

复旦大学暑期教学课程介绍

课程代码	MECH130087	学分数	2	周学时	9-12	总学时	36
课程名称	经典力学数学名著选讲（有关微积分的深化）						
英文名称	Selected Lectures on the Monographs on the Mechanics & Mathematics (on Advanced Calculus)						
任课教师	谢锡麟	职称	副教授	所在院系	航空航天系(原力学与工程科学系)		
预修课程	微积分基础（相当于一年制的《数学分析》或《高等数学》）						
<p>课程性质：</p> <p style="text-align: center;">请根据教学培养方案上的课程性质在以下 4 个栏目中选择。</p> <p style="text-align: center;"> 通识教育课程 <input type="checkbox"/> 文理基础课程 <input type="checkbox"/> 专业必修课程 <input type="checkbox"/> 专业选修课程 <input checked="" type="checkbox"/> </p> <p style="color: blue;">注：对理论与应用力学、飞行器设计与工程专业学生可作为专业选修课，其他专业同学应可作为任意选修课。</p>							
<p>修读对象：</p> <p>所有对微积分进一步理论及应用有兴趣的同学；本课程也将为有志于进一步研习现代几何学、测度论及泛函分析等现代数学，铺垫坚实的基础。按任课教师认识，本课程涉及的内容十分有益于自然科学、技术科学以及经管类诸多专业的深入学习与研究。</p>							
<p>课程简介：</p> <p>本课程一方面致力于将高维 Euclid 空间中的微分学（高维微分学）推广至一般赋范线性空间上的微分学，包括变分计算。值得指出，高维微分学与一般赋范线性空间上的微分学就知识点及其知识要素的构成具有高度相似性，故相关学习可以体现温故而知新的成效。另一方面，将补充高维微分学与高维积分学的相关分析内容，包括微分学中的秩定理、Morse 定理及其在引入微分流形时的作用；积分学中的 Lebesgue 定理、积分换元公式等。</p> <p>参照 V.I.Zorich 等著在全球范围享有盛誉的数学分析教程，我们需要基于 Euclid 空间上的微积分（我国现行一年级微积分教学的广度与深度）主要做二方面拓展：（一）赋范线性空间上的微分学；（二）流形上的微积分。本课程致力于第一部分的延拓，可以独立于第二部分进行。</p>							

教学目标：（请填写课程的基本内容及预期达到的教学效果）

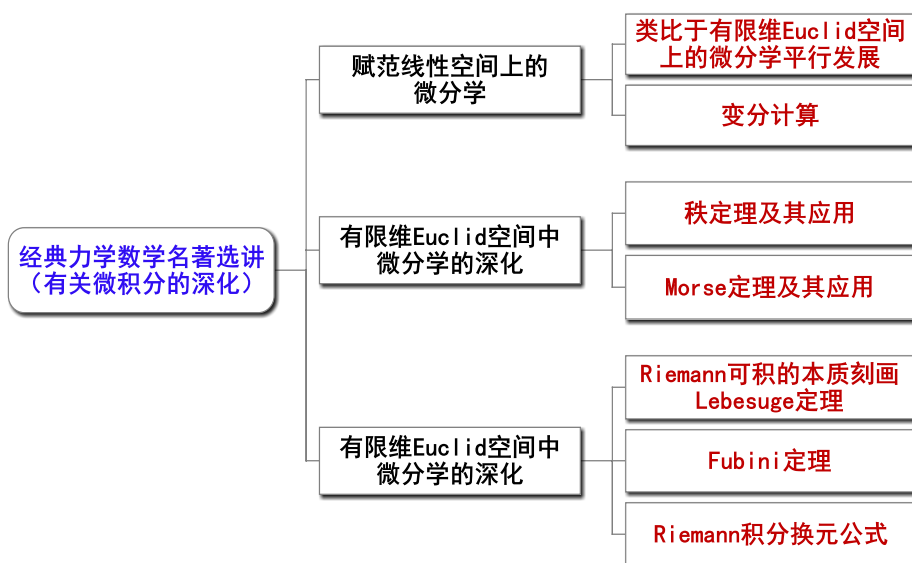
研习当今具有国际一流水平的微积分教程的广度与深度，以俄罗斯 Zorich（卓里奇）著《数学分析》等为代表微积分教程，可归纳以下特点：① 在讲述一元微分学基础上（第一学期），多元微分学则直接建立在有限维 Euclid 空间之间向量值映照之上。Zorich 的书还进一步讲述一般赋范线性空间之间映照的微分学，亦即一般赋范线性空间上的微分学。② 在讲述一元函数 Riemann 积分的基础上（第一学期），多元积分学则沿用有限维 Euclid 空间上 Lebesgue 积分建立的思想和方法，甚至直接进行。③ 基于有限维 Euclid 空间之间微分同胚的知识，发展微分流形上的微积分。

