线性代数

第二章 矩阵

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-3-19

几种特殊矩阵

对角形矩阵

数量矩阵

单位矩阵

三角形矩阵

对称矩阵与反对称矩阵

正交矩阵

对角矩阵(diagonal)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij}=0\ (i\neq j)$$

注

记为：$A=diag(a_{11}, \quad a_{22}, \quad \cdots \quad a_{nn})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ 不是对角阵

性质　　（1）A,B为n阶对角阵，k为常数

$$\Rightarrow kA, A+B, AB, BA \text{仍为对角阵，且 } AB=BA.$$

因

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}=BA$$

(2)　$A^T=A$

(3)　$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

（4）若A可逆，则　$A^{-1}=diag(a_i^{-1})$

（5）若设　$C=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)^T$　，则

$$AC=\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{\beta}_1 \\ a_2\boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ a_n\boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix}\qquad CA=\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{\alpha}_1 & a_2\boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & a_n\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

（二）数量矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

对角元素相等；对角阵的特别情形

性质：

$$AB=\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_{n\times n}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ & \cdots\cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}_{n\times l}=\begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1l} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2l} \\ & \cdots\cdots & & \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \cdots & ab_{nl} \end{pmatrix}_{n\times l}$$

$$=aB$$

单位阵

$$|A|=1 \xrightarrow{?} A=I$$

反例：$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^2=I \xrightarrow{?} A=I$$

反例：$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$(A+I)^2 \underset{=}{?} A^2+2AI+I^2$$

$$A^2-I^2 \underset{=}{?} (A+I)(A-I)$$

等式成立

推广… …

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \text{计算}A^n$$

解法二

$$\because A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\quad =I+B$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\n&1&0\\\frac{n(n+1)}{2}&n&1\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad B^3=O$$

$$\therefore A^n=(I+B)^n\quad =B^n+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}B^2+nB+I$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}B^2+nB+I$$

例　设A、B、C为n阶方阵，且 $AB = BC = CA = I$，求$A^2 + B^2 + C^2$.

解
$$A^2 = AIA = A(BC)A = (AB)(CA) = I \quad I = I$$
$$B^2 = BIB = B(CA)B = (BC)(AB) = I \quad I = I$$

练习：　求C^2

$$C^2 = CIC = C(AB)C = (CA)(BC) = I \quad I = I$$

所以
$$A^2 + B^2 + C^2 = 3I$$

矩阵多项式

例　　设 A 是n阶方阵,　$f(x) = x^2 + 2x - 8$

则　$f(A) = A^2 + 2A - 8I$　*

(　$f(A) = A^2 + 2A \cancel{-} 8$　)

称为矩阵A的一个多项式。

矩阵多项式的分解：　　分解*式

因　$x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$

所以　$A^2 + 2A - 8I = (A-2I)(A+4I)$

三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质: A、B是同阶、同型的三角形矩阵

$\Rightarrow$ kA, $A+B$, AB 仍是同阶同型三角形矩阵。

三角阵的逆矩阵为同型三角阵

对称矩阵

若$a_{ij}=a_{ji}$ ， 称$A=(a_{ij})$是对称矩阵

若$a_{ij}=-a_{ji}$ ， 称$A=(a_{ij})$是反对称矩阵

$(a_{ii}=0)$

性质：（1）A 是对称阵 $\Leftrightarrow$ $A^T=A$

A是反对称阵 $\Leftrightarrow$ $A^T=-A$

（2）A,B是n阶对称阵 $\Rightarrow A+B$ 是对称阵

对称矩阵的方幂、逆矩阵仍为对称阵

A,B是n阶对称阵 $\not\Rightarrow$ AB 是对称阵

A,B是n阶对称阵，则 AB 对称 $\Leftrightarrow AB = BA$

证 “$\Leftarrow$”

$$\because A^T = A, B^T = B, \quad \therefore (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

故AB是对称阵。

“$\Rightarrow$”$\because AB$是对称阵，$\therefore AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$

设A与B为两个n 阶矩阵，A为反对称矩阵，B为对称矩阵，则AB-BA为对称矩阵。

证

由已知条件得：$A^T=-A, B^T=B$

$$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T$$
$$=B^TA^T-A^TB^T$$
$$=B(-A)-(-A)B$$
$$=AB\text{-}BA,$$

即$AB-BA$为对称矩阵。

正交矩阵 (orthogonal matrix)

- A为正交矩阵：$A^TA=AA^T=E$
- 性质：
- (1) $A^{-1}=A^T$
- (2) 按行或列分块：$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & j\neq j\end{cases}$
- (3) det(A)=±1
- 正交矩阵意味着对向量的旋转或镜像

矩阵的初等变换

对矩阵施以下列3种变换

（1）用一个非零的数c乘矩阵的某一行（列）：cRi 或c Ci

倍乘变换

（2）把矩阵的某一行（列）的*c*倍加到另一行（列）: Ri+cRj 或 Ci+cCj

倍加变换

（3）交换矩阵的两行（列）：Rij 或 Cij

对换变换

称为**矩**阵**的初等行(列)**变换。

统**称**为**矩**阵**的初等**变换

.

