrow x = y$

从而证明了R是A上是反对称的.

关系的性质

定理 设R为A上的关系，则

R在A上是传递的，当且仅当$R\circ R\subseteq R$.

证明:

(必要性: R在A上是传递的 $\Rightarrow R\circ R\subseteq R$)

任取$\langle x, y\rangle$,

$\langle x, y\rangle\in R\circ R$

$\Rightarrow \exists t(\langle x, t\rangle\in R\land\langle t, y\rangle\in R)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle\in R$ (因为R在A上是传递的)

所以，$R\circ R\subseteq R$.

(充分性: $R\circ R\subseteq R\Rightarrow$ R在A上是传递的)

任取$\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle\in R$, 有

$\langle x, y\rangle\in R\land\langle y, z\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle\in R\circ R$

$\Rightarrow \langle x, z\rangle\in R$ (因为$R\circ R\subseteq R$)

所以，R是A上是传递的.

关系的性质

关系的五种性质在关系矩阵和关系图中的特点.

性质 / 表示	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \phi$	$R = R^{-1}$	$R \cap R \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	对称矩阵	若$r_{ij}=1$且$i \neq j$, 则, $r_{ji} = 0$	对M^2中1所在的位置, M中相应的位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两个顶点之间有边, 一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则从x_i到x_k也有边

关系的性质与运算之间的联系

设A是集合, R_1和R_2是A上的关系, 证明:

若R_1和R_2是自反的和对称的, 则$R_1 \cup R_2$也是自反的和对称的.

证明:

由于R_1和R_2是A上的自反关系, 故有

$$I_A \subseteq R_1 \land I_A \subseteq R_2 \Rightarrow I_A \subseteq R_1 \cup R_2$$

所以, $R_1 \cup R_2$在A上是自反的.

由R_1和R_2的对称性, 有 $R_1 = R_1^{-1}$和$R_2 = R_2^{-1}$.

又因为 $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$.

所以, $R_1 \cup R_2$是A上对称的关系.

关系的性质与运算之间的联系

设A是集合，R_1和R_2是A上的关系，证明：

若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的.

证明：

由R_1和R_2的传递性有，$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1$, $R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$.

$(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$

$\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2)$

$\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1)$

$\subseteq (R_1 \cap R_2)$

所以 $R_1 \cap R_2$是传递的.

关系的性质与运算之间的联系

设R_1和R_2是A上的关系，它们都具有某些共同的性质.在经过关系运算后，所得到的相应关系$R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$, R_1^{-1}, $R_1 \circ R_2$等是否还能保持原来关系的性质呢?

由前面的例子可知:

- 两个自反和对称的关系经过并运算后仍是自反和对称的
- 两个传递的关系经过交运算后仍是传递的

关系的性质与运算之间的联系

类似地，我们可以考察其他的性质与运算之间的联系.有关的结论给在下表中，其中的√和×分别表示“能保持”和“不一定能保持”的含义.

原有性质 / 运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

闭包的定义

设R是A上的关系, 如果R不具有自反性, 我们希望在R中添加尽可能的少有序对, 使新得到的关系R'具有自反性.

我们称满足这样要求的R'为R的自反闭包.

同样还有 对称闭包和传递闭包.

闭包的定义

定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称或传递的);

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R", 有:

$R' \subseteq R''$

一般将R的自反闭包, 对称闭包和传递闭包, 分别记为r(R), s(R)和t(R).

闭包的构造

定理 设R为A上的关系，则有:

$$(1)\ r(R) = R \cup R^0$$

$$(2)\ s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$(3)\ t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$$

闭包的构造

推论 设R为有穷集A上的关系, 则存在正整数r, 使得:

$$t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^r$$

证明: 由前面介绍的以下定理不难证明上述推论.

- 设R为A上的关系, 则有 $t(R) = R^1 \cup R^2 \cup \ldots$;
- 设A为n元集合, R是A上的关系, 则存在自然数s和t, 使得 $R^s = R^t$;
- 设R为A上的关系, 若存在自然数s, t(s<t), 使得 $R^s = R^t$, 令 $S = \{ R^0, R^1, \ldots, R^{t-1} \}$, 则 $\forall q \in N$, 有 $R^q \in S$

闭包的构造

通过关系矩阵求闭包的方法:

设关系R, r(R), s(R)和t(R)的关系矩阵分别为M, M_r, M_s和M_t, 则

$$M_r = M + E$$
$$M_s = M + M'$$
$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

其中E是和M同阶的单位矩阵, M'是M的转置矩阵.

