

线性代数

第二章 矩阵

张祥朝

复旦大学光科学与工程系

2013-3-19

几种特殊矩阵

对角形矩阵

数量矩阵

单位矩阵

三角形矩阵

对称矩阵与反对称矩阵

正交矩阵

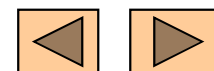
对角矩阵 (diagonal)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} = 0 \ (i \neq j)$$

注

记为: $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{不是对角阵}$$



性质

(1) A, B 为 n 阶对角阵, k 为常数

$\Rightarrow kA, A + B, AB, BA$ 仍为对角阵, 且 $AB = BA$.

$$\text{因 } AB = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = BA$$

$$(2) \quad A^T = A$$

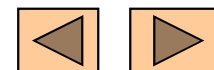
$$(3) \quad |A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$(4) \quad \text{若 } A \text{ 可逆, 则 } A^{-1} = \text{diag}(a_i^{-1})$$

(5) 若设 $C = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$, 则

$$AC = \begin{bmatrix} a_1 \beta_1 \\ a_2 \beta_2 \\ \vdots \\ a_n \beta_n \end{bmatrix}$$

$$CA = [a_1 \alpha_1 \quad a_2 \alpha_2 \quad \cdots \quad a_n \alpha_n]$$



(二) 数量矩阵

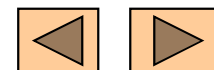
$$A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

对角元素相等；对角阵的
特别情形

性质：

$$\underline{AB} = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a \end{pmatrix}_{n \times n} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix}_{n \times l} = \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1l} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ab_{n1} & ab_{n2} & \cdots & ab_{nl} \end{pmatrix}_{n \times l}$$

$= aB$



单位阵

$$|A| = 1 \xrightarrow{?} A = I \quad \text{反例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

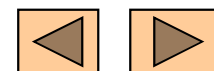
$$A^2 = I \xrightarrow{?} A = I \quad \text{反例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(A + I)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AI + I^2$$

$$A^2 - I^2 \stackrel{?}{=} (A + I)(A - I)$$

等式成立

推广... ..



例 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 计算 } A^n$$

解法二

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I + B$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = O$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^n &= (I + B)^n = B^n + \dots + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + nB + I \\ &= \frac{n(n-1)}{2} B^2 + nB + I \end{aligned}$$

单位矩阵的妙用

例 设 A 、 B 、 C 为 n 阶方阵，且 $AB = BC = CA = I$ ，
求 $A^2 + B^2 + C^2$ 。

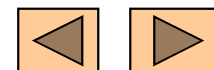
解 $A^2 = AIA = A(BC)A = (AB)(CA) = I I = I$

$$B^2 = BIB = B(CA)B = (BC)(AB) = I I = I$$

练习： 求 C^2

$$C^2 = CIC = C(AB)C = (CA)(BC) = I I = I$$

所以 $A^2 + B^2 + C^2 = 3I$



矩阵多项式

例

设 A 是 n 阶方阵,

$$f(x) = x^2 + 2x - 8$$

$$\text{则 } f(A) = A^2 + 2A - 8I \quad *$$

$$\left(f(A) = A^2 + 2A - 8 \right)$$

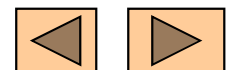
称为矩阵 A 的一个多项式。

矩阵多项式的分解：

分解*式

$$\text{因 } x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

$$\text{所以 } A^2 + 2A - 8I = (A - 2I)(A + 4I)$$



三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \mathbf{0} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

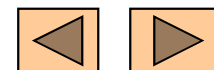
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

性质:

A, B 是同阶、同型的三角形矩阵

$\Rightarrow kA, A+B, AB$ 仍是同阶同型三角形矩阵。

三角阵的逆矩阵为同型三角阵



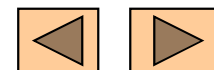
对称矩阵

若 $a_{ij} = a_{ji}$, 称 $A = (a_{ij})$ 是对称矩阵
若 $a_{ij} = -a_{ji}$, 称 $A = (a_{ij})$ 是反对称矩阵
($a_{ii} = 0$)

- 性质 :
- (1) A 是对称阵 $\Leftrightarrow A^T = A$
 A 是反对称阵 $\Leftrightarrow A^T = -A$
 - (2) A, B 是 n 阶对称阵 $\Rightarrow A + B$ 是对称阵

对称矩阵的方幂、逆矩阵仍为对称阵

A, B 是 n 阶对称阵 $\nRightarrow AB$ 是对称阵



A, B 是 n 阶对称阵, 则

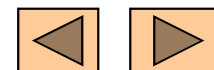
$$AB \text{ 对称} \Leftrightarrow AB = BA$$

证 “ \Leftarrow ”

$$\because A^T = A, B^T = B, \therefore (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

故 AB 是对称阵。

$$\text{“}\Rightarrow\text{”} \because AB \text{ 是对称阵, } \therefore AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$$

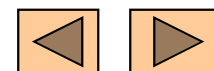


设 A 与 B 为两个 n 阶矩阵， A 为反对称矩阵， B 为对称矩阵，则 $AB-BA$ 为对称矩阵。

证

$$\begin{aligned} \text{由已知条件得： } A^T &= -A, B^T = B \\ (AB - BA)^T &= (AB)^T - (BA)^T \\ &= B^T A^T - A^T B^T \\ &= B(-A) - (-A)B \\ &= AB - BA, \end{aligned}$$

即 $AB - BA$ 为对称矩阵。



正交矩阵 (orthogonal matrix)

- A为正交矩阵: $A^T A = A A^T = E$
- 性质:
- (1) $A^{-1} = A^T$
- (2) 按行或列分块: $\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & j \neq j \end{cases}$
- (3) $\det(A) = \pm 1$
- 正交矩阵意味着对向量的旋转或镜像

