第 33 卷 第 4 期
2012 年 12 月

力 学 季 刊
CHINESE QUARTERLY OF MECHANICS

Vol. 33 No. 4
Dec. 2012

“正本清源”在力学之数学及专业基础知识体系建立中的作用

谢锡麟

（复旦大学 力学与工程科学系，上海 200433）

摘要：将力学之数学及专业基础知识体系分别归结为微积分和现代张量分析以及基于其上的连续介质力学；借鉴具有一流水平的国内外教程或专著，给出了上述基础知识体系的基本构成。提出以知识点以及知识要素组织知识体系，并分析了微积分知识体系的辐射性发展特征；提出隶属不同知识体系的知识点其所属知识要素可能是同一数学结构或形式，称之为数学通识。我们把数学作为认识自然及非自然世界的系统的思想及方法；叙述了数学知识体系同力学知识体系间的关系。引述微积分、张量分析、微分几何、连续介质力学等知识体系中的有关知识以阐述上述观点，并以自己的方式给出了所涉及的微积分中 Stokes 公式的统一性证明，张量分析中张量梯度的可微性观点以及微分几何中 Lie 导数的场观点定义及结论等。

关键词：知识体系；知识点；知识要素；数学通识；微积分；张量分析；微分几何；连续介质力学
中图分类号：G642.0　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0254-0053(2012)04-544-14

The Roles of “To Radically Reform & To Thoroughly Overhaul” in the Set Up of the Fundamental Mathematical and Mechanical Knowledge Systems of the Mechanics

XIE Xi-lin

(Department of Mechanics & Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: The fundamental mathematical and mechanical knowledge systems of the mechanics were concluded as calculus and modern tensor analysis with continuum mechanics based on it. As referred to the related national and international textbooks and monographs with the first levels, the fundamental constitutions of the above mentioned knowledge systems are presented. It was put forward that the knowledge points with the corresponding knowledge elements are suitable to recognize one knowledge system, and the radical development property of the knowledge system of calculus is expressed. The concept termed as “Mathematical Generality” was put forward that are just some mathematical structures or forms as the so-called knowledge elements of some knowledge points with respect even to different knowledge systems. Mathematics is taken as the systematic ideas and methods to recognize the natural and unnatural worlds in the present paper, and the relationships between mathematical knowledge system and mechanical knowledge system are represented to some extents. Some cases originated from the knowledge systems of calculus, tensor analysis, differential geometry and continuum mechanics are adopted to expound the argu-

收稿日期：2011-12-26

基金项目：国家自然科学基金(10872051)；高等学校博士学科点专项科研基金(新教师基金 20070246139)；上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目“‘现代连续介质力学理论及实践’课程体系”；上海市教委 2011 年重点课程项目“《数学分析》(一年制，面对力学等技术科学专业)”

作者简介：谢锡麟(1974-)男，浙江鄞县人，副教授，博士. 研究方向：理性力学观点下的连续介质力学理论，力学中的数学方法并将上述理论应用于开放流场空间动力学行为等研究. Email: xiexilin@fudan.edu.cn

ments that are raised in the present paper. The related proof of the Stokes formula in calculus in the unified form, the interpretation of the tensor field's gradient in tensor analysis in the point of view of differential and the definitions of the Lie-derivative in differential geometry viewed from field argument with the related results are our own cognitions.

Key words: knowledge system; knowledge point; knowledge element; mathematical generality; calculus; tensor analysis; differential geometry; continuum mechanics

17世纪,牛顿力学体系的建立标志着自然科学的兴起;18－19世纪,连续介质力学的诞生使力学发展成为一门内容丰富并且获得广泛应用的基础科学。① 马克思曾指出"力学是大工业的真正的科学基础"。随着科学技术的发展,现代力学的研究范畴从传统的刚性机械运动延拓至可变形的复杂介质运动,从纯机械世界延拓至机械与物理、化学、生物学等过程的相互作用,甚至渗透至经济、管理、医学等领域②。钱学森先生在2007年对中国力学学会成立五十周年之际的贺词中指出:"力学有两方面的服务对象:一是为工程技术服务,另一是为发展自然科学服务,两者是相辅相成,相互促进的"。

力学学科的上述特征,使得力学知识体系别具特色,她既需要庞大而坚实的数学支撑,又需要联系丰富而多样的自然现象。进而,力学知识体系不仅对研究者提升自身工作层次而且对人才培养等方面都具有极其重要的意义。

本文拟从力学之数学及专业基础知识体系,微积分知识体系的辐射性发展特征,知识体系架构(知识点及知识要素),数学通识,数学知识体系同力学知识体系的关系等方面叙述我们持续性追求具有现代化及一流化特征的力学知识体系所获得的阶段性认识。

1　力学之数学及专业基础知识体系

按通行的理论与应用力学专业(以下简称力学专业)的课程设置,力学知识体系可以分为数学以及专业知识体系二部分。数学知识体系,主要包括:微积分及线性代数(核心基础)→①复变函数＋复分析;②常微分方程＋偏微分方程;③概率论＋数理统计;④微分几何;⑤实分析＋泛函分析等。专业知识体系,主要包括:理论力学及材料力学(核心基础)→①弹性力学＋塑性力学;②流体力学＋空气动力学;③振动力学;④控制力学等。③

鉴于微积分在整个数学知识体系中的核心地位,本文将微积分作为力学之数学基础知识体系。基于对国内外具有一流水平的教程或专著的调研[1-6]④,我们通过图1表示微分学和积分学所能包含的主要内容。

相对于当前国内力学专业的必修内容,具有国内外一流水平的微积分教学表现为如下特征:①将微分学由有限维Euclid空间延拓至一般赋范线性空间⑤;②将积分学由Riemann积分延拓至Jordan测度、Lebesgue测度意义下的积分⑥;③将微积分研究对象由可单个参数化的几何形态延拓至需多个参数化的几何形态,亦即建立微分流形上的微积分⑦。需指出,国内现行微积分课程设置一般为一年或一年半制(一般

---

① 《中国力学学科发展战略研究报告(2011－2020年)》。

② 李家春院士,周恒院士对复旦大学力学与工程科学系进行学术访问时都指出。

③ 参见《2011年理论与应用力学专业教育教学复旦大学研讨会－学术信息整理》,谢锡麟、傅渊、杜俊、陈瑜整理;与会代表间交流,未公开发表。

④ 对于相关知识体系,本文参考文献部分仅列出笔者日常最常用的学习与参阅的教程或专著;尚有很多优秀著作未能列举。

⑤ V. A. Zorich著"Mathematical Analysis"的卷2,对一般赋范线性空间上的微分学给予了极其优越的叙述,相关理论的建立可以完全类比与有限维Euclid空间上的微分学。张筑生著《数学分析新讲》第2册,对有限维Euclid空间上的微分学给予了极好叙述,且能非常好地衔接与一般赋范线性空间上的微分学。

⑥ 对于力学而言,可能我们既需要有限维Euclid空间上的测度论也需要一般集类的测度论,对此周民强编著《实变函数论》(北京大学出版社2009)以及夏道行、吴卓人、严绍宗、舒五昌编著《实变函数论与泛函分析》(上册)(高等教育出版社2010)分别有很好的叙述。

⑦ V. A. Zorich著"Mathematical Analysis"的卷1及卷2,对微分流形的基本定义有极好的叙述,指出对于图(chart)的定义可以既基于微分同胚也可以基于秩定理。

