习题 1.1.

(1) (a) 列出集合 $S=\{a,b,\{c,d\},47\}$ 的所有子集。

(b) 回答下列问题：$c\in S$？$\{c,d\}\in S$？$\emptyset\in S$？$S\in S$？

(c) 回答更多问题：$\{c,d\}\subset S$？$\{\{c,d\}\}\subset S$？$\{b,47\}\subset S$？$\{c,d,47\}\subset S$？$\emptyset\subseteq S$？$S\subseteq S$？

(2) 写出下列集合的元素：

(a) $\{1,2,3,\{4,5\},\{6,\{7,8\}\}\}$。

(b) $\{x\in\mathbb{N}: x^2=3$ 或 $x^2=4\}$。

(c) $\{x\in\mathbb{N}: x^2=3$ 并且 $x^2=4\}$。

(3) 找出三个性质 $P(x)$ 使得集合 $\{x\in\mathbb{R}: P(x)\}$ 为 $\{1\}$；找出三个性质 $Q(x)$ 使得集合 $\{x\in\mathbb{Z}: Q(x)\}=\emptyset$。

(4) 在有可能的情况下找出：

(a) 两个无穷集合 A 和 B 使得 $A\cap B=\{1\}$ 并且 $A\cup B=\mathbb{Z}$。

(b) 两个集合 C 和 D 使得 $C\cup D=\{t,h,i,c,k\}$ 并且 $C\cap D=\{t,h,i,n\}$。

注意：如果你认为不可能的话，请给出理由。

习题 1.2.

(1) 验证下列关于整除关系的命题，其中所有字母都代表整数。

(a) 如果 $a\mid b$，则对任何 c 都有 $a\mid bc$；

(b) 如果 $a\mid b$ 并且 $b\mid c$，则 $a\mid c$；

(c) 如果 $a\mid b$ 并且 $a\mid c$，则对任何 s 和 t 都有 $a\mid(sb+tc)$；

(d) 如果 $a\mid b$ 并且 $b\mid a$，则 $a=\pm b$；

(e) 如果 $a\mid b$ 并且 $a,b>0$，则 $a\leq b$；

(f) 如果 $m\neq 0$ 则 ($a\mid b$ 当且仅当 $ma\mid mb$)。

(2) 假定 $a,b,c,n\in\mathbb{Z}$ 且 $n>0$。证明同余关系的下列性质：

(a) （自反性）$a \equiv a \pmod{n}$。

(b) （对称性）如果 $a \equiv b \pmod{n}$，则 $b \equiv a \pmod{n}$。

(c) （传递性）如果 $a \equiv b \pmod{n}$ 且 $b \equiv c \pmod{n}$，则 $a \equiv c \pmod{n}$。

(3) 判断下列命题是否对所有集合 A, B, C 和 D 成立，并给出理由。

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$。

(b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$。

(c) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$。

习题 1.3.

(1) 对下列集合 A 和 B 找出所有从 A 到 B 的函数。

(a) $A = \{x\}$ and $B = \{0, 1\}$。

(b) $A = \{x, y\}$ and $B = \{2\}$。

(c) $A = \{x, y\}$ and $B = \{0, 1\}$。

(d) $A = \{x, y\}$ and $B = \{0, 1, 2\}$。

如果集合 A 和 B 分别含有 n 和 m 个元素，有多少个从 A 到 B 的函数?

(2) 令 f 和 g 为从 $\{1, 2, 3\}$ 到 $\{2, 3, 4\}$ 的函数分别定义为 $f(x) = -x + 5$ 和 $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 11$。证明 $f = g$。

(3) 令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和 $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 为

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x - 1, \\ g(n) &= 4n - 1。 \end{aligned}$$

证明 f 为双射；g 为单射但不是满射。

(4) 考察函数 $f : X \to Y$。判断下列命题的对错。

(a) f 是满射当且仅当任何一个 Y 里的元素都是某个 X 里元素的像。

(b) f 是满射当且仅当任何一个 X 里的元素都有某个 Y 里元素为它的像。

(c) f 满射当且仅当对任何 $y \in Y$ 都存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$。

(d) f 满射当且仅当对任何 $x \in X$ 都存在 $y \in Y$ 使得 $f(x) = y$。

(e) f 满射当且仅当存在 $y \in Y$ 使得对任意 $x \in X$ 都有 $f(x) = y$。

(f) f 满射当且仅当 f 的值域等于 Y。

(5) 令 f 和 g 为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。判断下列命题的对错并给出理由。

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$。

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) = 0\}$。

(c) 如果 f 和 g 都是双射，则 $f + g$ 也是双射。(这里函数 $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的定义是 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$。)

(6) (a) 证明对任何函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如果 $f \circ g$ 是单射，则 g 是单射。

(b) 找出函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 使得 $f \circ g$ 是单射，但 f 不是单射。

(7) 给定一个函数 $f : X \to Y$，定义两个新的幂集间的函数如下:

$$F : P(X) \to P(Y) \quad 和 \quad G : P(Y) \to P(X)$$

$$F(A) = \{f(a) : a \in A\} \quad 和 \quad G(B) = \{a \in X : f(a) \in B\}$$

其中 $A \subseteq X$ 并且 $B \subseteq Y$。判断下列命题是否正确并给出证明或反例。

(a) 如果 f 是单射，则 F 也是单射。

(b) 如果 f 是满射，则 G 是满射。

(8) 令 $a, d \in \mathbb{Z}$，$q \in \mathbb{R}$ 并且 $n \in \mathbb{N}$。

(a) 找出等差数列 $a, a + d, a + 2d, \cdots, a + nd$ 的求和公式 $B(n)$ 并用归纳法验证。

(b) 找出等比数列 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^n$ 的求和公式 $C(n)$ 并用归纳法验证。

