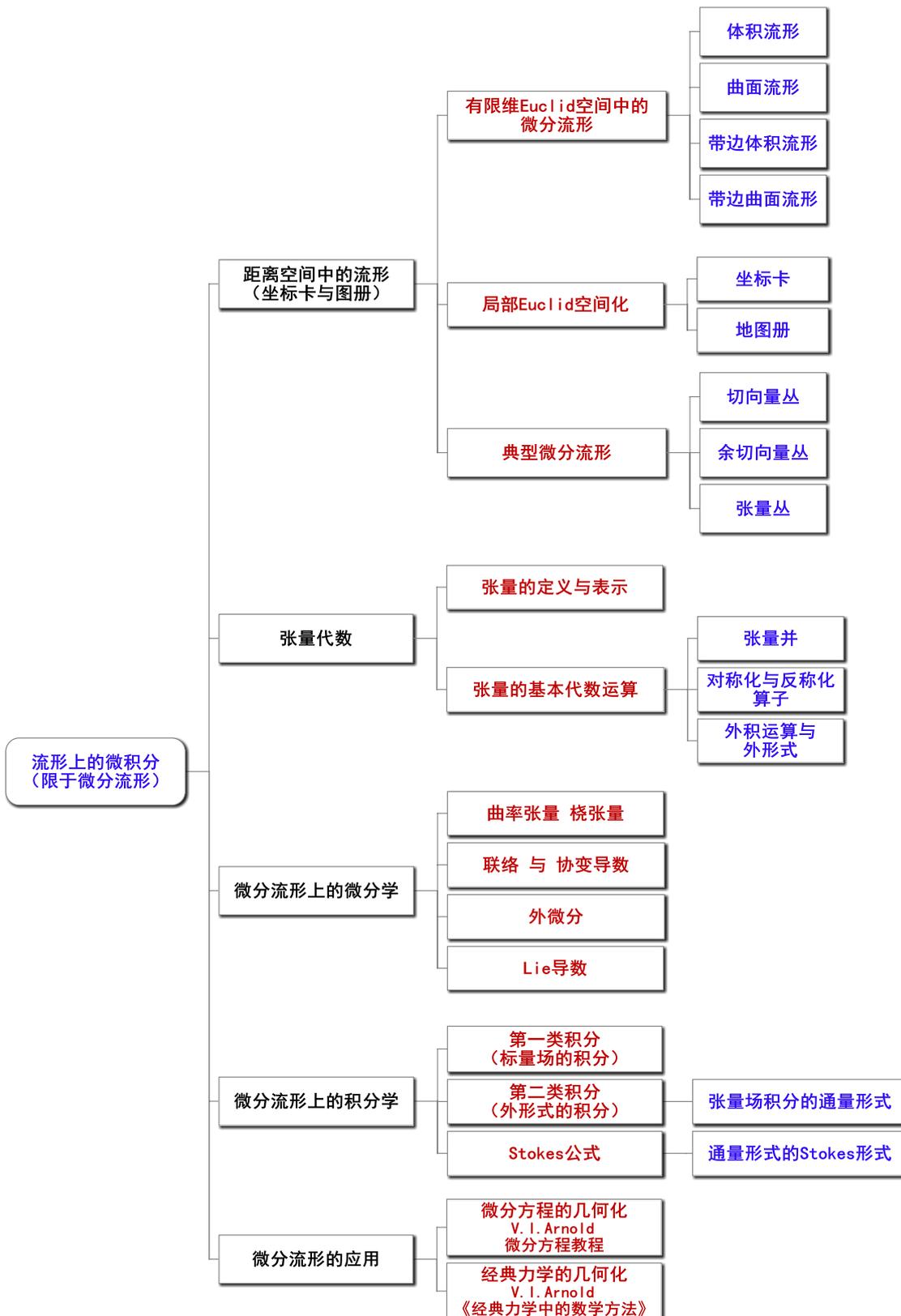


## 复旦大学暑期教学课程介绍

课程代码	MECH130110	学分数	2	周学时	9-12	总学时	36
课程名称	流形上的微积分						
英文名称	Calculus on Differential Manifolds						
任课教师	谢锡麟	职称	副教授	所在院系	航空航天系(原力学与工程科学系)		
预修课程	微积分基础 (相当于一年制的《数学分析》或《高等数学》)						
<p><b>课程性质:</b></p> <p style="text-align: center;">请根据教学培养方案上的课程性质在以下 4 个栏目中选择。</p> <p style="text-align: center;">             通识教育课程      <input type="checkbox"/>                  文理基础课程      <input type="checkbox"/>              专业必修课程      <input type="checkbox"/>                  专业选修课程      <input checked="" type="checkbox"/> </p> <p style="color: blue;">注: 对理论与应用力学、飞行器设计与工程专业学生可作为专业选修课, 其他专业同学应可作为任意选修课。</p>							
<p><b>修读对象:</b></p> <p>所有对微积分进一步理论及应用有兴趣的同学; 本课程也将为有志于进一步研习现代几何学、非线性动力系统、连续介质力学等现代数理知识知识体系, 铺垫坚实的基础。按任课教师认识, 本课程涉及的内容十分有益于自然科学、技术科学以及经管类诸多专业的深入学习与研究。</p>							
<p><b>课程简介:</b></p> <p>本课程致力于将高维 Euclid 空间中的微积分 (高维微积分) 推广至微分流形上的微积分。高维微积分一般涉及高维曲线、三维体积、三维空间中二维曲面上的积分, 就此我需要一般性地获得 <math>m</math> 维 Euclid 空间中 <math>r</math> 维曲面上的积分。另一方面, 高维微积分涉及的体积、曲线、曲面都仅仅涉及一个曲线/参数坐标 (坐标卡), 然而我们所需实际处理的几何体往往需要多个坐标卡才能确定几何体的位置并赋予坐标, 就此需要引入微分流形的概念。