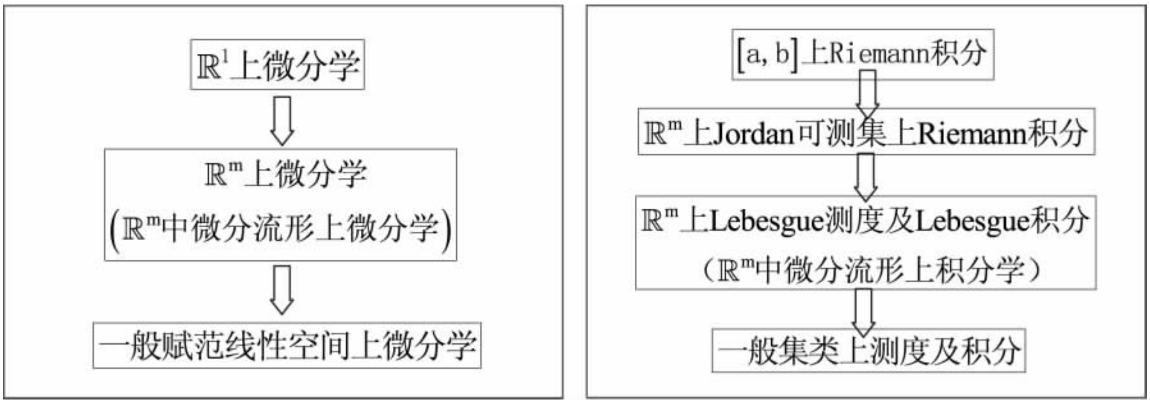

图 1 微分学及积分学知识体系框架

Fig. 1 The frames of the knowledge systems with respect to differential calculus and integral (right)

对应于非数学以及数学专业),故我们可以设计系列课程(包括选修课)以完成上述知识体系的讲述[7]。随着,我们对自然及非自然世界认识的深入,按上述特征提升我们的微积分知识体系具有深远的意义。

鉴于力学的主要研究隶属连续介质力学并因此而独立于物理学,故本文将现代张量分析[8]以及基于其上的连续介质力学[9-11]作为力学之专业基础知识体系。

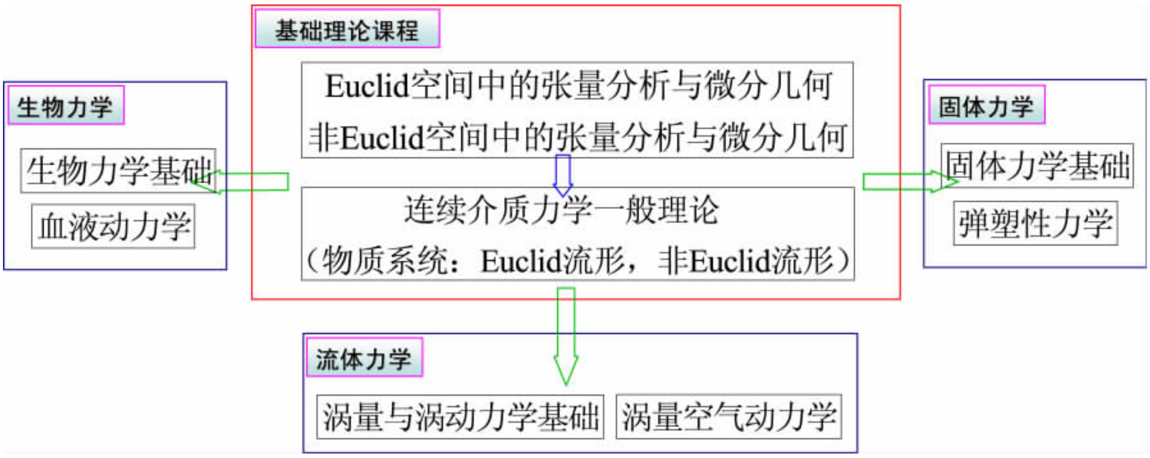

图 2 现代张量分析以及基于其上的连续介质力学知识体系

Fig. 2 The frame of the knowledge systems with respect to modern tensor analysis with continuum mechanics based on it

连续介质力学可谓力学学科的基石。类比于单参数向量值映照对于质点以及刚体力学研究的基础性作用,作为多重线性函数的张量对于研究连续介质的有限变形等力学行为也是极为适合的数学工具。以微积分的思想及方法研究单参数向量值映照或者多重线性函数,构成了向量分析或者张量分析的主要内容。对于现代张量分析以及基于其上的连续介质力学知识体系,如图 2 所示,我们注重以下特征①:①对于 Euclid 空间②上的张量分析,主要表现为将张量定义为多重线性函数,籍此基于简单张量获得张量的表达形式,张量分量间的转换关系等;引入外积运算,以此研究二阶张量的各种代数性质等;基于一般赋范线性空间上的微分学,研究张量场映照微分学以此开展一般曲线坐标系下张量场场论,研究一般张量映照[12]。②对于非 Euclid 空间(Riemann 流形)③上的张量分析,主要表现为引入微分流形上微积分的基本

① 按本文作者相关教学研究与实践的现有程度,仅实现特征①;对特征②、③涉及的非 Euclid 微分流形上的张量分析以及基于其上的连续介质力学尚在进一步研究与实践中。此方面的研究可隶属“力学的几何化”。“力学几何化”的思想及方法在 V. I. Arnold 的系列著作中有着系统且深入的阐述,包括《经典力学的数学方法》、“Ordinary Differential Equations”、“Partial Differential Equations”、“Topological Methods in Hydrodynamics”等。

② 本文中出现的 Euclid 空间以及 Euclid 微分流形指分析中 Riemann-Christoffel 张量处处为零。

③ 本文中出现的非 Euclid 空间以及非 Euclid 微分流形指分析中 Riemann-Christoffel 张量非处处为零。

思想及方法；基于相对不同曲线坐标系下的分量间的转换关系定义张量，Riemann 度量、Riemann 联络(Christoffel 符号)以及协变微分等[①]。从思想和方法上而言，非 Euclid 空间上的张量分析应涵盖 Euclid 空间上的张量分析。③按理性力学的观点研究连续介质力学，首先基于连续介质的几何形态区分 Euclid 微分流形以及非 Euclid 微分流形，然后充分基于力学、物理、现代张量分析以及现代微分几何等的思想及方法研究发生于连续介质之上的力学、物理，甚至化学、生理过程等[②]。

对于各门知识体系，我们先将其归类成若干"知识点"(knowledge point)，而每个知识点又由若干"知识要素"(knowledge element)组成。知识点为认识或处理相关问题所需的定义、结论以及相关研究思想及方法的知识集合，具有一定独立性或功用性；知识要素即为上述知识集合的核心内容。以"知识点＋知识要素"组织知识体系，有助于澄清知识体系的发展脉络及发展特征。

2　微分学知识体系的辐射性发展特征

众所周知，微积分的核心基础为极限，理解对某种"逼近行为"的刻画。进一步，微积分中的极限可以归纳为三类：点列极限，包含级数定义；映照极限，包含可微性定义；部分和极限，主要用于各类积分定义。

从广度而言，微积分知识体系主要包括微分学、积分学以及级数；从深度而言，可以分类为一维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^1$、有限维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 以及一般赋范线性空间上的微分学。