上述一流化做法的必要性及可行性，可归纳如下：

必要性 ① 建立于有限维 Euclid 空间之间映照的微积分以及一般赋范线性空间之间映照的微分学将真正全面地展现微积分在认识自然及非自然世界中的作为；相关的系统思想及方法不仅为力学、物理学等广大基础科学和技术科学而且也经济管理等学科提供深厚的知识基础。② 讲述一般赋范线性空间之间映照的微分学，有限维 Euclid 空间上 Lebesgue 积分建立的基本思想和方法，为进一步研习测度论以及泛函分析做了十分有益的铺垫；有限维 Euclid 空间中微分流形的初步理论为今后研习现代数学、力学、物理以及数理经济等较为高深的学问（相关系统思想及方法的集合）提供必要的基础。需指出，由于我们所研究事务的复杂度的提高，测度论以及泛函分析、微分流形等基本思想和方法是我们研究和认识复杂事务所必然需要的。

可行性 ① 一元微分学（面对一般实函数）建立的思想和方法，可很大程度地直接应用于有限维 Euclid 空间之间映照；而有限维 Euclid 空间之间映照的微分学建立几乎可以“一模一样”的应用于一般赋范线性空间之间映照的微分学的建立。由此，我们可以将新知识的学习过程作为“温故而知新”的过程。② 有限维 Euclid 空间中微分流形的初步理论实质性地基于微分同胚的相应结论，由此我们又可以实践“温故而知新”的过程。

值得指出，国内现行有复旦大学陈纪修、於崇华、金路编著《数学分析》、北京大学张筑生编著《数学分析新讲》等微积分方面的优秀教材，且影响广泛。值得指出，现行国内数学类专业的微积分教学一般为三学期，非数学类一般为二学期，由此教学的广度一般限于有限维 Euclid 空间上的微积分，经广泛实践这样的设置是相当合理的。



本课程致力于为非数学类的学生，提供由高维 Euclid 空间上的微分学延拓至一般赋范线性空间上的微分学，并补充高维 Euclid 空间上的微分学与积分学的相关分析，如上图所示。

教学方式:

我们建设的课程体系网站“微积分的一流化进程”

<http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.psp>

主要服务于《数学分析》《经典力学数学名著选讲》《流形上的微积分》《应用实变函数与泛函分析基础》等相关课程。网站主要栏目有任课老师、课程介绍、教学视频、课程教案、试卷习题、教学研究、科学研究、课程评估、友情链接、联系我们等。

课程体系网站上发布有本课程主要内容的教学视频，内容按知识点与知识要素进行剪辑。

《经典力学数学名著选讲》主要内容 (分为三部分)	教学视频
一般赋范线性空间上的微分学 (含变分计算)	距离与范数、空间完备性、压缩映照定理；映照极限；映照可微性；有限增量估计及其驱动结果；高阶导数与张量赋范线性空间；高阶微分与高阶方向导数；隐映照定理；全局与局部微分同胚；无限小增量公式；变分法
有限维 Euclid 空间中微分同胚的 深化理论	秩定理；Morse 定理
有限维 Euclid 空间中 Riemann 积分 的深化理论	Darboux 和分析；Lebesgue 定理；积分换元公式（零测集修正理论、微分同胚下理论）

另，课程体系网站上也发布有上述主要内容的“课程讲稿”。

教材和教学参考资料:

主要教材

1. 谢锡麟 编著《微积分讲稿——高维微积分》，复旦大学出版社，2017出版.
2. V.I.Zorich 著《Mathematical Analysis》（二卷）（第4版），俄罗斯数学教材选译。