闭包的构造

通过关系图求闭包的方法:

设关系R, r(R), s(R), t(R)的关系图分别记为G, G_r, G_s和G_t. 因为G_r, G_s, G_t的顶点集与G的顶点集相等, 故在G上按下述方法添加一些新边即可获得G_r, G_s, G_t .

- 对G中的每个顶点, 若该顶点没有环, 则加上一个环, 即可得到的是G_r;
- 对G中的每一条边, 如果有一条单向边$<x_i, x_j>$, 则加一条反方向边$<x_j, x_i>$, 即可得到G_s;
- 对G中的每个顶点x_i, 找出从x_i出发的所有2步, 3步, …, n步长的路径(n为G中的顶点数);设路径的终点为x_{j1}, x_{j2}, ...,x_{jk}, 若没有从x_i到x_{js}(s=1..k)的边, 就加上这条边.当检查完所有的顶点后就得到图G_t.

改进求传递闭包的方法

结合通过关系图求闭包的方法，可以对采用关系矩阵求关系的传递闭包的方法加以改进：

设$A = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \}$, R为A上的二元关系，其关系矩阵为M，那么有

$$M_t = M + M^2 + \ldots + M^n$$

因为在R的关系图中，从顶点x_i到x_j且不含回路的路径最多n步长.只要找到所有这样的路径，就可找到那些在传递闭包关系图中的边.

改进求传递闭包的方法

沃舍尔(Warshall)算法:

考虑n+1个矩阵的序列$M_0, M_1, \ldots, M_n$. 矩阵M_k的i行j列的元素记为$M_k[i,j]$. $M_k[i,j]=1$当且仅当在R关系图中存在一条从x_i到x_j的路径, 并且这条路径除端点外中间只经过$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$中的结点.

不难证明M_0是R的关系矩阵, 而M_n就对应R的传递闭包.

沃舍尔算法从M_0开始, 顺序计算$M_1, M_2, \ldots$直到M_n为止.

改进求传递闭包的方法

沃舍尔(Warshall)算法:

假设已有M_k, 如何计算M_{k+1}?

$M_{k+1}[i, j] = 1$当且仅当在R的关系图中存在一条x_i到x_j, 并且中间只经过$\{ x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \}$的路径.

这种路径可分成两类:

- 第一类是只经过$\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \}$的路径, 这时有$M_k[i, j] = 1$;
- 第二类是经过x_{k+1}的路径. 注意到回路可以从路径中删除. 此时, 路径可以分为两段, 从x_i到x_{k+1}, 再从x_{k+1}到x_j, 因此有$M_k[i, k+1] = 1$ 且 $M_k[k+1, j] = 1$.

改进求传递闭包的方法

算法 Warshall

输入: M (R的关系矩阵)

输出: M_t (t(R)的关系矩阵)

(1) $M_t \leftarrow M$

(2) for k $\leftarrow$ 1 to n do

(3) for i $\leftarrow$ 1 to n do

(4) for j $\leftarrow$ 1 to n do

(5) $M_t[i, j] = M_t[i, j] + M_t[i, k] \cdot M_t[k, j]$

注意: 算法中矩阵加法和乘法中的元素相加都使用逻辑加.

改进求传递闭包的方法

例. 设A = { a, b, c, d }, R = { <a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <d, b> }, 请用Warshall算法求R的传递闭包.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

闭包的性质

定理 设R是非空集合A上的关系，则

(1) R是自反的，当且仅当r(R) = R

(2) R是对称的，当且仅当s(R) = R

(3) R是传递的，当且仅当t(R) = R

闭包的性质

定理 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

闭包的性质

定理 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若R是自反的，则s(R)与t(R)也是自反的

(2) 若R是对称的，则r(R)与t(R)也是对称的

(3) 若R是传递的，则r(R)是传递的

闭包的性质

上面的定理描述了关系性质和闭包运算之间的联系:

如果关系R是自反的或对称的,那么经过求闭包的运算以后所得到的关系仍旧是自反的或对称的.

但是对于传递的关系,它的自反闭包仍旧保持传递性,但对称闭包就有可能失去传递性.