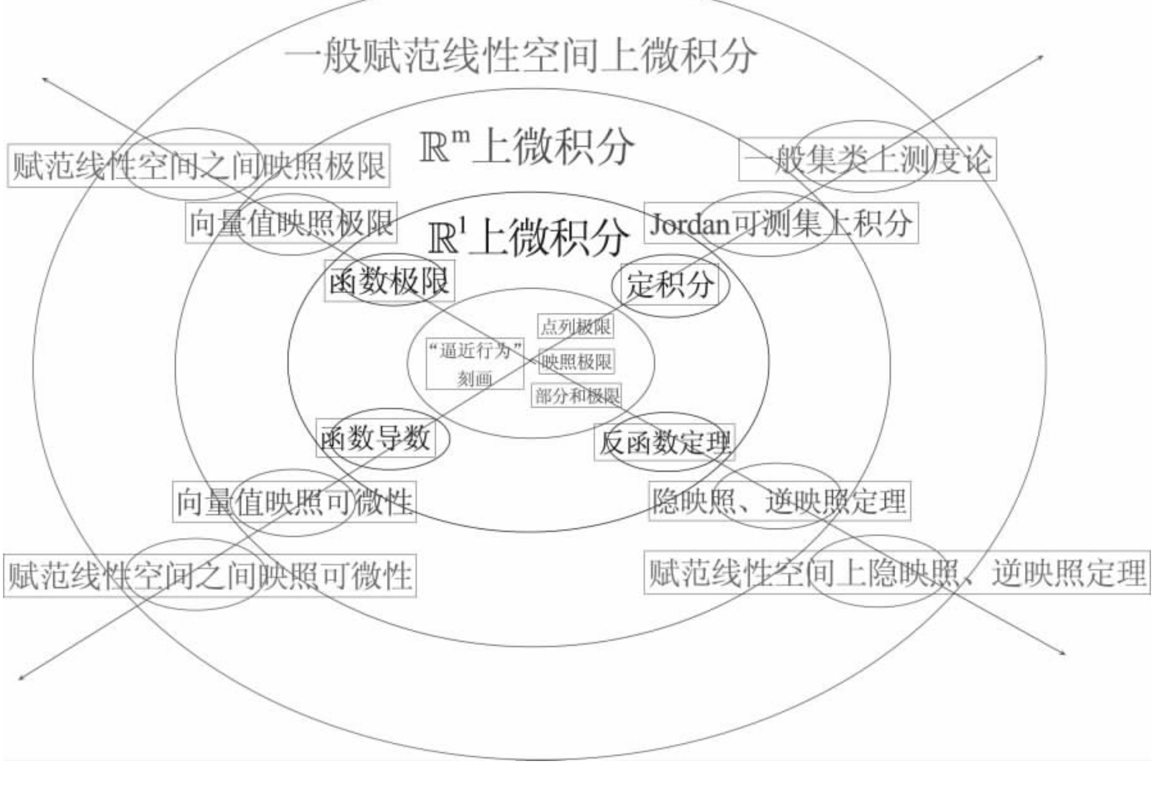

图 3　微积分知识体系的辐射式发展特征

Fig. 3　The sketch of the radical development property of the knowledge system of calculus

对于一维 Euclid 空间上的微积分，我们可以归纳函数极限，函数导数，定积分，反函数定理等知识点。然而，这些知识点的归纳仍然适用于有限维 Euclid 空间，甚至一般赋范线性空间上的微积分知识体系，如图 3 所示。特别对于微分学而言，各层次上的知识体系具有高度的相似性，表现为知识点基本一致，且理论发展的基本思想及方法基本一致。对此我们在教学中，充分反映"温故而知新"的认知效果，注重基于已

① (俄)米先柯，(俄)福明柯著(张爱和译)《微分几何与拓扑学简明教程》应对相关知识体系的建立提供很好的借鉴。

② 李开泰，黄艾香著《张量分析及其应用》(科学出版社 2004)涉及张量分析在流体机械等方面的应用。

有的知识发展新的知识。

2.1 辐射性发展事例:映照可微性

映照可微性的实质为由于自变量变化而引起的因变量的变化可由线性映照近似,且误差为一阶无穷小量;“导数”以及“微分”则按映照的类型具有相应的表现形式。上述映照的可微性刻画需要自变量空间及值域空间均为赋范线性空间。本文按此统一认识列举力学中涉及的主要映照类型如下

§1. 有限维 Euclid 之间的向量值映照:$f(x):\mathbb{R}^m\supset\Omega\ni x\mapsto f(x)\in\mathbb{R}^n$,其可微性定义为

$$f(x+h)=f(x)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(h)+o(|h|_{\mathbb{R}^m}),\text{此处}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

引入$\mathbb{R}^m$ 上范数:$|\xi|_{\mathbb{R}^m}=\sqrt{(\xi,\xi)_{\mathbb{R}^m}}$,则有

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)\cdot h+o(|h|_{\mathbb{R}^m})\in\mathbb{R}^n,\text{此处 }Df(x)=\left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(x)\right]\in\mathbb{R}^{n\times m}$$①。

§2. 张量场映照:$\Phi(x):\mathbb{R}^m\supset\Omega\ni x\mapsto\Phi(x)\triangleq\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot j\cdot}(x)g_i\otimes g^j\otimes g_k(x)\in T^3(\mathbb{R}^m)$,此处以$\mathbb{R}^m$ 上三阶张量为例,其可微性定义为

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)+\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x)(h)+o(|h|_{\mathbb{R}^m}),\text{此处}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x)\in L(\mathbb{R}^m,T^3(\mathbb{R}^m))。$$

引入 $T^3(\mathbb{R}^m)$上范数:$|\Phi|_{T^3(\mathbb{R}^m)}\triangleq\sqrt{\Phi\odot\Phi}=\sqrt{\Phi^{ijk}\Phi_{ijk}}$,则有

$$\begin{aligned}\Phi(x+h)&=\Phi(x)+\nabla_l\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot j\cdot}(x)g_i\otimes g^j\otimes g_k(x)\cdot h^l+o(|h|_{\mathbb{R}^m})\\&\doteq\Phi(x)+[\nabla_p\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot j\cdot}(x)g_i\otimes g^j\otimes g_k\otimes g^p(x)]\cdot[h^lg_l(x)]=:\Phi(x)+(\Phi\otimes\nabla)(x)\cdot H\in T^3(\mathbb{R}^m)\end{aligned}$$

此处$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x}(x)(h)=(\Phi\otimes\nabla)(x)\cdot h$, $H:=h^lg_l(x)$为物理空间中的位移。可见,张量分析中张量场的梯度实质为张量场的“导数”②。

§3. 泛函:$C^p(\Omega)\ni f(x)\mapsto F[f]\triangleq\int_\Omega L(x,f(x),\nabla f(x))\mathrm{d}\tau\in\mathbb{R}$,其可微性定义为

$$F(f+h)=F(f)+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f}(f)(h)+o(|h|_{C^p(\Omega)}),\text{此处}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f}(f)\in L(C^p(\Omega),\mathbb{R})。$$

利用微分同方向导数间的关系:$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f}(f)(h)=D_hF(f)\triangleq\lim\limits_{\lambda\to0}\frac{F(f+\lambda\cdot h)-F(f)}{\lambda}\in\mathbb{R}$③,可基于微积分获得变分临界点所需满足的 Lagrange-Euler 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial L}{\partial\nabla f}(x,f(x),\nabla f(x))\right]-\frac{\partial L}{\partial f}(x,f(x),\nabla f(x))=0。$$

2.2 辐射性发展事例:隐映照定理及逆映照定理

有限维 Euclid 空间中的隐映照定理及逆映照定理(微分同胚局部存在性定理)可谓有限维 Euclid 空间上微分学中最为困难和最为重要的结论。上述定理,无论在数学领域还是力学领域都有诸多重要的应用,例如前者为约束表示,后者为 Legendre 变换提供了理论基础。

① 可参见张筑生著《数学分析新讲》第2册。

② 按本文作者所知,尚未见张量分析有关教程或专著以此方法引入张量场梯度(其分量形式自然涉及协变导数的定义)。基于多次教学实践,本文认为就 Euclid 空间上的张量分析以张量场可微性引入张量场梯度显得较为严格;作为一般赋范线性空间上微分学的具体实践,也易于获得张量场高阶导数等具体形式。另一方面,基于张量场的可微性,即可获得张量场方向导数(包含偏导数)的表达式,籍此可通过引入形式偏导数获得张量场的各种场论微分运算。

③ 相关教程中泛函变分的具体计算基本采用方向导数的形式;但指明此做法的依据为泛函微分等于相应的方向导数有助于正本清源。按一般赋范线性空间上的微分学,任何赋范线性空间之间映照的微分都等于相应的方向导数,且高阶微分的计算也表现为多次方向导数的计算。

我们可基于有限维 Euclid 空间中有界闭集上的压缩映照定理（不动点定理）构造性地证明上述定理①。然而，完备的赋范线性空间（亦为 Banach 空间）中依然成立有有界闭集上的压缩映照定理。故对于一般赋范线性空间之间的映照，当值域空间为 Banach 空间时仍成立有隐映照定理和逆映照定理，且分析的思想和方法几乎完全一致于有限维 Euclid 空间上的分析。

例如，对于张量 $\Phi\in T^r(\mathbb{R}^m)$，$\Psi\in T^s(\mathbb{R}^m)$，满足约束方程 $f(\Phi,\Psi)=0\in T^t(\mathbb{R}^m)$，此处认为约束方程具有足够的正则性。如果，存在 $\Phi_0\in T^r(\mathbb{R}^m)$，$\Psi_0\in T^s(\mathbb{R}^m)$，满足

