

数学物理方程的定解问题

数学物理方程：来自物理问题的多自变量函数满足的偏微分方程。是单自变量函数的常微分方程的推广。

这些自变量最常见的是：空间（三维坐标对应于三个变量 x, y, z ）时间 t 。从物理上看，数理方程大体分为三类：

1. 振动方程：如 波动方程、Helmholtz 方程
2. 输运方程：如扩散方程、热传导方程
3. 稳态方程：如 Laplace方程、Poisson方程

本章举例导出若干常见的数学物理方程，并对这些方程进行分类，讨论求解这些方程所需的条件。

9.1 波动方程

先以杆的纵振动为例，讨论支配波动现象的一些物理规律。

细杆的纵振动方程

杆纵振动的物理定律

细杆沿杆长方向做微小振动，假设在垂直于杆的任意截面上各点振动状态相同，就退化一维问题。先熟悉一些概念。

- 位移：由于振动，在不振动时位于 x 的点，因振动偏离原平衡位置 x ，位于： $x + u(x, t)$ ，其中 $u(x, t)$ 称为位移。

$u(x, t)$ ：不做振动时位于 x 位置的质点在 t 时刻的位移。

- 相对伸长：考虑细杆上的一小段，

在不振动时这一小段的两端分别位于平衡位置 x 和 $x + dx$ ，如上图红色所示，

因为振动，在 t 时刻两端分别位于 $x + u(x, t)$ 与 $x + dx + u(x + dx, t)$ ，如上图蓝色所示。

在 t 时刻这一小段的长度为： $dl = [x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)] = dx + u(x + dx, t) - u(x, t)$

不振动时这一小段的长度为： $dl_0 = [x + dx] - x = dx$ ，

振动导致的伸长为： $\Delta l = dl - dl_0 = u(x + dx, t) - u(x, t)$

振动导致的相对伸长为： $\frac{\Delta l}{dl_0} = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u_x(x, t)$

因为杆的纵振动，导致原处于 x 的一小段杆的相对伸长为： $u_x(x, t)$ —— 相对伸长

- ② 例：设一细杆放于 x 轴，两端分别于： $x = 0$ 和 $x = l$ 。

振动导致的杆在 $x = 0$ 端的相对伸长为： $u_x(0, t)$ ，在 $x = l$ 端的相对伸长为： $u_x(l, t)$

■ Hooke 定律

在弹性限度内，应力（单位面积的力）与应变（相对伸长）成正比，比例系数称为杨氏模量 Y

$$\frac{F}{S} = Y u_x(x, t), \quad \text{其中: } F \text{ 为作用力, 以拉力为正, } S \text{ 为截面面积,}$$

Y 为杨氏模量, Y 总大于 0, 这是由热力学稳定性条件所决定的。

此式意义类似于牛顿第二定律: 若已知某处的相对伸长为: $u_x(x, t)$, 则杆在该处必受到 $Y S u_x(x, t)$ 的拉力。

反之, 若已知细杆在某处受到的拉力为: F , 则在该处细杆必有: $\frac{F}{Y S}$ 的相对伸长 $u_x(x, t)$ 。

⑨ 例 1: 细杆置于 x 轴, $x = l$ 为自由端, 试写出在 $x = l$ 端位移 $u(x, t)|_{x=l}$ 应满足的条件。

解: $x = l$ 为自由端, 不受力, $F = 0$, 从而 $u_x(l, t) = \frac{F}{Y S} = 0$ 。

⑨ 例 2: 细杆置于 x 轴, $x = l$ 固定, $x = 0$ 端与一弹簧相连, 如图,

当不振动时弹簧处于平衡长度, 求振动时杆两端位移 $u(x, t)$ 所应满足的条件 (边界条件)。



因为 $x = l$ 端固定, 故在杆右端有: $u(l, t) = 0$ 。

在 $x = 0$ 端, 当杆位移 $u(0, t)$ 时, 弹簧被拉长 $u(0, t)$,

弹簧对杆的左端有拉力 $k u(0, t)$,

(注意这时向左才是拉力, 沿负 x 轴方向是拉力, 沿负 x 轴方向取为正。)