主要参考

1. J.J.Duistermaat, J.A.C.Kolk 著《Multidimensional Real Analysis》（二卷），Cambridge Studies in Advanced Mathematics 86.
2. H.Amann & J.Escher 著《Analysis》（三卷）
3. 庞特里亚金著《常微分方程》（第6版），俄罗斯数学教材选译
4. 谢锡麟 编著《微积分讲稿——一元微积分》，复旦大学出版社，2015. 相关内容。
5. 谢锡麟 著《现代张量分析及其在连续介质力学中的应用》，复旦大学出版社，2014. 相关内容。

注：向修读以及旁听同学无偿提供上述书籍的借阅。可提供一定数量的无偿借阅。

教学内容安排：

《经典力学数学名著选讲》（有关微积分的深化），至今已有十轮次的教学研究与实践，现确定的主要内容分三个部分，概述如下。

第一部分 一般赋范线性空间上的微分学 讲授 4 学时/次，共 5 次

将有限维 Euclid 空间之间向量值映照的微分学推广到一般赋范线性空间之间映照的微分学，主要包括：

1. 赋范线性空间之间映照的极限，涉及 Cauchy 叙述，Heine 叙述，当值域空间完备时，又有 Cauchy 收敛原理；作为局部行为的连续性，完全在一般极限理论框架下作为个案处理；复合映照极限定理，强调非接触性条件。
2. 基于极限观点，研究导数，现导数为定义域空间同值域空间之间的有界线性算子，此处赋范有界算子空间及其基本性质作为一般赋范线性空间的事例加以研究；引入“抽象张量”理解高阶导数，深入理解高阶导数通过高阶方向导数的计算理论；有限增量估计，需要基于线段上的闭区间套定理，处理思想及方法不同于有限维 Euclid 空间中的处理；混合方向导数交换次序的 Schwartz 定理；可微性的一个充分性条件。复合映照导数或微分的计算，包括抽象形式的链式求导法则等。
3. 无限小增量公式及其在极值点相关方面的应用。
4. 基于完备赋范线性空间中有界闭集上的压缩映照定理，直接证明一般赋范线性空间上的隐映照定理及逆映照定理；隐映照定理及逆映照定理间的相互导出。此部分处理的基本思想及方法，甚至细节都一致与有限维 Euclid 空间中的处理。回顾 m 维 Euclid 空间中 k 维曲面的相关认识，积极寻求现有理论在相关领域的应用。进一步的学习与研究反映，隐映照定理及逆映照定理对后续知识体系的发展具有根本性的作用，所以对相关基本理论的掌握显得十分重要，个人认为只有掌握细节才能得以深入理解理论并加以灵活应用。
5. 完备度量空间中的压缩映照定理；相关理论在动力系统研究中的应用。
6. 泛函临界点的计算理论/变分计算，包括按可微性定义以及方向导数二种处理方法；获得 Lagrange 函数之积分（泛函）的临界点所满足的 Euler-Lagrange 方程，包括含高阶导数情形以及高维情况；具体应用事例。

有限维 Euclid 空间上的微积分以向量值映照为基本研究对象，亦即所研究对应关系其自变量与因变量都含有若个数。然而，我们在生产实践中往往需要研究自变量为函数的对应关系——藉此，我们需要理解与掌握自变量与因变量都可以是一般赋范线性空间中元素的对应关系的微分学，亦即一般赋范线性空间上的微分学。

我们研究发现，有限维 Euclid 空间中的微分学与一般赋范线性空间上的微分学具有高度的知识点甚至知识要素构成上的“相似性”，主要包括：①映照的极限；②映照的可微性；③映照的高阶导数；④无限小增量公式；⑤有限增量公式；⑥隐映照定理；⑦逆映照定理。——我们基于“相似性”设计了“有限维 Euclid 空间上的微分学”与“一般赋范线性空间上的微分学”的讲授方式，使得很多概念、结论与分析方式都具有高度的相似性。就此，我们建立一般赋范线性空间上微分学的过程相对于建立有限维 Euclid 空间上微分学的过程具有“温故而知新”的效果。

