

第四章部分重要题目解答

3. 在线性空间 V 中，设向量 β 可被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性表示，但不能被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$ 线性表示。证明向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 与向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, \beta$ 等价。

证明：

(1)由题意知， $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$ 可被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性表示，又已知 β 可被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性表示，因此， $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, \beta$ 可被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性表示。

(2) β 可被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性表示，因此存在一组数 k_1, k_2, \dots, k_r ，使得 $\beta = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_r a_r$ 。又因为 β 不能被向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$ 线性表示，因此 $k_r \neq 0$ 。则 $a_r = \frac{1}{k_r} \beta - \frac{k_1}{k_r} a_1 - \dots - \frac{k_{r-1}}{k_r} a_{r-1}$ 。所以 a_r 可以由向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$ 线性表示。因此向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 可以由 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, \beta$ 线性表示。

(3)因此，向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 与向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{r-1}, \beta$ 等价。

4. 在线性空间 V 中，向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性无关，任取 $\gamma-1$ 个数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\gamma-1}$ 令

$$\beta_1 = a_1 + \lambda_1 a_r$$

$$\beta_2 = a_2 + \lambda_2 a_r$$

...

$$\beta_{r-1} = a_{r-1} + \lambda_{r-1} a_r$$

$$\beta_r = a_r$$

试证： $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 是线性无关的。

证明：

对

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r \end{pmatrix}$$

进行初等列变换 ($C_i - \lambda_i C_r (i \neq r)$)，这样做矩阵的秩不变，之后矩阵变为：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{pmatrix}$$

由于向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 线性无关，因此向量组 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_r$ 的秩为 r ，因此，向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 的秩也是 r ，因此 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 线性无关。

5. 证明向量组：

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

是 R^3 中的一个基，并求向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 在此基下的坐标。

解：

首先， $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 线性无关，因此 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是一个基。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

解之得：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

。因此， $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ 在此基下的坐标为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. 下列向量组是否是线性空间 $P[x]_3$ 的基。

$$(1) a_1 = x + 1, a_2 = x^2 + x, a_3 = x^3 + 1, a_4 = x^3 + x^2 + 2x + 2$$

$$(2) \beta_1 = -1 + x, \beta_2 = 1 - x^2, \beta_3 = -2 + 2x + x^2, \beta_4 = x^3$$

证明：

(1) $a_4 = a_1 + a_2 + a_3$ ，线性相关，因此，不是一组基。

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 秩为 4，因此线性无关，且 $P[x]_3$ 的维数为 4，因此， $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是 $P[x]_3$ 的一组基。

9. 在线性空间 R^4 中，取两个基：

$$(I) \epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(II) \epsilon'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon'_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(1)求由基(I)到基(II)的过渡矩阵M

(2)设 $\alpha = (1 \ 1 \ -1 \ 0)^T$, 求 α 在基(II)下的坐标。

解:

(1)记 $A = (\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3 \ \epsilon_4)$, $B = (\epsilon'_1 \ \epsilon'_2 \ \epsilon'_3 \ \epsilon'_4)$ 则 $B = AM$ 。

$$(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

经过初等行变换, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 7 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ 过渡矩阵为 } M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(2)设坐标为 $X = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ 则 $BX = \alpha$ 。

$$(B \ \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \text{ 得} X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

10. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是n维线性空间V的一个基, 求由这个基到基 $2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots, (n-1)\alpha_{n-1}, n\alpha_n, \alpha_1$ 的过渡矩阵。

解:

$$\because (2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots, (n-1)\alpha_{n-1}, n\alpha_n, \alpha_1) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 \end{pmatrix},$$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots, (n-1)\alpha_{n-1}, n\alpha_n, \alpha_1$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 \end{pmatrix}$$

12. 求下列子空间的维数和一个基:

(1) $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \subseteq R^3$, 其

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(2) $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \subseteq R^4$, 其中

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) 由齐次线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

所确定的解空间。

解:

(1) 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 做初等列变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵是满秩的, 所以子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 的维数为 3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 就是它的一组基。 (2) 对矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 做初等列变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

矩阵的秩为 2, 且 α_3, α_4 对应的列化为全 0, 所以子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 的维数为 2, α_1, α_2 是它的一组基。 (3) 对方程组的系数矩阵做初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & -8/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

方程组的基础解系为 $k_1(-1/9, 8/3, 1, 0)^T + k_2(2/9, -7/3, 0, 1)^T$,

解空间为 $L((-1/9, 8/3, 1, 0)^T, (2/9, -7/3, 0, 1)^T)$ 。

15. 设 W_1, W_2 均是线性空间 V 的子空间, 且 $W_1 \subseteq W_2$, 证明: 如果 W_1 的维数与 W_2 的维数相等, 那么, $W_1 = W_2$ 。

证:

$$\because W_1 \subseteq W_2,$$

$\therefore W_1$ 的每一组基都可以扩充成为 W_2 的一组基。

$$\because W_1, W_2 \text{ 的维数相等},$$

$\therefore W_1$ 的一组基同时也是 W_2 的一组基。

$\therefore W_1, W_2$ 是由同一组基张成的线性空间。

$$\therefore W_1 = W_2$$

17. 在欧氏空间中, 对任意向量 α, β 证明:

$$(1) \|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2);$$

$$(2) (\alpha, \beta) = \frac{1}{4}\|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4}\|\alpha - \beta\|^2;$$

$$(3) \text{ 若 } \alpha, \beta \text{ 正交, 则 } \|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2.$$

证:

(1)

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) + (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \\ &= (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + (\beta, \beta) + (\alpha, \alpha) - (\alpha, \beta) - (\beta, \alpha) + (\beta, \beta) \\ &= 2((\alpha, \alpha) + (\beta, \beta)) \\ &= 2(\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\|\alpha + \beta\|^2 - \frac{1}{4}\|\alpha - \beta\|^2 &= \frac{1}{4}((\alpha + \beta, \alpha + \beta) - (\alpha - \beta, \alpha - \beta)) \\ &= \frac{1}{4}((\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + (\beta, \beta) - (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) - (\beta, \beta)) \\ &= \frac{1}{2}((\alpha, \beta) + (\beta, \alpha)) \\ &= (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

(3) $\because \alpha, \beta$ 正交,

$$\therefore (\alpha, \beta) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\|\alpha + \beta\|^2 &= (\alpha + \beta, \alpha + \beta) \\
&= (\alpha, \alpha) + (\alpha, \beta) + (\beta, \alpha) + (\beta, \beta) \\
&= (\alpha, \alpha) + (\beta, \beta) \\
&= \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2
\end{aligned}$$

18. 在欧氏空间中, 求 α, β 之间的夹角, 其中

- (1) $\alpha = [1, 2, 2, 3]^T, \beta = [3, 1, 5, 1]^T$
- (2) $\alpha = [2, 1, 3, 2]^T, \beta = [1, 2, -2, 1]^T$
- (3) $\alpha = [-1, 3, -5, 1]^T, \beta = [2, -1, 2, -3]^T$

解:

(1)

$$\begin{aligned}
<\alpha, \beta> &= \cos^{-1} \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|} \\
&= \cos^{-1} \frac{18}{\sqrt{18 \times 36}} \\
&= \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
<\alpha, \beta> &= \cos^{-1} \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|} \\
&= \cos^{-1} 0 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
<\alpha, \beta> &= \cos^{-1} \frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\| \|\beta\|} \\
&= \cos^{-1} \frac{-18}{\sqrt{36 \times 18}} \\
&= \cos^{-1} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$