</p> <p>本课程按照多个坐标卡以实现局部 Euclid 化的观点引入距离空间中的微分流形。基于多重线性函数的观点引入流场上的张量场, 并基于外积运算研究张量的表示及其代数性质。基于映照观点建立流形上的微分学, 并将相关微分运算联系与连续介质场论。基于外积运算建立流形上的积分学, 体现高维微积分中第一类、第二类积分的自然推广; 并基于外微分运算获得微分流形上的 Stokes 公式。作为理论联系实际的重要方面, 本课程特别涉及微分流形在常微分与偏微分方程、经典力学与理论物理中的相关应用, 意图为研习 V.I.Arnold 等的相关著述提供充实的基础。</p> <p>参照 V.I.Zorich 等著在全球范围享有盛誉的数学分析教程, 我们需要基于 Euclid 空间上的微积分 (我国现行一年级微积分教学的广度与深度) 主要做二方面拓展: (一) 赋范线性空间上的微分学; (二) 流形上的微积分。本课程致力于第二部分的延拓, 可以独立于第一部分进行。</p>							

教学目标：（请填写课程的基本内容及预期达到的教学效果）



上图展现了本课程的知识体系架构，本课程将分五部分阐述相关思想与方法：（1）距离空间中的微分流形；（2）张量代数；（3）流形上的微分学；（4）流形上的积分学；（5）流形上的相关应用。

本课程计划涉及的微分流形的思想与方法可以为研习 V.I.Arnold 著《常微分方程》、《偏微分方程讲义》与《经典力学中的数学方法》等相关著述提供必要与充实的基础，并具有一定的理论联系实际的能力。

## 教学方式:

本次课程以课程讲授为主;另有在线资源可供学习上参考。我们建设的课程体系网站“微积分的一流化进程” <http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.psp> 主要服务于《数学分析》、《经典力学数学名著选讲》、《流形上的微积分》、《应用实变函数与泛函分析基础》等相关课程。网站主要栏目有任课老师、课程介绍、教学视频、课程教案、试卷习题、教学研究、科学研究、课程评估、友情链接、联系我们等。课程体系网站上发布有本课程相关内容的教学视频(本次课程计划继续录制视频并建设专门的在线课程),内容按知识点与知识要素进行剪辑。另,课程体系网站上也发布有课程相关内容的“课程讲稿”等。

