

# 二维类圆柱尾迹的空间动力学行为研究\*

## I 局部空间动力学行为

陈瑜<sup>1</sup>，谢锡麟<sup>1\*</sup>，麻伟巍<sup>2</sup>

(复旦大学 力学与工程科学系，上海，200433)

(东华大学 理学院，上海，201620)

**摘要:** 本文基于映照观点，通过构造适当的曲线坐标系将物理空间中不规则的流动区域微分同胚至参数区域中的规则区域，且基于一般曲线坐标系下场论分析获得基于一般曲线坐标系的二维不可压缩流动的涡一流函数解法，以数值方法研究低 Reynolds 数工况，规则圆柱、水平及垂直放置椭圆柱以及表面驻波状圆柱尾迹的空间动力学行为。比较了流场总体形态、升阻力系数的时间历程等，对比研究了上述类圆柱尾迹的局部动力学行为，包括壁面涡量、壁面涡量通量等，藉此研究壁面几何特征对流场空间动力学行为的影响。

**关键词:** 二维类圆柱尾迹；空间动力学行为分析；壁面涡量通量

### 1 引言

流场空间动力学行为，总体指流场动力学性质的刻画。一般认为，流场包含几何尺度不一的各种旋涡；具有较大几何尺度的旋涡，可以称为“主导旋涡”，如著名的轴对称剪切层中的涡环，平面剪切层中的 Brown-Roshko 涡，钝体尾迹中的 Karman 涡等等。同一流场也可能含有若干种主导旋涡，如 Reynolds 数约 200-300 的圆柱尾迹中可能同时含有几何尺度相当的 Karman 涡和流向涡。主导旋涡的运动特征（包括空间演化）决定了流场的基本动力学行为，包括动量、能量等输运形式。对于开放流场随空间演化或者对于封闭流场随参数演化，流场会在原主导旋涡的基础上逐步激发出小尺度结构，藉此流动由有序形态向混沌或湍流形态转捩。转捩形式可以归结为若干类，亦隶属流场动力学行为。

流场空间动力学行为[1-4]，一般可分为“局部动力学行为”和“全局动力学行为”二类。局部动力学行为，指限于流场中某点的行为；具体可为①绕流体壁面上应力分布，②边界涡量流分布，③自谱（功率谱）空间演化，④三阶谱（self-bispectrum）空间演化等。源于 Navier-Stokes 方程（NSE）是局部动量守恒的刻画以及数学分析上的工具多限于局部行为，故我们对局部动力学行为具有较为丰富的刻画形式。全局动力学行为，指相关于流场全场或一定空间区域上的行为。主导旋涡的空间演化决定了流场动量及能量输运的基本特征。输运过程不可能“一触及就”，必然对应一定的时空区域。由此，流场的各种输运特征隶属全局动力学行

\*本研究受国家自然科学基金面上项目（10872051，11172069），上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目的资助。通讯作者：谢锡麟 复旦大学 力学与工程科学系；Email: [xiexilin@fudan.edu.cn](mailto:xiexilin@fudan.edu.cn).

为。值得指出，无论是真实实验中的流动显示，还是计算流体动力学（CFD）中的流谱显示，都呈现了流场的整体运动特征，如上下交替脱落和下移的 Karman 涡街，配对并归并的 Brown-Roshko 涡等等——我们见识了自然界中丰富多彩的旋涡及其空间演化，但对旋涡几何形态（需要旋涡的明确定义）及其演化特征等全局动力学行为至今尚无明确的、公认的刻画形式。本研究涉及的全局动力学行为刻画，主要包括：①空间相位分析（基于互谱相位的空间演化）[5, 6]，②全局动量及能量关系式，③物理有界吸引子（包括旋涡的相位界定），④三阶谱（cross-bispectrum）空间演化等。

我们认为所有的封闭或者开放流场都是 NSE 和特定初边值条件（定解问题）的解，称为 Navier-Stokes 系统。——我们希望获得归纳于多类 Navier-Stokes 系统的具有一定共性的行为。本研究涉及的 Navier-Stokes 系统主要为开放流场，包括轴对称剪切流、平面对称剪切流、圆柱尾迹（包括均匀、非均匀来流以及受声激励情形）。

任何隶属局部或全局空间动力学行为的刻画量，我们都尽量要求其“实验可测量”，要求其既同 NSE 在数学上有明确关系（包括局部及全局意义下的关系），也要求其在实验上可测。籍此，我们希望通过系统的实验（包括真实实验及数值实验）认识实验可测量，由此获得对 NSE 局部及全局动力学行为的认识。