1. $f(\Phi_0,\Psi_0)=0$
2. $D_\Psi f(\Phi_0,\Psi_0)\in L(T^s(\mathbb{R}^m),T^t(\mathbb{R}^m))$ 为可逆有界线性算子

则有，约束方程在 (Φ_0,Ψ_0) 点附近确定了映照：$\Psi=g(\Phi)\in T^s(\mathbb{R}^m)$，满足 $f(\Phi,g(\Phi))=0\in T^t(\mathbb{R}^m)$ 且有

$$D_\Phi f(\Phi,g(\Phi))+D_\Psi f(\Phi,g(\Phi))\circ Dg(\Phi)=0\in L(T^r(\mathbb{R}^m),T^t(\mathbb{R}^m))。$$

3　知识体系架构：知识点及知识要素

对于一门知识体系，我们建议先以知识点为单位归纳知识体系，然后对每一知识点再归结为若干知识要素，藉此清晰化和条理化知识体系；在教学中，我们可以知识点安排教学进度。以下列举我们在相关教学研究与实践中的若干事例。

3.1　知识点事例：微积分中"无限小增量公式"②

对于函数局部性质的研究，微积分中所提供的主要方法为无限小增量公式

$$f(x)=\left[c_0+\sum_{k=1}^{n}c_k(x-x_0)^k\right]+o((x-x_0)^n)$$

亦即在 x_0 点附近利用高阶多项式进行逼近。对此知识点，我们归纳如下的知识要素：①直接基于无限小增量公式，获得基本初等函数的多项式逼近。如：$\frac{1}{1-x}=1+\sum_{k=1}^{n}x^k+o(x^n)$。②复合函数极限定理。如基于 $\frac{1}{1-x}$ 的逼近，可得 $\frac{1}{1+x^3}=1+\sum_{k=1}^{n}(-x^3)^k+o(x^{3n})$。③由 $f(x)$ 逼近式，经"逐项求导"获得 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ 的逼近式，经"逐项求积"获得的逼近式 $\int f(x)\mathrm{d}x$。④基于 Landau 符号实践"抓住主要矛盾、忽略次要矛盾"。如 $o(\lambda\cdot x^p+o(x^p))=o(x^p)$，$\lambda\in\mathbb{R}$ ③等。

作为应用事例，我们可有如下分析

$$\begin{aligned}\ln\cos x&=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2\right)\\&=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+o(x^4)=-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\end{aligned}$$

一般而言，基于上述四个要素，我们能系统化地获得复杂函数的无限小增量公式。

3.2　知识点事例：张量分析中"三维 Euclid 空间中张量场场论恒等式推导"④

连续介质力学中，我们常需要推导各种形式的张量场场论恒等式。对此，我们归纳如下的知识要素

---

① 多有著作基于隐映照定理或逆映照定理推出逆映照定理或隐映照定理；然而，可基于压缩映照定理独立地证明隐映照定理和逆映照定理，具体的技术性处理，张筑生著《数学分析新讲》（第 2 册）以及 V. A. Zorich 著"Mathematical Analysis"（Vol. 2）都有极其清晰的叙述，且基本思想及方法基本一致。

② 本知识点事例，基于张筑生著《数学分析新讲》（第 2 册）有关内容进行归纳；第④点由本文补充。

③ 此关系式由本文归纳，将基本初等函数的多项式逼近结合复合函数极限定理，常常得到此关系式的左方形式；基于此关系就能得以简化。需指出，有教程在具体问题处理过程中出现左方形式，但未提及必要的说明。

④ 本知识点事例，基于郭仲衡著《张量（理论和应用）》有关内容进行归纳；本文未有补充内容。

Eddington 张量同度量张量之间的关系：$\in^{ijk}\cdot\in_{ipq}=\delta^j_p\delta^k_q-\delta^k_p\delta^j_q$[①]，此处$\in^{ijk}$为 Eddington 张量的协变分量，Kronecker 符号 δ^j_p 为度量张量的混合型分量。此关系式亦可称为置换符号同 Kronecker 符号间的关系。②Ricci 引理：度量张量、Eddington 张量对所有坐标曲线的偏导数为零，亦即$\nabla_l\in^{ijk}(x)$，$\nabla_l g_{ij}(x)$等均为零。微分几何中，Ricci 引理对应现联络或共变微分同 Riemann 度量相容。③Euclid 空间基本性质：张量分量的协变导数可以交换次序，亦即$\nabla_p\nabla_q=\nabla_q\nabla_p$。微分几何中，Euclid 性（空间的平坦性）对应 Riemann－Christoffel 张量为零。

作为应用事例，我们对任意二阶张量场 $\Phi=\Phi^{k}_{\cdot t}g_k\otimes g^t$ 作如下分析

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\Phi)&=\nabla\times(\in_{ijk}\nabla^j\Phi^{k}_{\cdot t}g^i\otimes g^t)=\in^{rsi}\nabla_s(\in_{ijk}\nabla^j\Phi^{k}_{\cdot t})g_r\otimes g^t=\in^{rsi}\in_{jki}\nabla_s(\nabla^j\Phi^{k}_{\cdot t})g_r\otimes g^t\\
&=(\delta^r_j\delta^s_k-\delta^s_j\delta^r_k)\nabla_s(\nabla^j\Phi^{k}_{\cdot t})g_r\otimes g^t=\nabla^j(\nabla_k\Phi^{k}_{\cdot t})g_j\otimes g^t-\nabla_j(\nabla^j\Phi^{k}_{\cdot t})g_k\otimes g^t\\
&=:\nabla(\nabla\cdot\Phi)-\Delta\Phi
\end{aligned}
$$

按分析过程，可见上述张量场恒等式适用于任意阶张量场。一般而言，基于上述知识要素，我们可以顺利地导出诸多张量场场论恒等式，且均在一般曲线坐标系下进行分析。一般教程或专著中，场论恒等式的推导常常在 Cartesian 坐标系下进行。基于上述知识要素，可见一般曲线坐标系下场论分析较 Cartesian 坐标系下分析并不增加任何复杂性；然而基于前者的分析，可以获得场论恒等式相对于一般曲线坐标系所诱导的局部基的分量方程。

3.3 知识点事例：张量分析中“完整基下定义的张量梯度在非完整基下的表示”[②]

连续介质力学中常常需要获得张量场梯度（包括籍此衍生的各种场论运算）的分量表示，如在“单位正交的球坐标系”下获得对流项、Laplace 项等的表达形式。按严格定义，曲线坐标系即为微分同胚，对此可称此曲线坐标系完整系，其诱导的基称为完整基。故常用的“单位正交的球坐标系”并非真正的曲线坐标系，而是对完整的“正交的球坐标系”所诱导的局部基经过单位化而得的单位正交基。此单位正交基并非由曲线坐标（微分同胚）直接诱导，故为非完整基。

对此知识点，其知识要素可归纳如下：①张量分量的坐标转换关系。以三阶张量为例，其基于完整系定义的梯度为

$$
\nabla\otimes\Phi(x):=\nabla_l\Phi^{i\cdot k}_{\cdot j}(x)g^l\otimes g_i\otimes g^j\otimes g_k(x)=:\nabla_{(\theta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\beta)}(x)g^{(\theta)}\otimes g_{(\alpha)}\otimes g^{(\beta)}\otimes g_{(\gamma)}(x)
$$

此处$\{g_i\}$和$\{g_{(i)}\}$分别为完整基和非完整基，其间满足转换关系 $g_{(\theta)}:=C^l_{(\theta)}g_l$，$g^{(\theta)}:=C^{(\theta)}_l g^l$。$\nabla_{(\theta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\beta)}(x)$为张量场梯度在非完整基下的分量，满足张量分量的坐标转换关系$\nabla_{(\theta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\theta)}_{\cdot(\beta)}(x)=C^l_{(\theta)}C^{(\alpha)}_l C^j_{(\beta)}C^{(\gamma)}_k(x)\cdot\nabla_l\Phi^{i\cdot k}_{\cdot j}(x)$。②基本思想为构造“非完整基下的形式协变导数”，涉及形式偏导数、形式 Christoffel 符号以及形式协变导数，如下所示