## 教材和教学参考资料:

### 主要教材

1. 徐森林等著《流形》,高等教育出版社
2. W.M.Boothby著《An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry》
3. 谢锡麟 编著《微积分讲稿——高维微积分》,复旦大学出版社,计划2017出版. 相关内容
4. 谢锡麟 著《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》,复旦大学出版社,2014. 流形上的微积分相关内容

### 主要参考

1. V.I.Arnold著《Ordinary Differential Equations》,高等教育出版社
2. V.I.Arnold著《Lectures on Partial Differential Equations》, Springer
3. V.I.Arnold著《Mathematical Methods of Classical Mechanics》,俄罗斯数学教材选译
4. V.I.Zorich 著《Mathematical Analysis》(二卷)(第4版),俄罗斯数学教材选译
5. 庞特里亚金著《常微分方程》(第6版),俄罗斯数学教材选译
6. 谢锡麟 编著《微积分讲稿——一元微积分》,复旦大学出版社,2015. 相关内容

注:向修读以及旁听同学无偿提供上述书籍的借阅。可提供一定数量的无偿借阅。

教学内容安排：

《流形上的微积分》，经几次教学研究与实践，现确定的主要内容分五个部分，概述如下。

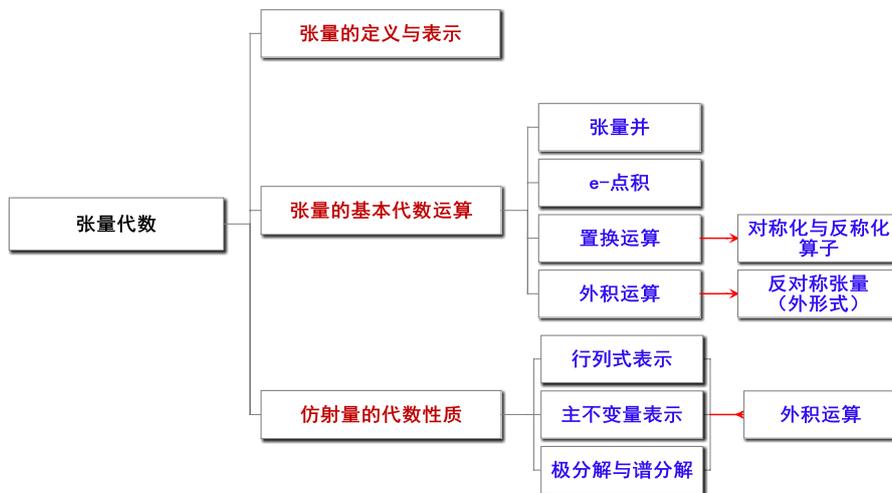
**第一部分 距离空间中的微分流形 讲授 4 学时/次，共 3 次**



有限维 Euclid 空间中的微分流形，主要包括： $m$  维 Euclid 空间中体积形态的微分流形， $m$  维 Euclid 空间中  $r$  维曲面作为微分流形； $m$  维 Euclid 空间中体积形态的带边流形，曲面形态的带边流形。值得指出，Euclid 空间中的微分流形，主要基于微分同胚的局部存在性定理（逆映照定理）；可通过构造局部微分同胚存在性定理获得：秩定理，Morse 定理，都将服务于流形上微积分知识体系的建立。

距离空间中微分流形的一般思想(定义)就是局部 Euclid 化,通过同胚(双射且连续)的形式将 Euclid 空间中的方块(参数域)对应于流形的某一部分;不同参数域交叠的部分之间需要满足微分同胚(坐标转换关系)。作为微分流形的事例,引入切向量丛、余切向量丛与张量丛。