本文按映照观点，通过构造适当的曲线坐标系将物理空间中流动区域微分同胚至参数空间中的几何形态规则的区域，数值求解基于一般曲线坐标系下的场论分析获得按一般曲线坐标系的局部基而展开的二维不可压缩流一流函数控制方程。本文通过规则圆柱绕流的计算以较为系统的验证本文所提数值方法的正确性及可靠性，籍此，对比研究水平放置椭圆柱、垂直放置椭圆柱以及驻波状表面圆柱尾迹的空间动力学行为。首先获得流场总体形态、升阻力系数的时间历程等，继而对比不同壁面形状情形下的局部空间动力学行为：壁面切应力、壁面涡量法向通量等沿壁面分布及其同壁面几何特征之间的关系。

## 2 数值研究方法

平面区域构造微分同胚[7]如下：
$$X(x) = \gamma(x^1) + \left( \varphi + x^2 \left( \phi(x^1) - \varphi(x^1) \right) \right) \cdot n(x^1),$$

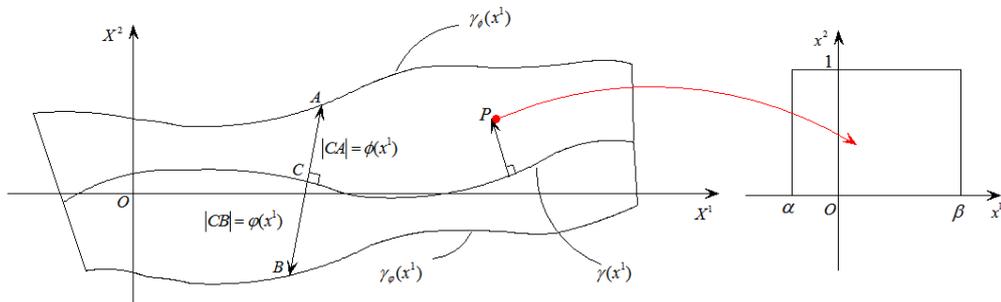


图 1 平面流动之映照构造

涡量控制方程其分量形式为：
$$\frac{\partial \omega^3}{\partial t} + V^i \frac{\partial \omega^3}{\partial x^i} = \frac{1}{Re} \left( g^{ki} \frac{\partial^2 \omega^3}{\partial x^i \partial x^k} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \omega^3}{\partial x^k} \right).$$
 流函数所

满足的方程为：
$$g^{ij} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right] = -\omega^3。$$

涡量控制方程时间导数采用三阶精度的两步预估校正法求解，其中预估步采用二阶精度的 Adams-Bashforth 格式离散，方程空间导数采用五点 Lagrange 插值求得相应项。对于流函数 Poisson 方程求解采用逐次超松弛方法(SOR)迭代求解，取超松弛因子为 1.72。壁面流函数边界条件由流函数的定义因静止壁面而令为 0。壁面涡量条件为：

$$\omega_w = g^{11} \frac{\partial}{\partial x^1} (\sqrt{g} V_w^2) + g^{22} \frac{2}{k^2} [\psi(x^1, x_w^2) - \psi(x^1, x_w^2 + k)]。$$
进口为沿  $x^1$  方向的均匀无旋来流条件，出口限制速度沿流向导数为 0。

计算域网格数为  $270 \times 200$ ，时间步长取  $\Delta t = 0.00125$ 。方程中涉及几何量如 Christoffel 符号由五点 Lagrange 插值并对比解析式值，相对误差在整个区域保持在  $10^{-6}$  以内，由此验证微分同胚的选取以及计算域网格的划分的合理性。通过对环形域上 Poisson 方程相应边值问题映照后在曲线坐标系下迭代求解，并与解析给出特解对比，相对误差在  $10^{-4}$  以内。

对于升阻力系数的计算，本文基于吴介之等[8]提出的动量导数矩理论计算绕流物体所受的载荷。

$$R = -\frac{\mu}{2} \int_{V_f} r \times \Delta \omega \, d\tau + \frac{1}{2} \oint_{\partial B} r \times (n \times \rho a) \, d\sigma - \frac{\mu}{2} \oint_{\Sigma} r \times [n \times (\nabla \times \omega)] \, d\sigma + \mu \oint_{\Sigma} \omega \times n \, d\sigma$$

此公式与控制面  $\Sigma$  的选取无关。

为验证数值方法，取  $Re=100$  的定常均匀来流静止圆柱绕流问题计算，图 2 为无量纲时间  $t=430$  时刻的局部等流函数图，图 3 为对应的等涡量云图，尾流为稳定发展的卡门涡阶。图 4、图 5 为升阻力系数随时间变化曲线。取稳定后数据计算所得 Strouhal 数为  $St = 0.168$ ，阻力系数平均值  $\bar{C}_d = 1.352$ ，与各文献中数值计算和实验结果相符。