形式导数：$\partial_{(\theta)}:=C^l_{(\theta)}\partial_l$

Christoffel 符号：$\Gamma^{(\theta)}_{(\alpha)(\beta)}(x):=C^{(\theta)}_k C^i_{(\alpha)}C^j_{(\beta)}(x)\cdot\Gamma^k_{ij}(x)-C^i_{(\alpha)}C^j_{(\beta)}(x)\cdot\dfrac{\partial C^{(\theta)}_j}{\partial x^i}(x)$

协变导数：$\nabla_{(\theta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\beta)}(x):=\partial_{(\theta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\beta)}(x)+\Gamma^{(\alpha)}_{(\theta)(\mu)}\Phi^{(\mu)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\beta)}-\Gamma^{(\mu)}_{(\theta)(\beta)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\gamma)}_{\cdot(\mu)}+\Gamma^{(\gamma)}_{(\theta)(\mu)}\Phi^{(\alpha)\cdot(\mu)}_{\cdot(\beta)}$

按上述计算过程获得的形式协变导数即为非完整基下的张量场梯度分量

③完整基为正交基，非完整基为单位正交基情况，形式协变导数的简单形式

形式导数：$\partial_{(\theta)}:=C^l_{(\theta)}\partial_l=\dfrac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}\partial_l$

Christoffel 符号：$\Gamma\langle\alpha\beta\alpha\rangle=-\Gamma\langle\alpha\alpha\beta\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}}\cdot\dfrac{\partial\ln\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{\partial x^{\beta}}(\alpha\neq\beta)$，其余自然为零

协变导数：$\nabla\langle\theta\rangle\Phi\langle\alpha\beta\gamma\rangle(x):=\partial_{(\theta)}\Phi\langle\alpha\beta\gamma\rangle(x)+\Gamma\langle\theta\mu\alpha\rangle\Phi\langle\mu\beta\gamma\rangle+\Gamma\langle\theta\mu\beta\rangle\Phi\langle\alpha\mu\gamma\rangle+\Gamma\langle\theta\mu\gamma\rangle\Phi\langle\alpha\beta\mu\rangle$

---

① 此处 i 为哑标，遵循 Einstein 求和约定。

② 本知识点事例，基于郭仲衡著《张量（理论和应用）》有关内容进行归纳；本文未有补充内容。

籍此，可正确、便捷地获得任意单位正交基下张量场梯度的分量表示形式。

3.4　知识点事例：连续介质力学中一般形式的输运定理①

类似与微积分中的第一类、第二类曲线和曲面积分，我们将输运定理分成第一类和第二类。此知识点的知识要素，归类如下：①当前构型下有向线元、有向面元的变化率，称为第二类变形率；线元、面元以及体元的变化率，称为第一类变形率。上述二类变化率均由变形梯度刻画。②结合微积分中第一类、第二类曲线、曲面积分以及体积分，即得第一类、第二类物质系统输运定理。③对于控制系统输运方程，将控制线、面以及体考虑为另一类连续介质，则上述分析仍然适用。

具体内容，如下所述。

由$\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)=F\cdot\dfrac{\mathrm{d}\overset{0}{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)$，此处$F\triangleq\dfrac{\partial x^i}{\partial\xi^A}(\xi,t)g_i(x)\otimes G^A(\xi)$为变形梯度，现$\{x^i\}$和$\{\xi^A\}$分别为初始物理构形和当前物理构形对应的曲线坐标系，$\{g_i(x)\}$和$\{G^A(\xi)\}$分别为对应的局部基。基于 Narson 公式，可得第二类变形率②

◇ 有向线元变化率$\overline{\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}}^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda)=L\cdot\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)$，此处$\overset{t}{X}(\lambda)\in\mathbb{R}^3$为当前物理构形中曲线的向量值映照表示，$\lambda\in\mathbb{R}$为参数；$L\triangleq V\otimes\nabla$为速度梯度，$V$为速度。

◇ 有向面元变化率$\overline{\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\mu}}^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda,\mu)=B\cdot\left[\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right]$，此处$\overset{t}{X}(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^3$为当前物理构形中曲面的向量值映照表示，$(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$为参数；$B\triangleq\theta I-\nabla\otimes V$为面变形梯度，$\theta\triangleq V\cdot\nabla$为速度散度。

籍此，将上述第二类变形率结合微积分中第二类曲线、曲面积分计算，即可得第二类输运定理

◇ 第二类线输运

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\gamma}}\Phi*\tau\mathrm{d}l=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha}^{\beta}\Phi*\frac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{\overset{t}{\gamma}}\dot{\Phi}*\tau\mathrm{d}l+\int_{\overset{t}{\gamma}}\Phi*(L\cdot\tau)\mathrm{d}l$$

◇ 第二类面输运

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}}\Phi*n\mathrm{d}\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu}}\Phi*\left[\frac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\lambda}\times\frac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\mu}(\lambda,\mu)\right]\mathrm{d}\sigma=\int_{\overset{t}{\Sigma}}\dot{\Phi}*n\mathrm{d}\sigma+\int_{\overset{t}{\Sigma}}\Phi*(B\cdot n)\mathrm{d}\sigma$$

上述$*$表示任何合法的张量代数运算，如张量并$\otimes$，点积、叉乘等。

将第二类变形率结合内积运算，可得第一类变形率

◇ 线元模变化率$\overline{\left|\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}\right|}^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda)=\tau\cdot L\cdot\tau\left|\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}\right|(\lambda)=\tau\cdot D\cdot\tau\left|\dfrac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}\right|(\lambda)$，此处$\tau$为单位切向量，$D\triangleq\dfrac{1}{2}(V\otimes\nabla+\nabla\otimes V)$为变形率；

◇ 面元模变化率$\overline{\left|\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\mu}\right|}^{\boldsymbol{\cdot}}(\lambda,\mu)=n\cdot B\cdot n\left|\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\lambda}\times\dfrac{\partial\overset{t}{X}}{\partial\mu}\right|(\lambda,\mu)$，此处$n$为单位法向量；

---

① 本知识点事例，借鉴郭仲衡著《非线性弹性理论》有关内容进行归纳。本文认为，仅需基于变形梯度的相关性质并结合微积分中曲线、曲面以及体积分的相关计算式，即可严格获得张量场的各种输运定理。郭仲衡著《非线性弹性理论》着重张量二点形式的表示；基于张量的简单张量表示，本文认为张量的一点、二点或者多点表示形式并非本质，故在相关教学中充分利用《非线性弹性理论》中的有限变形理论，而不强调张量的上述表示形式。

② 此处借鉴郭仲衡著《非线性弹性理论》中变形梯度和线、面、体元素变换间的关系，本文相应地获得变形梯度同当前物理构形中线、面、体之向量值映照的相关导数或偏导数之间的关系（实际上述处理均利用向量值映照的链式求导法则，可自然"诱导出"变形梯度），由此对输运定理的处理可完全融合于微积分中的相关处理。黄克智、薛明德、陆明万编著的《张量分析》（清华大学出版社，2003），直接按变形梯度和线、面、体元素变换间的有关关系，"直接"推导了第二类形式的 Reynolds 输运定理，但未提及本文中的第一类线及面输运形式。

◇ 体元模变化率 $\dot{\overline{\left[\frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \mu}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \nu}\right]}}(\lambda, \mu, \nu)=\theta\left[\frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \mu}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \nu}\right](\lambda, \mu, \nu)$。

籍此，将上述第一类变形率结合微积分中第一类曲线、曲面积分以及体积分计算可得第一类输运形式①

◇ 第一类线输运

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\gamma}} \Phi \mathrm{d}l=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha}^{\beta} \Phi\left|\frac{\mathrm{d}\overset{t}{X}}{\mathrm{d}\lambda}\right|(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{\overset{t}{\gamma}} \dot{\Phi}\mathrm{d}l+\int_{\overset{t}{\gamma}} \Phi(\tau\cdot D\cdot\tau)\mathrm{d}l$$

