习题 8.1.

(1) 令 Σ_1 和 Σ_2 为两个闭语句集，使得没有模型能够同时满足 Σ_1 和 Σ_2。证明存在一个闭语句 τ 使得 Mod $\Sigma_1 \subseteq$ Mod τ 并且 Mod $\Sigma_2 \subseteq$ Mod $\neg\tau$。[这说明：不相交的广义初等类可以被一个初等类分开。]

(2) 证明 $\vdash_{\mathsf{PA}} x < y \leftrightarrow \mathsf{S}x \leq y$，并且 $\vdash_{\mathsf{PA}} x \leq y \vee y \leq x$。[这里关于 PA 的练习，请不要利用任何其它的知识。]

(3) （假定读者了解一些集合论）令 $\mathfrak{A}$ 为 ZFC 的一个模型。证明存在 ZFC 的一个模型 $\mathfrak{B}$ 使得 $|\mathfrak{A}|$ 是 $|\mathfrak{B}|$ 的一个子集，并且存在一个 U 属于 $|\mathfrak{B}|$ 使得对所有的 $|\mathfrak{A}|$ 中的元素 a，都有 $a \in^{\mathfrak{B}} U$。

习题 8.2.

(1) 证明引理 **??**。

(2) 证明康托尔定理：任何可数的无端点的稠密线序都同构于 $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{Q}})$，换言之，Th $(\mathbb{Q}, <)$ 是 $\aleph_0$-范畴的。

(3) 证明有端点的稠密线序理论 Th $(\mathbb{Q} \cap [0,1), <)$、Th $(\mathbb{Q} \cap (0,1], <)$ 和 Th $(\mathbb{Q} \cap [0,1], <)$ 都分别是 $\aleph_0$-范畴的，因而也是完全的。此外，再验证它们和 Th $(\mathbb{Q}, <)$ 是稠密线序理论仅有的四个完全扩张。

(4) 证明：特征为 0 的域的理论是可公理化的，但不可有穷公理化。

(5) 假定两个理论 T_1 和 T_2 满足 (i) $T_1 \subseteq T_2$，(ii) T_1 是完备的，还有 (iii) T_2 是可满足的。证明 $T_1 = T_2$。

习题 8.3.

(1) 证明塔尔斯基引理（引理 **??**）。

(2) 证明：理论 T_{S} 被下列公理公理化：(S1) 和 (S2) 加上对语言 $\mathcal{L}_S = \{0, \mathsf{S}\}$ 的归纳公理模式:

$$[\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathsf{S}x))] \to \forall x \varphi(x),$$

其中 φ 是任意的语言 $\mathcal{L}_S$ 上的公式。

(3) 证明 T_{S} 不能被有穷公理化。

(4) 证明：自然数 $\mathbb{N}$ 的一个子集在结构 $\mathfrak{N}_S$ 中可定义当且仅当或者它是有穷的或者它在 $\mathbb{N}$ 中的补集是有穷的。

(5) 证明序关系 $\{\langle m,n\rangle : m <_{\mathbb{N}} n\}$ 在结构 $\mathfrak{N}_S$ 中是不可定义的。

(6) 直接证明定理 **??** 对理论 T_{S} 成立。中间步骤如下：

(a) 对于任何自然数 $m > n$，证明 $T_{\mathsf{S}} \vdash \mathsf{S}^m x \approx \mathsf{S}^n x \leftrightarrow \mathsf{S}^{(m-n)} x \approx \mathsf{0}$。再用等式的性质证明断言 1 对 T_{S} 成立。

(b) 如果 α_i 是形如 $\mathsf{S}^{m_i} x \not\approx t_i$，其中 m_i 为自然数，t_i 为不含变元 x 的项，则

$$T_{\mathsf{S}} \vdash \exists x(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n)。$$

即断言 2 对 T_{S} 成立。

(c) $T_{\mathsf{S}} \vdash \exists x(\mathsf{S}^m x \approx t) \leftrightarrow (t \not\approx \mathsf{0} \wedge \cdots \wedge t \not\approx \mathsf{S}^{m-1}\mathsf{0})$。再证明断言 3 对 T_{S} 成立。

习题 8.4.

(1) 证明：对任意基数 λ，Th $\mathfrak{N}_<$ 都不是 λ-范畴的。[所以，我们无法使用乌什 -沃特判别法。]

(2) 证明定理 **??** 中的断言 4。

(3) 给出一个具体的反例，说明子情形 2.3 中 ψ 的后半句 $\bigwedge_j \mathsf{S}^{n_j}\mathsf{0} < u_j$ 是不能少的。提示：适当选择项 u 使得满足前半句的 x 是负数。

(4) 证明：加法函数的图像 $\{(m,n,p) : m+n=p\}$ 在结构 $\mathfrak{N}_<$ 中是不可定义的。

(5) 证明下列的闭语句属于公理集 $A_<$ 的定理集 $T_<$。

(a) $\forall x(x < \mathsf{S}x)$。

(b) $\forall x(x \not< x)$。

(c) $\forall x \forall y(x \not< y \leftrightarrow y \leq x)$。

(d) $\forall x \forall y(x < y \leftrightarrow \mathsf{S}x < \mathsf{S}y)$。

(e) (S1)：$\mathsf{0} \not\approx \mathsf{S}x$。

(f) (S2)：$\mathsf{S}x \approx \mathsf{S}y \to x \approx y$。

(g) 对任意 $n \geq 1$，(S4.n)：$\bigwedge_{i<n} \mathsf{S}x_i \approx x_{i+1} \to x_0 \not\approx x_n$。

其中 (S1)、(S2) 和 (S4.n) 为上一节 T_{S} 的公理。特别地，$T_{\mathsf{S}} \subset T_<$。

(6) 证明：$T_<$ 接受量词消去。