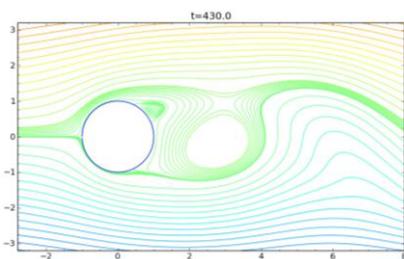


图 2 圆柱绕流等流函数图

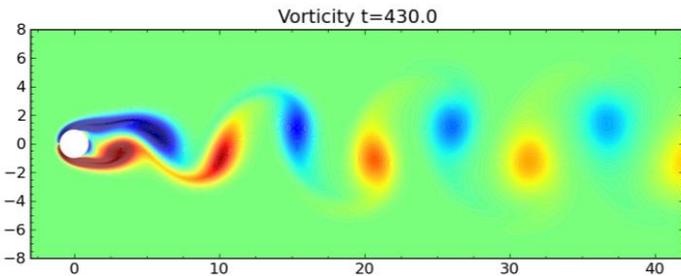


图 3 圆柱绕流等涡量云图

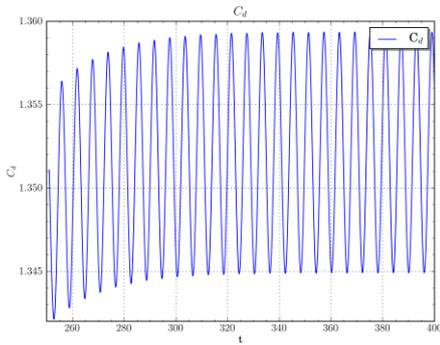


图4 阻力系数曲线（静止圆柱情形）

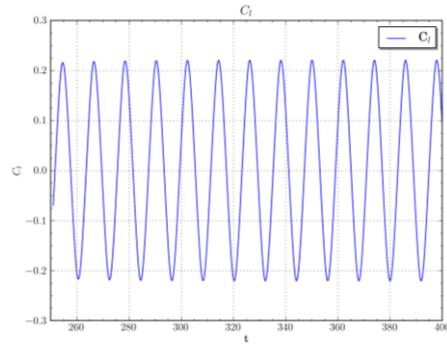


图5 升力系数曲线（静止圆柱情形）

图6 考查了不同积分区域下上述圆柱绕流问题升阻力系数计算的值，如图中所示对于不同半径选取下的计算值，相对误差控制在1.5%以内，验证了实际数值计算中上述升阻力系数计算公式与控制面 $\Sigma$ 的选取无关，也反映了本问题数值计算结果的可靠性。

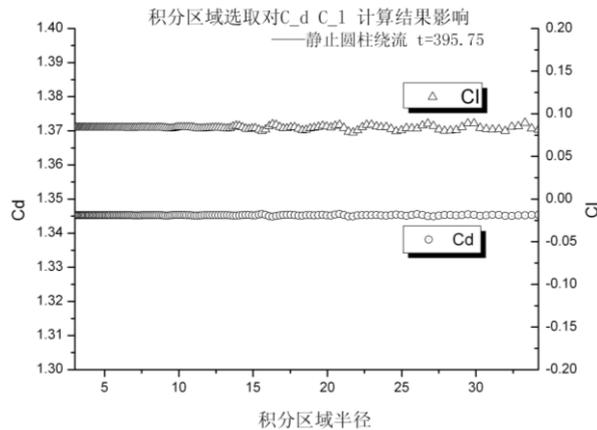


图6 不同积分区域升阻力系数计算结果（静止圆柱情形）

### 3 总体流场特征

通过改变2中微分同胚的具体形式，可以获得不同形状的绕流问题的数值模拟，继而对流场特征进行分析研究。

#### 3.1 水平放置椭圆柱尾迹

本节考察定常均匀来流椭圆柱绕流问题，该椭圆沿流向半轴为1.2，法向半轴为0.8，微分同胚、控制方程、边界条件及其差分方法同前文分析， $Re=100$ ，计算域网格数为 $270 \times 200$ ，时间步长取 $\Delta t = 0.00125$ 。图7为无量纲时间 $t=405$ 时刻的局部等流函数图，图8为对应的等涡量云图，可以看到尾流中稳定发展的卡门涡阶，与圆柱相比，其尾迹较窄，涡阶从物体表面脱落的形态较长。单个涡形态呈扁圆状。