定义将单位矩阵做一次初等变换所得的矩阵称为初等矩阵

————有三种形式

(1) 初等倍乘矩阵

$$E_i(c)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} i$$

将单位矩阵的第i行（列）乘以非零数c而得到；

(2) 初等倍加矩阵

$$E_{ij}(c)=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&c&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

注意下标

将单位矩阵的第i行乘以c加到第j行得到；

（3）初等对换矩阵

$$
E_{ij}=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

将单位矩阵的第i，j行（列）对换而得到；

三、初等矩阵与初等变换的关系

例 1　　计算下列初等矩阵与矩阵

$$A=(a_{ij})_{3\times n},C=(c_{ij})_{3\times 2},B=(b_{ij})_{3\times 3}$$ 的乘积：

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ca_{21}&ca_{22}&\cdots&ca_{2n}\\a_{31}&a_{32}&\cdots&a_{3n}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&d\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}+dc_{31}&c_{12}+dc_{32}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{13}&b_{12}\\b_{21}&b_{23}&b_{22}\\b_{31}&b_{33}&b_{32}\end{pmatrix}.$$

据例1可知，

初等矩阵左乘A,C----相当于是对A,C做相应的初等行变换

初等矩阵右乘B----相当于是对B做对应的初等列变换

一般地有如下结论：

左乘--行变换；
右乘—列变换.

$E_i(c)A---$表示A的第i行乘c;

$E_{ij}(c)A---$表示A的第i行乘c加至第j行；

$E_{ij}A-$表示A的第i行与第j行 对换位置；

$BE_i(c)---$表示B的第i列乘c;

$BE_{ij}(c)---$表示B的第j列乘c加至第i列；

$BE_{ij}-$表示B的第i列与第j列 对换位置；

四、初等矩阵的基本性质

（1）初等矩阵是可逆矩阵，而且它们的逆矩阵也是初等矩阵。

$$|E_i(c)| = c \neq 0; \quad |E_{ij}(c)| = 1 \neq 0; \quad |E_{ij}| = -1 \neq 0;$$

$$E_i(\frac{1}{c})E_i(c) = I; \; E_{ij}(-c)E_{ij}(c) = I; \; E_{ij}E_{ij} = I;$$

$$E_i^{-1}(c) = E_i(\frac{1}{c}); \; E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c); \; E_{ij}^{-1} = E_{ij};$$

所以,初等矩阵的逆矩阵是同类初等矩阵.

（2）初等矩阵的转置仍是初等矩阵。

例2 设初等矩阵

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix},P_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

试求 $P_1P_2P_3$及$(P_1P_2P_3)^{-1}$.

解

$$P_1P_2P_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&&\\0&k&&\\0&0&1&\\c&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\c&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(P_1P_2P_3)^{-1} = P_3^{-1}P_2^{-1}P_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ -c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

五、用初等变换求逆矩阵

定义　如果B可以由A经过一系列初等变换得到，则称矩阵A与B等价。

任意一个矩阵 $A_{m\times n}$ **都与一形式**

定理

$$D_{m\times n}=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccccc}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{array}\right)\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}r\\ \underbrace{\qquad\qquad}_{r}\qquad\qquad\qquad\end{array}$$

的矩阵等价。

D成为矩阵的标准型(standard form)

例2　　化A为D的形式:

$$1.\quad A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[-1(1)+(3)]{-2(1)+(2)}\begin{pmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}[1]+[2]\\-1[1]+[3]\\-\frac{3}{2}[1]+[4]}}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{-1(2)+(3)}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-[2]+[4]]{-[2]+[3]}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-1(2)]{\frac{1}{2}(1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

推论 **如果A为n阶可逆矩阵，则 $D = I_n$.**

n阶可逆矩阵A与I等价。

定理

A为n阶可逆矩阵 $\Longleftrightarrow$ 它能表示成一些初等矩阵的乘积。

证明 "$\Rightarrow$" 因为A可逆，则经过若干次初等变换可化为I,

即 存在初等矩阵$P_1,\cdots P_s$和$Q_1,\cdots,Q_t$，使

$$I = P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t,$$

所以 $A = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} I Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1} \quad = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}.$

"$\Leftarrow$" 因为初等矩阵可逆，所以充分性显然。

设$A_{n\times n}$可逆，**则存在初等矩阵** $P_1,\cdots P_m$，使 $I=P_m\cdots P_1A$

所以 $A^{-1}=P_m\cdots P_1 \quad =P_m\cdots P_1I$

$$P_m\cdots P_1(A\quad I)_{n\times 2n}=(P_m\cdots P_1A,\quad P_m\cdots P_1I)=(I\quad A^{-1})$$

求逆矩阵的方法：

$$(A\quad I)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I\quad A^{-1})$$