第二部分 有限维 Euclid 空间中微分同胚的深化理论 讲授 4 学时/次，共 2 次

相关知识体系归纳为“有限维 Euclid 空间上微分同胚的局部存在性及其应用”，具体包括：

1. 微分同胚的局部存在性定理（逆映照定理）
2. 通过构造局部微分同胚证明：秩定理，Morse 定理，微分同胚的局部初等分解等。
3. 相关理论的应用，包括：函数族的相关性，动力系统的首次积分等。

这部分主要包括有限维 Euclid 空间上微分学的二个重要结果（国内现行微积分教材鲜有涉及）：①秩定理；②Morse 定理。

这二个定理的分析过程都基于有限维 Euclid 空间中的微分同胚，并基于微分同胚（可理解为引入新的坐标/曲线坐标）深刻揭示了向量值映照与多元函数的深层机制，且相关结果紧密联系于线性代数。我们在讲述有限维 Euclid 空间上微分学时已引入微分同胚（曲线坐标）的概念及其局部及全部存在性定理。上述二个定理在 Riemann 积分的换元公式分析、Euclid 空间中微分流形的理解、常微分方程中相轨迹局部直线化与均匀化、偏微分方程中弯曲边界的展平/拉直，以及后续现代几何学中都起着基础性地作用，故本课程选择讲述上述二个定理具有“承上启下”与“温故而知新的作用”。另一方面，由于这二个定理的分析过程“精细”且“冗长”，我们充分采用定理内容与分析过程的“图示化展示”，课堂讲授中将分析过程对于的结果图示化，使得学生听讲时能试试感受分析背后的几何意义，具有理想的教与学的效果。

第三部分 有限维 Euclid 空间中 Riemann 积分的深化理论 讲授 4 学时/次，共 3 次

1. 闭方块上 Riemann 积分的 Darboux 大小和分析理论，主要基于 Darboux 和的“和谐式估计”以及确界相关分析理论。此部分内容完全是一维闭区间上相关理论的“温故而知新”。
2. 闭方块上 Riemann 积分存在的充分必要性条件，亦即 Lebesgue 定理。主要基于 Riemann 部分和极限之 Cauchy 收敛原理叙述及其相关估计。
3. 基于闭方块上 Riemann 积分的 Lebesgue 定理，结合集合特征函数，定义允许集上 Riemann 积分，以及相关积分性质。
4. 重积分及累次积分间的关系，亦即 Fubini 定理。
5. 基于微分同胚下 Lebesgue 零测集的性质，系统证明积分换元公式等。

本部分将严格揭示 Riemann 积分的本质特征——零测集上的差异不影响可积性与积分值。分析上依然限制于 Riemann 积分而无需测度论的系统方法与结果。

本部分主要阐述：①Riemann 可积性的实质性判定定理，亦即 Lebesgue 定理。②实际计算 Riemann 积分的二个基本依据：Fubini 定理与积分换元公式。——这些分析均显得“精致”且“冗长”，就此我们采用“复杂过程的要义分解”与“分析过程的图示化”方法进行阐述，经实践亦有较为理想的教与学的成效。

2018 年暑期课程《经典力学数学名著选讲（有关微积分的深化）》基本安排（实际讲授约 40 学时）：

上课地点：希望光华西辅楼教室

暑期周假	课程安排				
第一周	7月09日(周一) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月10日(周二) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月11日(周三) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月12日(周四) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月13日(周五) 上午2-5节 (第5节研讨)
第二周	7月16日(周一) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月17日(周二) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月18日(周三) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月19日(周四) 上午2-5节 (第5节研讨)	7月20日(周五) 上午2-5节 (第5节研讨)
					7月22日(周日) 考试

注：我们建设有课程网站“微积分的一流化进程” <http://fdjpkc.fudan.edu.cn/d201353/main.psp>。网站上已发布 2015、2016 年本暑期课程的全程录像，以及其它相关信息，可供参考。

作业和考试方式：

平时成绩，占 30%，主要为课程所涉及的知识体系的自我整理，包括典型习题解答等。

课程考试，占 70%，书面笔试，主要考察对相关思想及方法的掌握程度。今后亦可考虑增加口试，但仍保留笔试。

(可复印)

E-Mail 地址：zkzx@fudan.edu.cn

表格也可在教务处网页资料下载处下载。