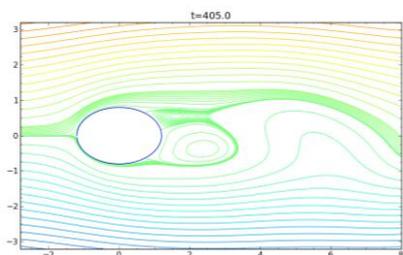


图7 水平放置椭圆柱绕流等流函数图

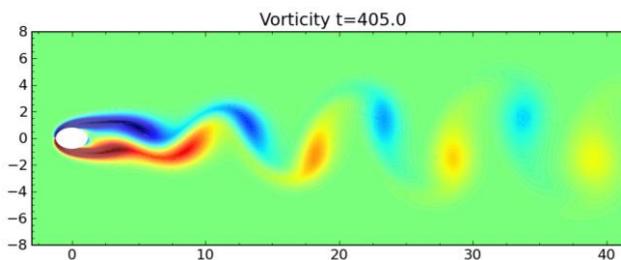


图8 水平放置椭圆柱绕流等涡量云图

### 3.2 垂直放置椭圆柱尾迹

将上节椭圆沿流向半轴设为为 0.8，法向半轴为 1.2，其余参数不变，得到垂直放置椭圆柱尾迹。图 9 为无量纲时间  $t=405$  时刻的局部等流函数图，图 10 为对应的等涡量云图，可见尾流中稳定发展的卡门涡阶，其尾迹与上述圆柱、椭圆柱相比较宽，涡阶从物体表面脱落的形态较短，涡量强度更大。单个涡形态较水平放置椭圆情形更圆。

图 11 为升力系数随时间变化曲线图。图 12 为阻力系数随时间变化情况曲线图。

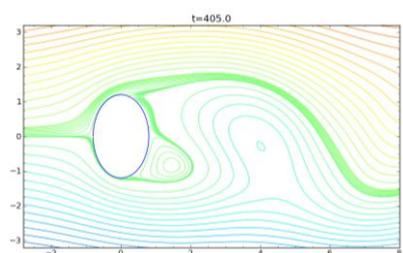


图9 垂直放置椭圆柱绕流等流函数图

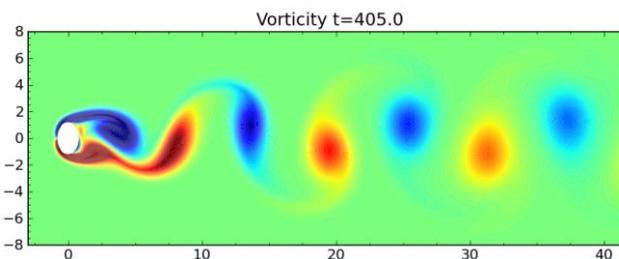


图10 垂直放置椭圆柱绕流等涡量云图

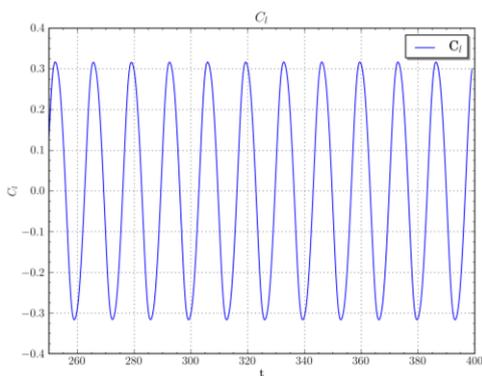


图 11 升力系数曲线（垂直放置椭圆柱情形）

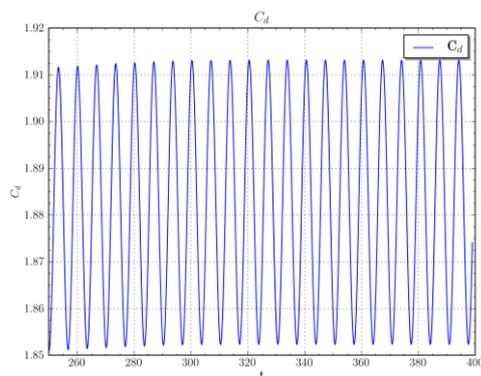


图 12 阻力系数曲线（垂直放置椭圆柱情形）

### 3.3 波状表面圆柱尾迹

本节考查定常均匀来流波状柱体绕流问题，该柱体表面形状刻画函数为：

$R = 1 + 0.15 \cos(6\theta)$ ，微分同胚、控制方程、边界条件及其差分方法同前文分析， $Re=100$ ，计算域网格数为  $270 \times 200$ ，时间步长取  $\Delta t = 0.00125$ 。

无量纲时间  $t=405$  时刻的瞬时流场情况图 13：局部等流函数图，以及图 14：等涡量云图，其表面流场形态较前文圆柱与椭圆情形复杂，凹陷处亦有小尺度涡结构出现，但总体仍有涡阶交替脱落。