例如: A = { 1, 2, 3 }, R = { <1, 3> }是A上的传递关系, R的对称闭包 s(R) = { <1, 3>, <3, 1> }. 显然, s(R)不是A上的传递关系. (因为 $<1, 1> \notin s(R)$)

因此,在计算关系R的自反、对称、传递的闭包时,为了不失传递性,传递闭包运算应放在对称闭包运算的后边. 若令tsr(R)表示R的自反、对称、传递闭包,则

$$tsr(R) = t(s(r(R)))$$

等价关系

定义. 设R为非空集合A上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系(Equivalence Relation).

设R是一个等价关系, 若$\langle x, y \rangle \in R$, 称x等价于y, 记作: $x \sim y$.

等价类

定义 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类(Equivalent Class), 简称为x的等价类, 简记为[x].

从以上定义可以知道, x的等价类是A中所有与x等价的元素构成的集合.

等价类的性质

定理 设R为非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集;

(2) $\forall x,y \in A$, 若$<x, y> \in R$, 则$[x] = [y]$;

(3) $\forall x,y \in A$, 若$<x, y> \notin R$, 则$[x]$与$[y]$不交;

(4) $\cup \{ [x] \mid x \in A \} = A$.

商集

定义. 设R为非空集合A上的等价关系, 以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记作A/R, 即:

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

例. 设A = { 1, 2, …, 8 }, 定义A上的关系R如下:

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \land x \equiv y \pmod 3 \}$$

上例中的等价类是:

[2] = [5] = [8] = { 2, 5, 8 }, [1] = [4] = [7] = { 1, 4, 7 },
[3] = [6] = { 3, 6 }

相应地, 商集为 { {1, 4, 7 }, { 2, 5, 8 }, { 3, 6 } }.

划分

定义. 设A为非空集合, 若A的子集族π ($\pi \subseteq P(A)$, 即π是A的子集构成的集合)满足下面的条件:

(1) $\phi \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \phi)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的划分(Partition), 称π中的元素为A的划分块.

例. 设A = { a, b, c, d }, 给定$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\pi_1 = \{ \{ a, b, c \}, \{ d \} \}$

$\pi_2 = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d \} \}$

$\pi_3 = \{ \{ a \}, \{ a, b, c, d \} \}$

$\pi_4 = \{ \{ a, b \}, \{ c \} \}$

$\pi_5 = \{ \phi, \{ a, b \}, \{ c, d \} \}$

$\pi_6 = \{ \{ a, \{ a \} \}, \{ b, c, d \} \}$

商集与划分

从商集的定义可知, 商集A/R是A的一个划分, 并且不同的商集将对应于不同的划分.

任给A的一个划分π, 定义A上的关系R如下:

$R = \{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$与$y$在$\pi$的同一划分块中$\}$

可以证明, R为A上的等价关系, 且该等价关系所确定的商集就是π.

因此, A上的等价关系与A的划分是一一对应的.

偏序关系

定义. 设R为非空集合A上的关系.如果R是自反的、反对称的和传递的, 则称R为A上的偏序关系, 记作≤. 设≤为偏序关系, 如果$<x, y> \in \leq$, 则记作$x \leq y$, 读作“x小于或等于y”.

注意: 这里的“小于或等于”不是针对数的大小, 而是在偏序关系中的顺序性. x“小于或等于”y的含义是: 依照这个序, x排在y的前边或者x就是y.

不同偏序的定义有不同的序解释. 例如:

数的小于或等于关系是偏序关系, 这里$3 \leq 6$是说在数的小于或等于关系中3排在6的前边, 也就是说3比6小或者等于6;

整除关系也是偏序关系, 这里$3 \leq 6$的含义是说在整除关系中3排在6的前面, 也就是说 3可以整除6.

偏序关系

定义 设R为非空集合A上的偏序关系, 定义

(1) $\forall x, y \in A$, $x < y \Leftrightarrow x \le y \wedge x \ne y$;

(2) $\forall x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \le y \vee y \le x$.

其中, $x < y$读作x“小于”y. 这里所说的“小于”是指在偏序中x排在y的前边.

由以上定义可知, 在具有偏序关系的集合A中任取两个元素x和y, 可能有下述几种情况发生:

$x<y$(或$y<x$), $x = y$, x与y不是可比的

例如: $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $\le$是A上的整除关系, 则有:

$1 < 2$, $1 < 3$,

$1 = 1$, $2 = 2$, $3 = 3$,

2和3不可比.

