

# Black-Litterman 模型

Markowitz 模型的缺点是构建的投资组合过于集中、对输入的参数及样本区间过于敏感、以及估计误差被放大，这些原因影响了 Markowitz 模型的使用。而 Black-Litterman 模型利用概率统计方法，将投资者对大类资产的观点与市场均衡回报相结合，产生新的预期回报。该模型可以在市场基准的基础上，由投资者对某些大类资产提出倾向性意见，然后，模型会根据投资者的倾向性意见，输出对该大类资产的配置建议。

BL 模型并非对 Markowitz 模型的全面否定。在 Markowitz 均值方差模型上发展出来的 CAPM 模型有两个基本假定：一是投资者对预期收益、标准差和风险资产相关性具有一致预测；二是投资者行为遵循最优化原则，即所谓的投资者理性。而 Black and Litterman 认为更为合理的假定是，投资者对通常拥有与一致预期收益不一样的主观的、个人观点 (investor views)，显然这是一个与实际更贴近的假定。

## 一、Markowitz 模型

在资产组合问题中，我们有如下结论：如果市场的无风险利率为  $R$ ，则最优的资产组合由如下公式给出：

$$\mathbf{w}_t = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{z}} - R\mathbf{1})}{B - AR} \quad (1)$$

$$\text{其中 } A \equiv \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N v_{ij} > 0$$

$$B \equiv \mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{z}} = \sum_{i=1}^N \bar{z}_i \sum_{j=1}^N v_{ij}$$

最优组合就是切点组合，当资本市场处于均衡状态时，该组合也是市场组合。即  $w_t = w_m$

(1) 变形得：

$$(\bar{\mathbf{z}} - R\mathbf{1}) = (B - AR)\Sigma\mathbf{w}_t$$

根据 Sharper Ratio:

$$\lambda = \frac{\bar{Z}_m - R}{\sigma_m^2}$$

这样，对于任意资产的隐含超额预期收益率可以写成：

$$\Pi = \lambda \Sigma \mathbf{w}_m \quad (2)$$

其中， $\Pi = \bar{\mathbf{z}} - R\mathbf{1}$

当市场处于均衡状态的时，投资者持有市值加权的组合。通过观察市场组合的回报和方差，可以推出 Sharpe Ratio。例如，取市场的 Sharpe Ratio =4，根据观察到的市场组合（市场各股票的权重），就可以由公式（2）得到资本市场的隐含超额收益率。

## 二、Black-Litterman 模型

针对 Markowitz 模型在资产配置中存在的这些问题，Black and Litterman 1992 年提出了新的预期收益合成方法——概率方法（Bayesian approach），文献中 BL 模型表达方式如下：

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q]$$

其中：

$E[R]$ ：新的加权后的收益向量（ $n \times 1$  列向量）

$\tau$ ：比例关系（常数）

$P$ ：涉及主观看法资产矩阵（ $k \times n$  矩阵）

$\Omega$ ：看法置信度矩阵（ $k \times k$  矩阵）

$\Pi$ ：隐含均衡收益率向量（ $N \times 1$  列向量）

$Q$ ：看法向量（ $k \times 1$  列向量）

$\Sigma$ ：对角矩阵

$T$ ：表示转置

$^{-1}$ ：表示逆矩阵

### 1、资本市场的隐含收益率（ $\Pi$ ）

Litterman (2003) 在 “modern investment management-an equilibrium approach” 一文中对隐含均衡收益有过深入讨论。均衡状态是一种理想状态，表明市场供求处于平衡，这样一种状态尽管在实际中很少发生，市场更多地是处于不均衡中。但这样一种状态正像一只无形的手一样，牵引着市场不断地朝这个方向发展，正如我们在期权市场中反求隐含波动率一样，我们可以从市场观察到的价格、市场权重去反推出市场隐含均衡收益率：

$$\Pi = \delta \Sigma W^m$$

其中，根据 Satchell and Scowcroft (2000) 的方法， $\delta$  表示单位风险的超额收益：

$$\delta = \frac{E(r) - r_f}{\sigma^2}$$

$E(r)$ ：市场组合收益

$r_f$ ：无风险收益

$\sigma^2$ ：市场组合方差

$W^m$ ：市值权重

## 2、比例关系 ( $\tau$ )

采用 Idzorek 的定义，刻度因子  $\tau$  表示组合历史误差与看法误差的比例，计算公式如下：

$$\tau = \frac{P^* \Sigma P^{*T}}{(1/k) * \sum_{i=1}^k (CF / LC_i)}$$

其中：

$LC_i$ ：表示投资对第  $i$  个资产超额收益信心水平

$CF$ ：标准刻度因子， $CF = \frac{P \Sigma P^T}{1}$   
50%

## 3、涉及主观看法资产矩阵 ( $P$ )

$P$  是涉及看法的资产矩阵，是  $k \times n$  矩阵， $k$  表示几种看法， $n$  表示资产数量。采用 Satchell and Scowcroft (2000) 方法，具体构造以下三个看法来例举阐述。

- 1、H 资产绝对收益为 20%，信心水平 70%；
- 2、A 资产比 B 资产收益率高 10%，信心水平 80%；
- 3、C、D 资产比 E、F、G 资产收益高 6%，信心水平 90%

假定资产数量为 10 个，A、B、C、D、E、F、G、H 依次排序为前八个，则 P 矩阵如下：

$$\begin{array}{cccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

第一行代表第一个看法，这是一种绝对方式表达，涉及 H 资产，看法正面为 1。第二行是相对看法，涉及 A、B 两资产，看法正面为 1，负面为-1。第三行涉及多个资产，看法为正面的之各为 1，看法为负面的之和为-1。

#### 4、看法 (Q)

在上例中，看法 (views) 数量  $k=3$ ，列向量为  $(20\%, 10\%, 6\%)^T$

#### 5、看法置信度矩阵 ( $\Omega$ )

$\Omega$  表示投资者的看法与真实情况有所差别，这样的一种预测差异，可以在误差的协方差矩阵中表示，继续上例，三个看法表示如下：

$$\Omega = \begin{bmatrix} CF/LC_1 & 0 & 0 \\ 0 & CF/LC_2 & 0 \\ 0 & 0 & CF/LC_3 \end{bmatrix}$$

由公式 (1)：
$$w_t = \frac{\Sigma^{-1}(\bar{x} - R1)}{B - AR}$$
 可以进一步简化为：

$$w_t = \frac{\Sigma^{-1} \Pi}{1^T \Sigma^{-1} \Pi}$$

得到的新的资产配置反应了投资者的的主观预期。