图 15 对比了该波状柱体与圆柱绕流的阻力系数随时间演化情况，其阻力系数较圆柱情形大，振幅略小，频率也较小，下文具体比较了不同情况下的脱落频率和阻力系数情况。

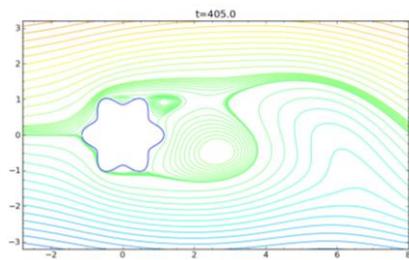


图 13 波状表面圆柱柱绕流等流函数图

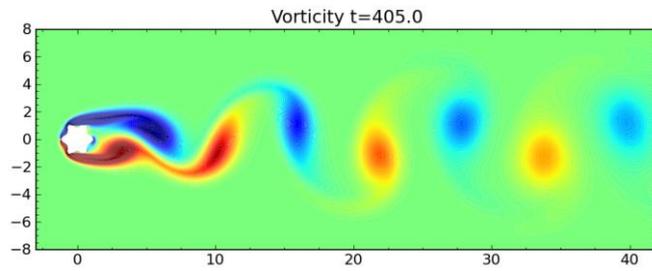


图 14 波状表面圆柱柱绕流等涡量云图

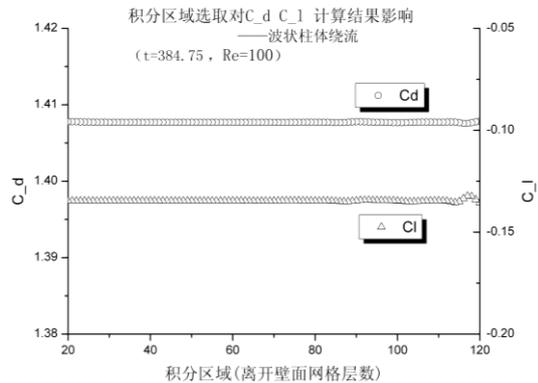
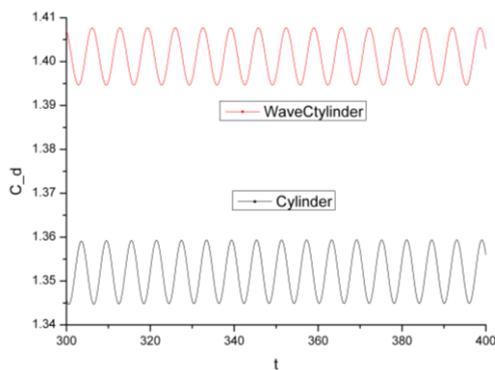


图 15 波状表面圆柱与普通圆柱阻力系数曲线比较 图 16 不同积分区域升阻力系数计算结果（一般边界情形）

图 16 考查了不同积分区域下上述波状表面圆柱绕流问题升阻力系数计算的值，如图中所示对于取离开柱体表面 20-120 网格层区域计算值，绝对误差在  $10^{-3}$  以内，验证了上文升阻力系数计算公式其积分区域无关性对于较为复杂边界情况下也较好地适用，亦进一步验证了本文数值计算方法的可靠性。

表一比较了上述 4 种不同形状柱体尾迹的相关特征，可见阻力系数越大，脱落频率越小，涡脱落越慢。

表一 不同形状柱体尾迹特征比较 Re=100

Tab. 1 Comparison of several kinds of cylinders flow at Re=100

	$St$	平均 $C_d$
水平椭圆	0.176	0.989
圆柱	0.167	1.352
波状圆柱	0.152	1.401
垂直椭圆	0.148	1.882

综合圆柱、水平放置椭圆、垂直放置椭圆、波状圆柱上述四种情形，对于总体流场特征，在  $Re=100$  下均呈现显著的涡街结构，涡对分布位置无明显差异，但是单个涡形态和强度随绕流体形状有差异。不同几何形态绕流体壁面附近的流场则有较为明显的区别，以等流函数图表征，表现为附着涡的形态，以及诸如驻波状圆柱凹陷处的滚轴状涡等局部结构。壁面几何形态的变化在升阻力特征和涡脱落频率上也有较为突出的反应。

## 4 局部动力学行为

### 4.1 壁面切应力分布

对于粘性不可压缩流体，壁面应力表达式为： $t = \mu \omega_w \times n$ ，对于上述二维绕流问题，壁面切应力为  $\tau = \mu \omega_w$ ，以下考察不同形状绕流物体其切应力沿壁面分布情况。