下面的练习都是集合论中基数练习的翻版。建议大家把它们“翻译”成基数的语言，读出它们告诉我们的有关集合大小的信息。

(9) 找出 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 之间的一个一一对应。

(10) 假定 a,b,c,d 为实数并且 $a<b$ 和 $c<d$。令 $f:(a,b)\to(c,d)$ 定义为

$$f(x)=\frac{d-c}{b-a}(x-a)+c。$$

证明 f 是一个双射。(这里 (a,b) 表示集合 $\{x\in\mathbb{R}:a<x<b\}$，常被称为一个开区间。)

(11) 找出开区间 $(0,1)$ 和 $\mathbb{R}$ 之间的一个一一对应。

(12) 考察函数 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 定义为

$$f(m,n)=n+\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}。$$

(a) 令 m_1,n_1,m_2,n_2 为自然数。证明如果 $m_1+n_1<m_2+n_2$，则 $f(m_1,n_1)<f(m_2,n_2)$。

(b) 证明对任意 $y\in\mathbb{N}$，都存在唯一的 $x\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{x(x+1)}{2}\leq y<\frac{(x+1)(x+2)}{2}。$$

(c) 证明 f 是双射。

习题 1.4.

(1) 判断下列关系 R 是否为 (i) 自反的；(ii) 对称的；和 (iii) 传递的。

(a) R 为集合 $\{a,b,c\}$ 上的关系 $R=\{(a,b),(b,a),(a,a)\}$。

(b) R 为 $\mathbb{Z}$ 上的关系，定义为 aRb 当且仅当 $a>b$。

(c) 令 X 为一非空集，A 是 X 的非空子集的集合，R 是 A 上的关系定义为 URV 当且仅当 $U\cap V\neq\emptyset$。

(d) R 是 $\mathbb{R}$ 上的关系，使得 aRb 当且仅当 $ab\geq 0$。

(e) R 是 $\mathbb{R}$ 上的关系，使得 aRb 当且仅当 $|a-b|\leq 2$。

(2) 令 $T=\{0,1,2,3,\ldots,12\}$。定义 T 上的一个关系 $\sim$ 如下：对任意 a，$b\in T$，$a\sim b$ 只要下列条件之一成立：

(a) a，b 都是偶数。

(b) a，b 都是大于 2 的素数。

(c) a，$b \in \{1,9\}$ 并且 $a=b$。

证明 $\sim$ 是一个 T 上的等价关系并找出所有的等价类。

(3) 令 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ 为非零整数集，并且 $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$。在 A 上定义如下关系 R:

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A \mid ad = bc\}。$$

证明 R 是一个等价关系。找出等价类 $[(0,1)]$ 和 $[(2,4)]$。

(4) 令 R 为 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的如下关系:

$$(a,b)R(c,d) \text{ 当且仅当 } (\exists k \in \mathbb{Z})[a+b = c+d+3k]。$$

证明 R 是一个等价关系并且找出 R 的所有等价类。

(5) 令 A 为一个非空集并且 R 是 A 上的一个二元关系。证明 R 是一个等价关系当且仅当下述两条件成立:

(a) 对所有 $x \in A$ xRx 成立。

(b) 对所有 $x, y, z \in A$，如果 xRy 并且 yRz，则 zRx。

(6) 令 k 为一个固定的正整数。定义 $\mathbb{Z}$ 上的关系 E 使得 xEy 当且仅当 $x \equiv y \pmod{k}$。我们已经知道 E 是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系。对任意整数 $i, j \in \mathbb{Z}$，找出一个从等价类 $[i]_E$ 到等价类 $[j]_E$ 的一个双射，并验证它的确是一个双射。

(7) 对任意集合 X，如果 $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(X)$，并且满足:

$$A \subset B \in \mathcal{I} \to A \in \mathcal{I} \quad \text{且} \quad A, B \in \mathcal{I} \to A \cup B \in \mathcal{I},$$

就称 $\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想。证明：如果 $\mathcal{I}$ 是理想，则其上的二元关系:

$$R = \{(A,B) \mid (A \triangle B) \in \mathcal{I}\}$$

是等价关系。

(8) 考察整数间的关系 E，定义为 xEy 当且仅当 $\mid x \mid = \mid y \mid$。验证 E 是一个等价关系并找出商集 $\mathbb{Z}/E$。

习题 1.5.

(1) 证明每一个有穷的偏序都可以延拓成一个线序。

习题 1.6.

(1) 验证：如果 p 是素数，则 $\{0, 1, \cdots, p-1\}$ 在模 p 的运算下满足域的所有公理。

(2) 证明每个非零的自然数都是某个自然数的后继。

(3) 证明抽屉原则 （或称鸽舍原理 [1]）：如果自然数 $n > m$，则不存在从 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ 到 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ 的单射。

(4) 证明下列命题等价：

  (a) 皮亚诺公理中的归纳原理。

  (b) 最小数原理：自然数的任意非空子集都有最小元。

  (c) 强归纳原理：对任何一个自然数的性质 P，如果从所有 $m < n$，$P(m)$ 成立能推出 $P(n)$ 成立，则对所有自然数 n，$P(n)$ 都成立。

[1] 鸽舍原理，Pigeonhole Principle，叙述为：如果把 n 个鸽子放入少于 n 个鸽舍里，则至少有一个鸽舍里面有不止一只鸽子。