◇ 第一类面输运

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi \mathrm{d}\sigma &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu}} \Phi\left|\frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \lambda}\times\frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \mu}\right|(\lambda, \mu)\mathrm{d}\sigma=\int_{\overset{t}{\Sigma}} \dot{\Phi}\mathrm{d}\sigma+\int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi\theta\mathrm{d}\sigma-\int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi(n\cdot D\cdot n)\mathrm{d}\sigma \\ &=\int_{\overset{t}{\Sigma}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t)+\nabla\cdot(V\otimes\Phi)\right]\mathrm{d}\sigma-\int_{\overset{t}{\Sigma}} \Phi(n\cdot D\cdot n)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

◇ 体输运

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\overset{t}{V}} \Phi \mathrm{d}v &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{D_{\lambda\mu\nu}} \Phi\left[\frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \mu}, \frac{\partial \overset{t}{X}}{\partial \nu}\right](\lambda, \mu, \nu)\mathrm{d}v=\int_{\overset{t}{V}} \dot{\Phi}\mathrm{d}v+\int_{\overset{t}{V}} \Phi\theta\mathrm{d}v \\ &=\int_{\overset{t}{V}}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t)+\nabla\cdot(V\otimes\Phi)\right]\mathrm{d}\sigma=\int_{\overset{t}{V}}\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t)\mathrm{d}v+\oint_{\partial\overset{t}{V}} \Phi(V\cdot n)\mathrm{d}v\end{aligned}$$

对于控制系统输运方程，将控制线、面以及体考虑为另一类连续介质，则上述分析仍然适用；具体输运形式，仅需将上述物质输运定理中的速度更换为控制系统的速度。

4 数学通识

"数学通识"或者知识体系中的"工兵"。我们生活的世界丰富多彩，但上帝也许就用一样东西创造了这些，这就是"数学机制"或"数学通识"(Mathematical Generality)—— 以某种数学结构或性质为载体，比定理等结论具有更高的归纳性，跨越不同课程甚至学科。值得指出，V. I. Arnold 在其"On Teaching Mathematics"中指出，诸如存在一个函数既控制所有四数平方和的表示也控制一个单摆的实际运动的事例对于教学具有重要的意义，此种不同事物间的关系也能使我们领略到这个世界的和谐之美[13]。

4.1 数学通识事例："同时对角化"

线性代数中有结论：对任意 m 阶对称正定阵 A，任意对称阵 B，存在非奇异阵 G，满足 $G^{\mathrm{T}}AG=I$，$G^{\mathrm{T}}BG=\Lambda$，此处 I 为单位阵，$\Lambda:=diag[\lambda_1, \cdots, \lambda_m]$为对角阵，且 $\lambda_i\in\mathbb{R}(1\leqslant i\leqslant m)$，$|B-\lambda_i A|=0$。此结论称为同时对角化。

振动理论中，保守系统在平衡态附近的运动刻画为：设$\{x^i\}$为曲线坐标，$\{g_{ij}\}$为其度量张量的协变分量，则有

系统动能 $T(t)=\frac{1}{2}g_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)=:\frac{1}{2}\dot{x}^{\mathrm{T}}\cdot[g_{ij}](x(t))\cdot\dot{x}$；

系统势能 $U(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^i\partial x^j}(x(t))x^i(t)x^j(t)=:\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\cdot\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^i\partial x^j}\right](x(t))\cdot\dot{x}(t)$。

此处，$[g_{ij}](x(t))$为对称正定阵，$\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^i\partial x^j}\right](x(t))$为对称阵。基于上述的同时对角化，我们可以先简化

① 参阅本文参考文献中郭仲衡、黄筑平以及谢多夫的相关专著，均未提及第一类线、面体输运形式。

动能和势能的形式，然后按 Lagrange-Euler 方程便得到解耦的简谐振动方程[14,15]。

微分几何中，$m+1$ 维 Euclid 空间中光滑曲面的向量值映照刻画即为

$$\Sigma(x):\mathbb{R}^m \supset D_x \ni x \mapsto \Sigma(x) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

在其任意的非奇异点（亦即满足 $D\Sigma(x)\in\mathbb{R}^{(m+1)\times m}$ 列满秩），则可定义 $A \triangleq (D\Sigma)^{\mathrm{T}}(x)\cdot D\Sigma(x)$，$B\triangleq -(D\Sigma)^{\mathrm{T}}(x)\cdot Dn(x)$（此处 $n(x)$ 为单位法向量场）分别为 m 阶对称正定阵和对称阵。基于同时对角化，不仅可定义平均曲率和 Gauss 曲率分别为 $H\triangleq\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$，$K\triangleq\prod_{i=1}^{m}\lambda_i$，而且可澄清切空间中存在 m 个相互正交的主方向，沿某主方向的法截线的曲率恰为某特征值[16]。

综上可见，如果我们所研究的事物中出现由对称正定阵以及对称阵决定的二次型，同时对角化就能起到简化作用，藉此为获得相关结论提供实质性的支持。

4.2　数学通识事例："反对称阵及其对偶向量"

微积分中众所周知的 Stokes 公式为

$$\oint_{C_{xyz}} \boldsymbol{a}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l=\int_{\Sigma} rot\boldsymbol{a}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

此处设向量场为 $\boldsymbol{a}(x,y,z)=(P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{i}+R\boldsymbol{k})(x,y,z)$，曲面 Σ 的边界为封闭曲线 C_{xyz}。一般微积分教材对 Stokes 公式的证明，往往独立计算得

$$\oint_{C_{xyz}} P(x,y,z)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l=\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\boldsymbol{j}-\frac{\partial P}{\partial y}\boldsymbol{k}\right)(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

类似地可计算其它二个线积分，最终将三者相加即得结论。对此种证法，向量场的旋度似乎仅是计算所得结果，缺乏较为物理的解释。

我们给出 Stokes 公式如下的证明，此处线积分项 $\oint_{C_{xyz}} \boldsymbol{a}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l$ 作为整体进行处理。

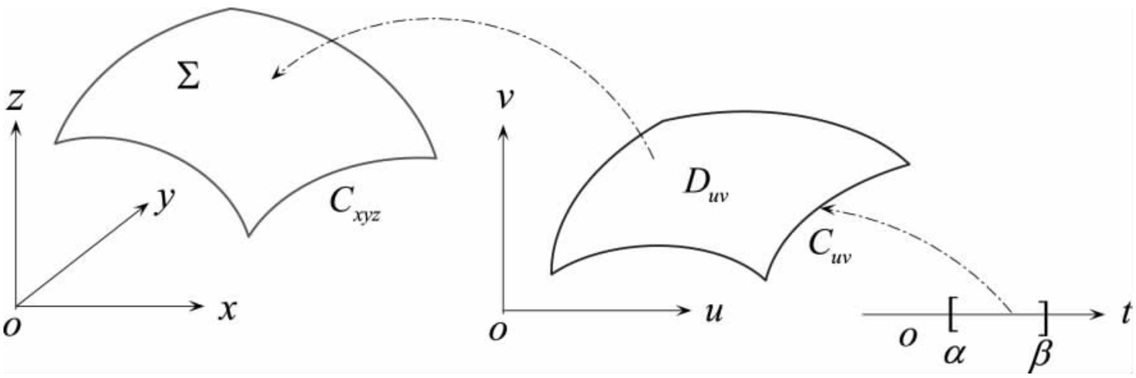

图 4　Stokes 证明所用的图示

Fig. 4　The sketches utilized for the proof of Stokes formula

$$\oint_{C_{xyz}} \boldsymbol{a}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}l=\int_{\alpha}^{\beta}\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{\mathrm{d}C_{xyz}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[P,Q,R](t)\cdot\left(D\Sigma(C_{uv}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}C_{uv}}{\mathrm{d}t}(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}[P,Q,R](t)\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial u & \partial z/\partial v\end{bmatrix}(u(t),v(t))\cdot\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\end{bmatrix}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\left[[P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix},[P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}\right](u(t),v(t))\cdot\begin{bmatrix}\dot u\\ \dot v\end{bmatrix}(t)\mathrm{d}t\text{（分块矩阵运算）}$$

$$=\int_{C_{uv}(t)}\left([P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}\boldsymbol{i}+[P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}(u,v)\boldsymbol{j}\right)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l\text{（参数空间中线积分）}$$

$$=\int_{D_{uv}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left([P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left([P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}\right)\right\}(u,v)\mathrm{d}\sigma\text{（参数空间中 Green 公式）}$$