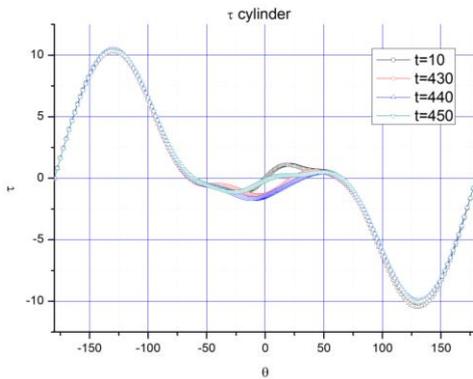


图 17 壁面切应力分布（圆柱情形）

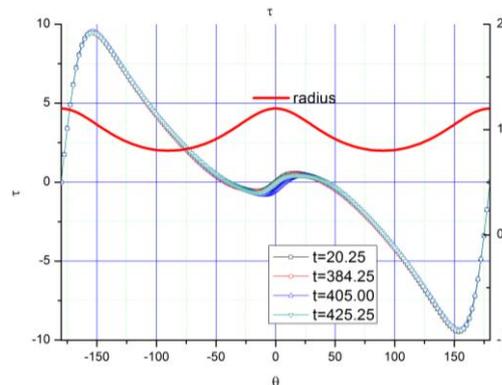


图 18 壁面切应力分布（水平放置椭圆情形）

选取 4 个不同时刻的无量纲壁面切应力沿周向分布曲线，对于圆柱绕流情形，如图 17 中所示，在距离前端约  $130^\circ$  以前，不同时刻壁面切应力沿物体表面分布并无明显差异，分布规律呈正弦曲线，且上下表面呈现对称性，从  $130^\circ$  后到尾部壁面切应力分布随时间变化，上下表面分布不对称，可以判断在此区域内出现流动分离现象。

由图 18 可见，对于水平放置椭圆绕流情形，在距离前端约  $150^\circ$  前，不同时刻壁面切应力

并无明显差异,且上下表面呈现对称性,相比较圆柱绕流,分布规律不再呈正弦曲线,150°后,壁面切应力随时间变化,但变化幅度较小,上下表面分布不再对称,在此区域内流动出现分离。

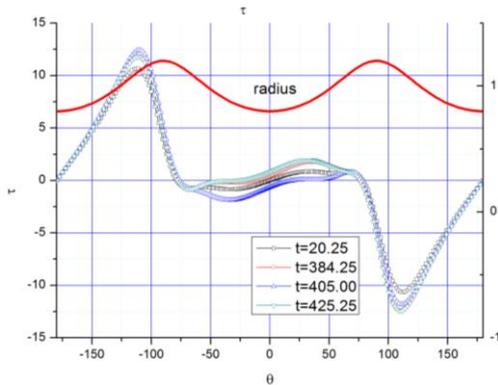


图 19 壁面切应力分布（垂直放置椭圆情形）

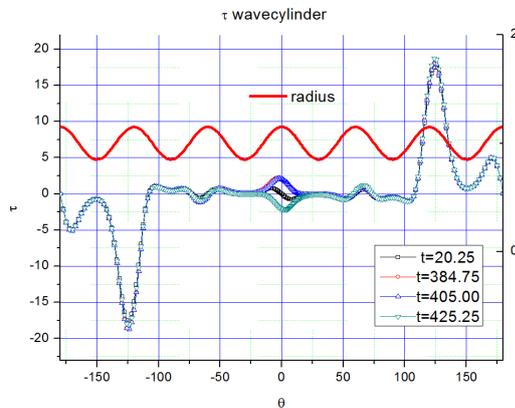


图 20 壁面切应力分布（波状圆柱情形）

对于垂直放置椭圆,如图 19 所示,在距离前端约 120° 前,不同时刻壁面切应力沿物面分布随时间有变化,但总体趋势基本吻合,且上下表面呈现对称性,相比较圆柱绕流,分布规律同样不再呈正弦曲线,从 120° 开始壁面切应力随时间变化较 120° 前明显,上下表面分布不再对称,在此区域内流动出现分离。

波状圆柱情形如图 20,在距离前端约 145° 前,不同时刻涡量通量沿物面分布总体趋势,且上下表面呈现对称性,相比较圆柱绕流,分布规律同样不再呈正弦曲线,从 145° 开始涡量通量随时间变化,由于雷诺数较低,变化幅度并不很大,上下表面分布不再对称,在此区域内流动出现分离。

综合上述比较,瞬时壁面切应力分布中较大幅值的波动对应于剪切层特性,较小幅值的波动对应于几何形态的作用及其作用下的局部流场结构,而壁面切应力随时间的波动对应于分离特性。

#### 4.2 壁面涡量通量

壁面涡通量  $\sigma = n \cdot \nabla(\mu\omega)$ , 对于二维问题曲线坐标系下,为  $\sigma = \mu \left( n^1 \frac{\partial \omega}{\partial x^1} + n^2 \frac{\partial \omega}{\partial x^2} \right)$ ,