全序关系

定义. 设R为非空集合A上的偏序关系, 如果任意x, y$\in$A, x与y都是可比的, 则称R为A上的全序关系(或线序关系).

例如:

数集上的小于等于关系是全序关系, 因为任何两个数总是可比大小的.

但是, 整除关系通常不是全序关系. 如, 集合{ 1, 2, 3 }上的整除关系就不是全序关系, 因为2和3不可比.

偏序集

定义. 集合A和A上的偏序关系一起叫做**偏序集**, 记作 <A, ≤>.

例如:

整数集合Z和数的小于等于关系≤构成偏序集$<Z, \leq>$,

集合A的幂集P(A)和包含关系$R_{\subseteq}$构成偏序集$<P(A), R_{\subseteq}>$.

偏序集中的覆盖

定义. 设$<A, \leq>$为偏序集, $\forall x,y \in A$, 如果$x<y$且不存在$z \in A$, 使得 $x<z<y$, 则称**y覆盖x**.

例如:

{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系, 有2覆盖1, 4和6都覆盖2.

但是, 4不覆盖1, 因为有$1<2<4$; 6也不覆盖4, 因为$4<6$不成立.

哈斯图

利用偏序关系的自反性、反对称性和传递性可简化偏序关系的关系图, 该关系图称为哈斯图(Hasse Diagram).

在画偏序集$<A, \leq>$的哈斯图时, 首先适当排列顶点的顺序, 使得 $\forall x,y \in A$,

- 若$x<y$, 则将x画在y的下方;
- 对于A中的两个不同元素x和y, 如果y覆盖x, 就用一条线段连接x和y.

最大(小)元, 极大(小)元

定义. 设$<A, \le>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$.

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \le x)$成立, 则称y为B的最小元;

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \le y)$成立, 则称y为B的最大元;

(3) 若$\forall x(x \in B \wedge x \le y \rightarrow x = y)$成立, 则称y为B的极小元;

(4) 若$\forall x(x \in B \wedge y \le x \rightarrow x = y)$成立, 则称y为B的极大元.

注意:

最小元是B中最小的元素, 它与B中其他元素都可比; 极小元不一定与B中元素都可比, 只要没有比它小的元素, 它就是极小元.

对于有穷集B, 极小元一定存在, 但最小元不一定存在. 最小元如果存在, 则一定是唯一的; 极小元则可能有多个.

若B中只有一个极小元, 则它一定是B的最小元.

极大元与最大元也有类似区别.

最大(小)元, 极大(小)元

例. 设X为集合, $A=P(X)-\{\phi\}-\{X\}$, 且$A\neq\phi$. 若$|X|=n$, 问:

(1) 偏序集$<A, R_{\subseteq}>$是否存在最大元?

(2) 偏序集$<A, R_{\subseteq}>$是否存在最小元?

(3) 偏序集$<A, R_{\subseteq}>$中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.

解:

首先, 考察幂集P(X)的哈斯图:

最底层的顶点是空集, 记作第0层;

第1层是单元集;

第2层是二元子集;

…

第n-1层是X的n-1元子集;

第n层(最高层)只有一个顶点X.

偏序集$<A, R_{\subseteq}>$与$<P(X), R_{\subseteq}>$相比, 恰好缺少第0层与第n层.

因此, $<A, R_{\subseteq}>$的极小元就是X的所有单元集$\{x\}(x\in X)$, 极大元恰好少一个元素$X-\{x\}(x\in X)$.

同时, $<A, R_{\subseteq}>$不存在最小元和最大元.

上界与下界

定义. 设$<A, \leq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$.

(1) 若$\forall x(x \in B \to x \leq y)$成立, 则称y为B的上界;

(2) 若$\forall x(x \in B \to y \leq x)$成立, 则称y为B的下界;

(3) 令$C = \{ y \mid y$为B的上界$\}$, 则称C的最小元为B的最小上界或上确界;

(4) 令$D = \{ y \mid y$为B的下界$\}$, 则称D的最大元为B的最大下界或下确界;

由上面定义可知:

B的最小元一定是B的下界, 同时也是B的最大下界; B的最大元一定是B的上界, 同时也是B的最小上界.

反过来不一定正确, B的下界不一定是B的最小元, 因为它可能不是B中的元素; 同样地, B的上界也不一定是B的最大元.

B的上界, 下界, 最小上界, 最大下界都可能不存在. 如果存在, 最小上界与最大下界是唯一的.