此处

$$\frac{\partial}{\partial u}\left([P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left([P,Q,R]\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}[P,Q,R]\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}+[P,Q,R]\cdot\frac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}$$

$$-\frac{\partial}{\partial v}[P,Q,R]\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}-[P,Q,R]\cdot\frac{\partial}{\partial v}\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}[P,Q,R]\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial v}[P,Q,R]\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}$$

$$=[\partial x/\partial v\quad \partial y/\partial v\quad \partial z/\partial v]\cdot\frac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}-[\partial x/\partial u\quad \partial y/\partial u\quad \partial z/\partial u]\cdot\frac{\partial}{\partial v}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}$$

对此进一步计算可得

$$[\partial x/\partial v\quad \partial y/\partial v\quad \partial z/\partial v]\cdot\frac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}-[\partial x/\partial u\quad \partial y/\partial u\quad \partial z/\partial u]\cdot\frac{\partial}{\partial v}\begin{bmatrix}P\\ Q\\ R\end{bmatrix}$$

$$=[\partial x/\partial v\quad \partial y/\partial v\quad \partial z/\partial v]\cdot\begin{bmatrix}\partial P/\partial x & \partial P/\partial y & \partial P/\partial z\\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y & \partial Q/\partial z\\ \partial R/\partial x & \partial R/\partial y & \partial R/\partial z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial u\\ \partial y/\partial u\\ \partial z/\partial u\end{bmatrix}$$

$$-[\partial x/\partial u\quad \partial y/\partial u\quad \partial z/\partial u]\cdot\begin{bmatrix}\partial P/\partial x & \partial P/\partial y & \partial P/\partial z\\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y & \partial Q/\partial z\\ \partial R/\partial x & \partial R/\partial y & \partial R/\partial z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\partial x/\partial v\\ \partial y/\partial v\\ \partial z/\partial v\end{bmatrix}$$

$$=:b^{\mathrm{T}}Aa-a^{\mathrm{T}}Ab=b^{\mathrm{T}}Aa-b^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}a=b^{\mathrm{T}}(A-A^{\mathrm{T}})a=:b^{\mathrm{T}}\Omega a$$

此处 $\Omega\triangleq D\Sigma-(D\Sigma)^{\mathrm{T}}$ **为反对称矩阵。相关图示，请见图** 4。

考虑到，对一般三阶反对称矩阵 Ω **有以下表达形式**

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{a}:=[\boldsymbol{i}\quad \boldsymbol{j}\quad \boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a}$$

此处 $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{i}+\omega_2\boldsymbol{j}+\omega_3\boldsymbol{k}$ 常称为反对称阵的对偶向量。

籍此，有：$b^{\mathrm{T}}\Omega a=b^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{bmatrix}\cdot a=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{\omega}$

此处 $\Omega\triangleq A-A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & \partial P/\partial y-\partial Q/\partial x & \partial P/\partial z-\partial R/\partial x\\ \partial Q/\partial x-\partial P/\partial y & 0 & \partial Q/\partial z-\partial R/\partial y\\ \partial R/\partial x-\partial P/\partial z & \partial R/\partial y-\partial Q/\partial z & 0\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{w}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

综上得，$RHS=\int\limits_{D_{uv}} rot\boldsymbol{a}(u,v)\cdot(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)(u,v)\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Sigma} rot\boldsymbol{a}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$。证明完毕。

上述证明清晰地表示：向量场旋度可理解为向量场作为向量值映照其 Jacobi 阵反称化后所对应的对偶向量；获得此结论的关键在于推导出了反对称阵及其对偶向量之间的关系。理论力学中，反对称阵及其对偶向量之间的关系也是建立单参数向量值映照其相对固定参照系变化率与相对运动参照系变化率之间关系的数学基础[15]；由此也成为速度、加速度合成原理的数学基础。现在，微积分中的 Stokes 公式也以此为基础。上述关系似乎意示着"反对称阵及其对偶向量之间的关系"就是各种"旋转现象"的共有数学机制。

5 数学知识体系同力学知识体系的关系

我们把数学理解为：认识自然及非自然世界的系统的思想和方法，而非仅是数学逻辑。由此，相关知识体系的教学需要包括三部分：①数学定义所涉及内容的实际来源；②对定义所展开的逻辑分析（一般数学课程的主要内容）；③数学逻辑所得数学结论（性质或定理等）对实际问题的指导作用。例如，微积分中 Gauss－Ostrogradskii 公式源于定积分中的 Newton－Leibinze 公式，故其形式可为 $\oint\limits_{\partial V}\varphi\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{V}\nabla\varphi\mathrm{d}\tau$ 以及 $\oint\limits_{\partial V}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{V}\nabla\cdot\boldsymbol{a}\mathrm{d}\tau$。一般教程中往往仅叙述后者，而前者却是力学中最为常用的，籍此形式我们可以几乎平凡地获得 Archimedes 浮力定理。

对上述观点，在 V. A. Zorich 著"Mathematical Analysis"等俄罗斯数学教材等具有一流化水平的教程或专著中有着深刻的表现。V. I. Arnold 将 A. Zorich 著"Mathematical Analysis"赞誉为"迄今为止最好的现代分析学教程"。V. I. Arnold 甚至认为"Mathematics is a part to physics. Physics is an experimental science，a part of natural sciences. Mathematics is the part of physics where experiments are cheap"[13]，此处的物理应理解为包括力学等的广泛的物理范畴。

借鉴于 V. I. Arnold 有关数学同自然间的关系，结合自身的学习、教学与研究，我们将认识自然及非自然世界的方法归纳为三种："真实实验"、"数值实验"以及"数学实验"。前二者在力学、物理等学科上已为共识。而数学实验基于数学建模及相关逻辑过程；她可能在某些情形下可以直接确定籍此类实验获得的结论必为真理，而有些情形所得结论需基于实践检验。微积分中有关定积分的应用，基于数学建模（获得基于微元的部分和）及分析（Riemann 积分有关 Darboux 和理论）获得相关结论，包括：平面曲边梯形面积、柱形体体积、旋成体侧面积、有限维 Euclid 空间中曲线弧长等。建模过程中，前二者对应的部分和（对应真实值）可由相关函数的 Darboux 小和和大和控制①，故可明确确认相应函数的积分必为真实值。而后二者，由于真实值无法明确由相关函数的 Darboux 小和和大和控制，故对应的定积分是否为真实值，就必需由实践加以检验。如对旋成体的侧面积计算，我们既可以用圆台侧面积近似也可以用圆柱侧面积近似，数

① 张筑生著《数学分析新讲》（第 1 册）明确叙述了定积分建模中的此种关系。

学分析上都可获得相应函数的定积分，然而经实践检验前者为真理而后者不是。

对于力学从业者而言，将现代数学知识体系（思想及方法）联系与力学知识体系或者直接联系与自然或非自然现象，往往需要我们对数学更为深刻的认识。一般而言，现代数学知识体系的思想及方法并非轻而易举地就能服务于力学研究；她们往往需要经过我们的认识和理解，甚至做一定的“改造”以融合于力学知识体系。

5.1 数学、力学知识体系间关系的事例：从 Lagrange 力学到 Hamilton 力学

V. I. Arnold 所著《经典力学中的数学方法》[14]，倡导以几何的思想及方法认识并处理基本力学问题。总体思想可认识为：①Lagrange 力学：引入广义坐标 $\{q^i\}_{i=1}^{i=N}$ 作为力学系统的构形刻画，$\{q^i\}_{i=1}^{i=N}$ 一般由相应的变分原理（如最小作用原理等）控制，满足变分极值方程；以 $\{q^i\}_{i=1}^{i=N}$ 为 Cartesian 坐标定义相空间，由此力学系统的构形刻画可等价于相空间中由变分原理所决定的轨迹；轨迹可作为相空间中的微分流形。②Hamilton 力学：基于 Legendre 变换，将 Lagrange 力学变换为 Hamilton 力学，亦即将广义坐标 $\{q^i\}_{i=1}^{i=N}$ 和广义速度 $\{\dot{q}^i\}_{i-1}^{i=N}$ 微分同胚意义下变换为广义坐标 $\{q^i\}_{i=1}^{i=N}$ 和广义动量 $\{p_i\}_{i-1}^{i=N}$；以广义坐标、广义动量构成新的 $2N$ 维相空间，此时系统的构形刻画等价于由 Hamilton 系统（动力系统）所决定的轨迹；新的相空间具有自然的辛结构，轨迹可作为相空间中的微分流形。