$\sigma$  刻画了涡量通过粘性扩散进入流体内部的速率,决定了剪切过程从边界向流体内部传递的机制,对于分析物面产生涡量的过程以及涡量场对物面的反作用,对于研究流动分离的机理,均有着重要的作用[9]。以下就各种不同形状绕流体其壁面涡量通量分布情况进行研究。图 21~图 24 为各工况情形分别选取 4 个不同时刻的无量纲壁面涡量通量沿周向分布曲线。

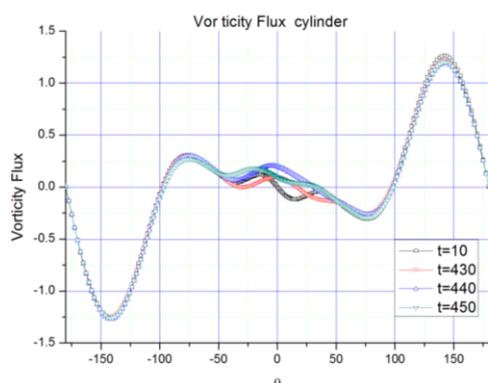


图 21 壁面涡量通量分布（圆柱情形）

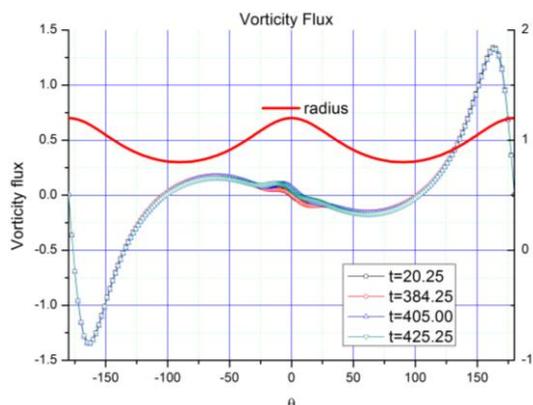


图 22 壁面涡量通量分布（水平放置椭圆情形）

图 21 中所示为圆柱绕流情形，在距离前端约 $130^\circ$ 以前，不同时刻涡量通量沿物体表面分布并无明显差异，分布规律呈正弦曲线，且上下表面呈现对称性，从 $130^\circ$ 后到尾部涡量通量分布随时间变化，上下表面分布不对称，可以判断在此区域内出现流动分离现象。

对于水平放置椭圆情形，从图 22 可见在距离前端约 $150^\circ$ 前，不同时刻涡量通量并无明显差异，且上下表面呈现对称性，相比较圆柱绕流，分布规律不再呈正弦曲线，从 $150^\circ$ 开始涡量通量随时间变化，由于雷诺数较低，变化幅度并不很大，上下表面分布不再对称，在此区域内流动出现分离。

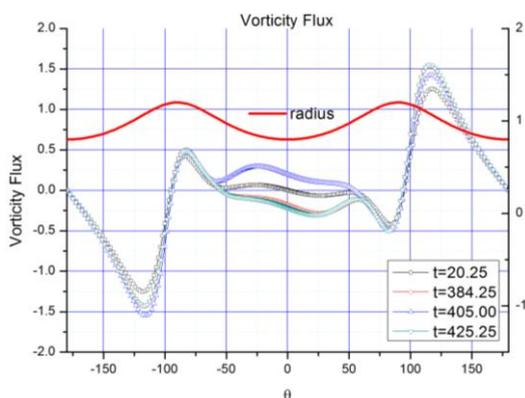


图 23 壁面涡量通量分布（垂直放置椭圆情形）

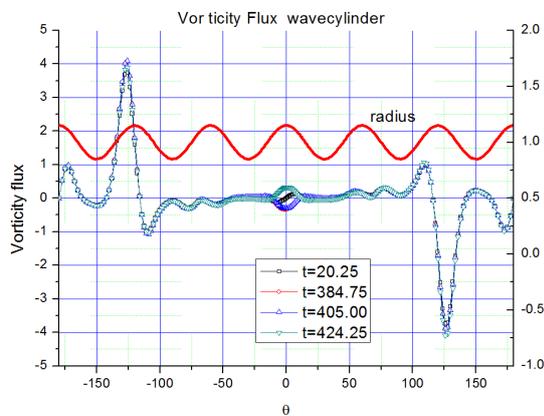


图 24 壁面涡量通量分布（波状圆柱情形）

垂直放置椭圆情形如图 24 所示，在距离前端约 $120^\circ$ 前，不同时刻涡量通量沿物面分布总体趋势，且上下表面呈现对称性，相比较圆柱绕流，分布规律同样不再呈正弦曲线，从 $120^\circ$ 开始涡量通量随时间变化，由于雷诺数较低，变化幅度并不很大，上下表面分布不再对称，在此区域内流动出现分离。