矩阵的初等变换

对矩阵施以下列3种变换

(1) 用一个非零的数 c 乘矩阵的某一行（列）： cR_i 或 cC_i

倍乘变换

(2) 把矩阵的某一行（列）的 c 倍加到另一行（列）： R_i+cR_j 或 C_i+cC_j

倍加变换

(3) 交换矩阵的两行（列）： R_{ij} 或 C_{ij}

对换变换

称为矩阵的**初等行(列)变换**。

统称为**矩阵的初等变换**。

初等矩阵

定义将单位矩阵做一次初等变换所得的矩阵称为**初等矩阵**
——有三种形式

(1) **初等倍乘矩阵**

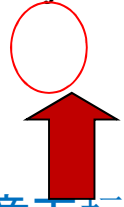
$$E_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & c & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}_i$$

将单位矩阵的第
i行（列）乘以非
零数c而得到；

(2) 初等倍加矩阵

$$E_{ij}(c) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \mathbf{1} & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & c & & \mathbf{1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mathbf{1} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

*E*_{*ij*}(*c*) =



注意下标

将单位矩阵的第*i*行乘以*c*加到第*j*行得到；

三、初等矩阵与初等变换的关系

例 1 计算下列初等矩阵与矩阵

$$A = (a_{ij})_{3 \times n}, C = (c_{ij})_{3 \times 2}, B = (b_{ij})_{3 \times 3} \quad \text{的乘积:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} + dc_{31} & c_{12} + dc_{32} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{12} \\ b_{21} & b_{23} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} & b_{32} \end{pmatrix}$$

据例1可知,

初等矩阵左乘A,C----相当于是对A,C做相应的初等行变换

初等矩阵右乘B----相当于是对B做对应的初等列变换

一般地有如下结论:

左乘--行变换;
右乘--列变换.

$E_i(c)A$ ----表示A的第*i*行乘*c*;

$E_{ij}(c)A$ ----表示A的第*i*行乘*c*加至第*j*行;

$E_{ij}A$ ----表示A的第*i*行与第*j*行 对换位置;

$BE_i(c)$ ----表示B的第*i*列乘*c*;

$BE_{ij}(c)$ ----表示B的第*i*列乘*c*加至第*j*列;

BE_{ij} ----表示B的第*i*列与第*j*列 对换位置;

四、初等矩阵的基本性质

(1) 初等矩阵是可逆矩阵，而且它们的逆矩阵也是初等矩阵。

$$|E_i(c)| = c \neq 0; \quad |E_{ij}(c)| = 1 \neq 0; \quad |E_{ij}| = -1 \neq 0;$$

$$E_i\left(\frac{1}{c}\right)E_i(c) = I; \quad E_{ij}(-c)E_{ij}(c) = I; \quad E_{ij}E_{ij} = I;$$

$$E_i^{-1}(c) = E_i\left(\frac{1}{c}\right); \quad E_{ij}^{-1}(c) = E_{ij}(-c); \quad E_{ij}^{-1} = E_{ij};$$

所以,初等矩阵的逆矩阵是同类初等矩阵.

(2) 初等矩阵的转置仍是初等矩阵。

例2 设初等矩阵

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

试求 $P_1 P_2 P_3$ 及 $(P_1 P_2 P_3)^{-1}$.

解

$$P_1 P_2 P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & k & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(P_1 P_2 P_3)^{-1} = P_3^{-1} P_2^{-1} P_1^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & \mathbf{1} & \\ & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \\ -c & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & \frac{1}{k} & & \\ & & \mathbf{1} & \\ & & & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -c & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -c & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

五、用初等变换求逆矩阵

定义 如果B可以由A经过一系列初等变换得到，则称矩阵A与B等价。

定理 任意一个矩阵 $A_{m \times n}$ 都与一形式

$$D_{m \times n} = \left(\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{1} & & & & \\ & & & \mathbf{0} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mathbf{0} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} \mathbf{1} \\ \ddots \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \ddots \\ \mathbf{0} \end{array}} \right\} r$$

的矩阵等价。

$\underbrace{\hspace{10em}}_r$

D成为矩阵的标准型(standard form)

例2 化A为D的形式:

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2(1)+(2) \\ -1(1)+(3)}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -\frac{1}{2}[1] + [2] \\ -1[1] + [3] \\ -\frac{3}{2}[1] + [4] \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1(2)+(3)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -[2]+[3] \\ -[2]+[4] \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}(1) \\ -1(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

推论 如果 A 为 n 阶可逆矩阵, 则 $D = I_n$.

n 阶可逆矩阵 A 与 I 等价。

定理

A 为 n 阶可逆矩阵 \iff 它能表示成一些初等矩阵的乘积。

证明 \implies 因为 A 可逆, 则经过若干次初等变换可化为 I ,

即 存在初等矩阵 P_1, \dots, P_s 和 Q_1, \dots, Q_t , 使

$$I = P_1 \cdots P_s A Q_1 \cdots Q_t,$$

所以
$$A = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} I Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1} = P_s^{-1} \cdots P_1^{-1} Q_t^{-1} \cdots Q_1^{-1}.$$

\impliedby 因为初等矩阵可逆, 所以充分性显然。

设 $A_{n \times n}$ 可逆, 则存在初等矩阵 P_1, \dots, P_m , 使 $I = P_m \cdots P_1 A$

$$\text{所以 } A^{-1} = P_m \cdots P_1 = P_m \cdots P_1 I$$

$$P_m \cdots P_1 (A \ I)_{n \times 2n} = (P_m \cdots P_1 A, \ P_m \cdots P_1 I) = (I \ A^{-1})$$

求逆矩阵的方法:

$$(A \ I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} (I \ A^{-1})$$