**第二部分 张量代数 讲授 4 学时/次，共 2 次**



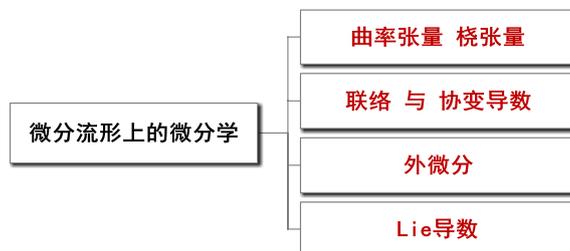
按线性空间上多重线性函数的观点定义张量，协变基与逆变基可以按线性泛函的观点分别对应至切向量与余切向量。通过引入简单张量，获得张量的一般表达形式。

张量的基本代数运算涉及的张量并、e-点积可以直接基于构成简单张量的基向量之间的运算定义。引

入置换运算并归纳其基本性质，以此引入张量的对称化与反称化算子。基于张量的反称化算子，定义张量的外积运算，并获得反对称张量（外形式）的表达形式。

基于外积运算可以系统获得仿射量（二阶张量）的代数性质，主要包括行列式、主不变量的表达；极分解与谱分解等。这部分内容可以作为选学内容。

### 第三部分 流形上的微分学 讲授 4 学时/次，共 3 次



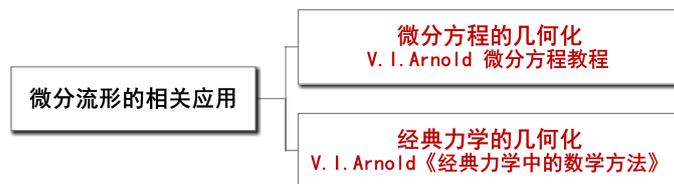
按照一般微分流形教程的做法，按算子观点定义相关几何量与微分运算，主要包含：曲率张量与挠张量；联络与协变导数；外微分运算；Lie 导数；各微分运算之间的关系。我们将进一步阐述相关概念与结论的物理意义，主要结合力学中的场论，如 Lie 导数与物质导数分解之间的关系。

### 第四部分 流形上的积分学 讲授 4 学时/次，共 2 次



按照推广高维微积分中体积与曲面上积分的观点，获得  $m$  维 Euclid 空间中体积上的积分； $m$  维 Euclid 空间中曲面上的第一类、第二类积分； $m$  维 Euclid 空间中  $r$  维曲面上的积分的定义形式。获得流形上 Stokes 公式。

### 第五部分 微分流形的相关应用 讲授 4 学时/次，共 2 次



微分流形的应用表现为几何化的观点。我们将参照 V.I.Arnold 的《常微分方程》《偏微分方程讲义》，阐述微分流形在常微分与偏微分方程中的应用；参照 V.I.Arnold 的《经典力学中的数学方法》，阐述微分流形在经典力学、理论物理中的相关应用。

注：上述为基本安排，可能按具体情况略作调整。

2018 年暑期开设课程《流形上的微积分》基本安排（实际讲授约 40 学时）：

上课地点：希望光华西辅楼教室

暑期周假	课程安排				
第一周	7月23日(周一) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月24日(周二) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月25日(周三) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月26日(周四) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月27日(周五) 上午2-5节 (第5节研讨)
第二周	7月30日(周一) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月31日(周二) 上午2-5节 (第5节研讨)	8月01日(周三) 上午2-5节 (第5节研讨)	8月02日(周四) 上午2-5节 (第5节研讨)	8月03日(周五) 上午2-5节 (第5节研讨)
第二周	8月04日(周六) 考试	8月05日(周日)			

注：我们建设有课程网站“微积分的一流化进程” <http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.psp>

相关信息，可供参考。

作业和考试方式：

平时成绩，占 30%，主要为课程所涉及的知识体系的自我整理，包括典型习题解答等。

课程考试，占 70%，书面笔试，主要考察对相关思想及方法的掌握程度。今后亦可考虑增加口试，但仍保留笔试。

(可复印)

E-Mail 地址：[zkzx@fudan.edu.cn](mailto:zkzx@fudan.edu.cn)

表格也可在教务处网页资料下载处下载。