对于波状柱体绕流情形，如图 25，在距离前端约 $145^\circ$ 前，不同时刻涡量通量沿物面分布总体趋势，且上下表面呈现对称性，相比较圆柱绕流，分布规律同样不再呈正弦曲线，从 $145^\circ$ 开始涡量通量随时间变化，由于雷诺数较低，变化幅度并不很大，上下表面分布不再对称，

在此区域内流动出现分离。表 2 综合比较了上述 4 种形状绕流体流动分离点的情况。

表 2 不同形状柱体绕流比较二  $Re=100$

Tab. 2 Comparison of several kinds of cylinders flow at  $Re=100$

形状	分离点 (°)
椭圆 1	150
圆柱	130
波状圆柱	145
椭圆 2	120

总体来说，对于同一物体，壁面切应力和壁面涡量通量分布特征总体相近，具体分布依赖于几何形状以及流场特征，可基于此考察流动分离等局部动力学行为。

## 5 结论与总结

本文通过构造适当的曲线坐标系将物理空间中不规则的流动区域微分同胚至参数区域中的规则区域，并基于一般曲线坐标系下场论分析获得了基于一般曲线坐标系的二维不可压缩流动的涡一流函数解法，籍此数值研究了低 Reynolds 数工况，规则圆柱、水平放置椭圆、垂直放置椭圆柱以及表面驻波状圆柱的尾迹，考察了流场总体形态、升阻力系数时间历程特性，对比研究了上述圆柱尾迹的局部动力学行为，包括壁面涡量、壁面涡量通量等。结果表明了相应思想及数值方法的有效性。低雷诺数下不同几何外形绕流体尾迹总体具有卡门涡街特征，具体涡街形态上有一定差异并反映在升阻力系数及其时间历程特性，而局部空间动力学行为具有较为明显的差异，揭示了剪切过程、壁面局部流场结构和分离特性的差异。

## 参 考 文 献

- 1 谢锡麟, 麻伟巍, 真实开放流场空间动力学行为分析的基本思想及方法, 中国科技论文在线精品论文, 2012 年 2 月, 第 5 卷 第 3 期 (共 10 页)
- 2 谢锡麟, 开放流场空间动力学行为的一种实验研究框架及几类经典流场研究. 复旦大学博士论文, 2004.
- 3 XIE XL. A framework of experimental studies on spatial dynamics of open flows[J]. Modern Physics Letter B, 2005, 19: 28-29.
- 4 XIE XL, MA WW, ZHOU HL. Bifurcation, transition and attractors of real open flows[J]. Journal of Mechanical Engineering Science. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers Part C. Chaos Special Issue, 2006, 220(C3):345-356.
- 5 CHAI J, MA WW, XIE XL. Relations between spatial global dynamics and phase-patterns of open shear flows[J]. 力学季刊, 2005, 26(4): 580-588.
- 6 尚宣廷, 谢锡麟, 麻伟巍 等. 基于自谱及互谱实验研究二维单圆柱尾迹空间动力学行为[J]. 力学季刊, 2010, 31(3):319-328.

- 7 XIE X.L. & CHEN Y. The finite deformation theory corresponding to the curvilinear coordinates with respect to the current physical configurations including time explicitly. Online published in <http://www.paper.edu.cn/>, 2012.
- 8 Wu J.Z, Lu X.Y. & Zhuang L.X., Integral force acting on a body due to local flow structures. *J.Fluid Mech.* 2007, 576:265-286.
- 9 吴介之, 马晖扬, 周明德. 涡动力学引论. 工程力学丛书. 高等教育出版社, 1993

## Numerical study of the spatial dynamics of 2D cylinder wake

CHEN Yu, Xie Xi-lin, MA Wei-wei

(Department of Mechanics of Engineering Science, Fudan University, Shanghai, 200433.

Email: [xiexilin@fudan.edu.cn](mailto:xiexilin@fudan.edu.cn))

**Abstract:** The point of view of mapping which can map the real configurations of continuous medium in the physical space to the regular geometric domains in the parametric space in the diffeomorphism manner were adopted in the present study. Consequently, the vorticity & stream-function algorithm for planar incompressible flows corresponding to the curvilinear coordinates with respect to the current physical configurations can be developed. Based on the present theory, the numerical study to several two dimensional incompressible flows were carried out. And the global features of the wakes together with local spatial dynamics behaviors of 2d cylinder wake such as boundary vorticity distribution, boundary vorticity flux and drag and lift signal were studied correspondingly by comparison. The related results reveal that the characters of the flows especially the local spatial dynamics behavior could be changed due to the geometrical shape of the boundaries.

**Key words:** 2D cylinder wake; spatial dynamics, boundary vorticity flux