按现有认识，我们觉得将上述几何化的思想及方法应用于具有有限自由度的系统（刚体系统）时较为清晰，然而是否能够以及如何推广到无限自由度系统（如可变形介质体系）将是非常巨大的挑战。

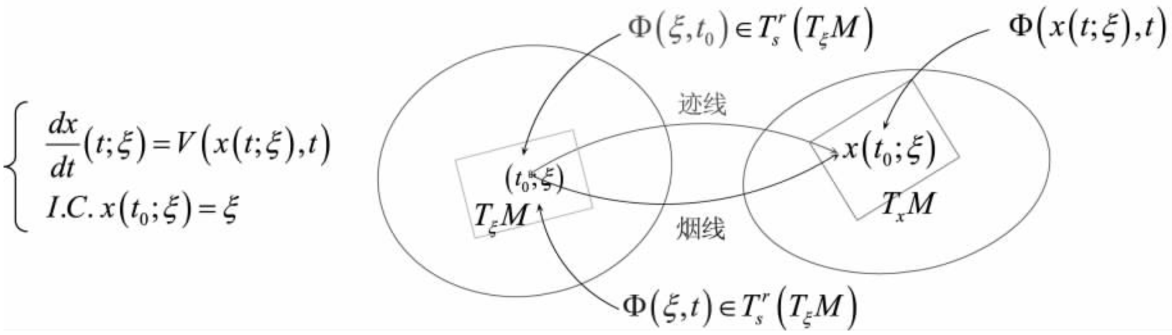

图 5 Lie 导数定义所用的图示

Fig. 5 The sketch utilized for the definitions of Lie-derivative

5.2 数学、力学知识体系间关系的事例：Lie 导数与物质导数、对流导数

任一较为标准的现代微分几何教程都会涉及 Lie 导数的定义，主要思想为基于坐标变换将同一轨线上的张量场拉回至起始点，然后计算此张量场随时间的变化率[8,14,17]。值得指出的是，一般数学文献中 Lie 导数的定义将张量场默认为定常场（未曾明确指出），由此对 Lie 导数的相关诠释既有物质导数[8,14]，亦有对流导数[17]。

按我们认识，按场观点，可将 Lie 导数定义为如下形式，如图 5 所示

① 定义 Lie 导数为沿“轨迹”的变化率，对应为物质导数

$$L_V\Phi(\xi,t_0):=\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi(x(t;\xi),t)-\Phi(\xi,t_0)}{t-t_0}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}(\xi,t_0)+V\cdot\nabla\otimes\Phi(\xi,t_0)$$

②定义 Lie 导数为沿“烟线”的变化率，对应为对流导数

$$L_V\Phi(\xi,t_0):=\lim_{t\to t_0}\frac{\Phi(x(t;\xi),t)-\Phi(\xi,t)}{t-t_0}=V\cdot\nabla\otimes\Phi(\xi,t_0)$$

对于定常情况，轨迹、烟线以及流线三者重合，故上述二者重合。进一步，我们可以证明

$$\begin{aligned}L_V\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot j}(\xi,t_0)&=V^l\partial_l\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot j}-\frac{\partial V^i}{\partial\xi^s}\cdot\Phi^{s\cdot\cdot l}_{\cdot\cdot j}+\frac{\partial V^s}{\partial x^j}\cdot\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot s}-\frac{\partial V^k}{\partial\xi^s}\cdot\Phi^{i\cdot\cdot s}_{\cdot\cdot j}\\&=V^l[\partial_l\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot j}+\Gamma^i_{ls}\Phi^{s\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot j}-\Gamma^s_{lj}\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot s}+\Gamma^k_{ls}\Phi^{i\cdot\cdot s}_{\cdot\cdot j}](\xi,t_0)=:V^l\nabla_l\Phi^{i\cdot\cdot k}_{\cdot\cdot j}(\xi,t_0)\end{aligned}$$

一般数学文献，对于 Lie 导数的计算式仅有前一等式的形式；而第二等式的建立，使得 Lie 导数完全相容于一般曲线坐标系下张量场分析中出现的对流导数项之形式。

6　总结

本文中我们将微积分作为力学之数学基础知识体系，将现代张量分析以及基于其上的连续介质力学作为力学之专业基础知识体系。对于某一知识体系，我们可以归纳为若干知识点，而每一知识点归结为若干知识要素。

所谓的对于知识体系的“正本清源”，包括：①对某一知识体系，以知识点及其所含的知识要素建立其架构；并研究知识体系的发展特征。藉此，我们追求对某一知识体系的“融会贯通”。②隶属于不同知识体系的知识点，其所属的知识要素可能是一致的；我们将此称为“数学通识”。藉此，我们追求不同知识体系间的“触类旁通”。

对某一知识体系而言，其知识点及其知识要素可能会有不同的组织架构。然而，我们在教学研究与实践中需要追求脉络清晰，反映本质的组织架构，有助对知识体系的深入理解和掌握。对于某一知识点，其知识要素的组成也可有不同的归纳，甚至对于同一结论我们可以设计不同的论证方法。由此，我们需尽量追求能反映自然机制的数学分析过程及表述形式，探求自然机制同数学机制（数学通识）之间的关系。

参考文献：

[1]　张筑生. 数学分析新讲（第一、二、三册）[M]. 北京：北京大学出版社，1999.

[2]　ZORICH V A. Mathematical Analysis (Vol. 1, 2)[M]. Berlin Springer-Verlag, 2004(有中译本).

[3]　陈天权. 数学分析讲义（第一、二、三册）[M]. 北京：北京大学出版社，2009.

[4]　陈纪修，於崇华，金路. 数学分析（第一、二册）[M]. 上海：复旦大学出版社，2004.

[5]　阿黑波夫，萨多夫尼奇，丘巴里阔夫. 数学分析讲义[M]. 王昆杨，译. 北京：高等教育出版社，2006.

[6]　卢米斯，斯腾博格. 高等微积分[M]. 王元，胥鸣伟，译. 北京：高等教育出版社，2005.

[7]　谢锡麟. 面对力学专业有关微积分教学的若干体会[C]//第五届全国力学课程报告论坛（2010 年 11 月，四川成都）交流，入选《力学课程报告论坛论文集 2010》. 力学课程报告论坛组委会. 北京：高等教育出版社，http://mechanics.cncourse.com

[8]　郭仲衡. 张量（理论和应用）[M]. 北京：科学出版社，1988.

[9]　郭仲衡. 非线性弹性理论[M]. 北京：科学出版社，1980.

[10]　谢多夫. 连续介质力学（第一、二卷）[M]. 李植，译. 北京：高等教育出版社，2007.

[11]　黄筑平. 连续介质力学基础[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[12]　谢锡麟. 基于现代张量分析的连续介质力学理论及其在流体力学中的实践[C]//第五届全国力学课程报告论坛（2010 年 11 月，四川成都）交流，入选《力学课程报告论坛论文集 2010》. 力学课程报告论坛组委会. 北京：高等教育出版社，http://mechanics.cncourse.com

[13]　ARNOLD A I. On teaching mathematics[EB/OL]. This is an extended text of the address at the discussion on teaching of mathematics in Palais de Découverte in Paris on 7 March 1997. http://pauli.uni-muenster.de/～munsteg/arnold.html

[14]　阿诺尔德. 经典力学的数学方法[M]. 齐民友，译. 北京：高等教育出版社，2006.

[15]　朱照宣，周起钊，殷金生. 理论力学（下册）[M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[16]　米先柯，福明柯. 微分几何与拓扑学简明教程[M]. 张爱和，译. 北京：高等教育出版社，2006.

[17]　DUBROVIN B A, FOMENKO A T, NOVIKOV S P. Modern Geometry-Methods and Applications (Vol. 1, 2, 3)[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.（有中译本）