根据 Hooke 定律: 拉力 = $Y S \times$ 相对伸长 $\implies k u(0, t) = Y S u_x(0, t)$,

故在杆左端位移满足: $u_x(0, t) - \frac{k}{Y S} u(0, t) = 0$

⑨ 例 3: 细杆置于 x 轴, $x = 0$ 固定, $x = l$ 端与一弹簧相连, 如图,

当不振动时弹簧处于平衡长度, 求振动时杆两端位移 $u(x, t)$ 所应满足的条件。



因为 $x = 0$ 端固定, 故在杆左端有: $u(0, t) = 0$ 。

在 $x = l$ 端, 当杆位移 $u(l, t)$ 时, 弹簧被压缩 $u(l, t)$, 弹簧对杆的左端有压力 $k u(l, t)$,

也就是说, 弹簧对杆右端有拉力: $-k u(l, t)$

(注意这时向右才是拉力, 沿正 x 轴方向是拉力, 沿负正 x 轴方向取为正。)

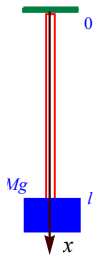
根据 Hooke 定律: 拉力 = $Y S \times$ 相对伸长 $\implies -k u(l, t) = Y S u_x(l, t)$,

故在杆右端有: $u_x(l, t) + \frac{k}{Y S} u(l, t) = 0$ (注意与上一题 $x = 0$ 端的条件差一个负号)

⑨ 例 4: 细杆垂直放置, $x = 0$ 端固定, $x = l$ 端与一质量为 M 的重物相连, 如图,

忽略细杆的重量, 求杆两端位移 $u(x, t)$ 各自所应满足的关系。

解:



杆上端 $x=0$ 处, 位移 $u(0, t) = 0$

杆下端 $x=l$ 处的位移为: $u(l, t)$,

杆与重物相连, 故重物的加速度 $a = u_{tt}(l, t)$

重物所受到的力: 重力 Mg , 杆对重物 **向上的拉力** T ,

故: $Mg - T = Ma = Mu_{tt}(l, t)$

杆对重物向上的拉力为: $T = Mg - Mu_{tt}(l, t)$,

反过来, 重物对杆下端的向下拉力也为 T

即, 杆的下端受到的 **拉力 (沿正 x 方向)** 为 $T = Mg - Mu_{tt}(l, t)$

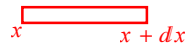
据Hooke定律, $T = YSu_x(l, t) \Rightarrow$

杆下端的位移满足: $Mg - Mu_{tt}(l, t) = YSu_x(l, t)$

杆的纵振动方程

均匀细杆的微小纵振动, 微小振动, 杆的截面积视为常数 S 。

考虑从 x 到 $x + dx$ 的一小段杆, 如图



这一小段杆的质量: $dm = \rho S dx$, **加速度**: $u_{tt}(x, t)$, 力 $F = ?$

在右端 $x + dx$, 杆的相对伸长为: $u_x(x + dx, t)$; 在左端 x , 杆的相对伸长为: $u_x(x, t)$

据 Hooke 定律, 这一小段杆的右端必受到 $YSu_x(x + dx, t)$ 的拉力, 注意右端拉力是向右, 沿 $+x$ 方向
左端必受到 $YSu_x(x, t)$ 的拉力, 左端拉力沿 $-x$ 方向。

这一小段所受的合力: $F = YSu_x(x + dx, t) - YSu_x(x, t) = (dm)u_{tt}(x, t) = \rho Su_{tt}(x, t)dx$

上式两边除以 dx 即得: $YS \frac{u_x(x + dx, t) - u_x(x, t)}{dx} = \rho Su_{tt}(x, t)$, 令 $a = \sqrt{Y/\rho}$

从而一均匀细杆的纵振动方程为: $Yu_{xx}(x, t) = \rho u_{tt}(x, t) \Rightarrow \boxed{u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0}$

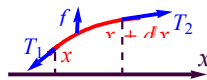
- 若这一小段杆的加速度取为: $u_{tt}(x + dx, t)$, 导出的纵振动方程相同吗?

弦的横振动方程

一条完全柔软的均匀细弦, 沿水平方向拉紧, 求其沿垂直方向的微小振动。

几个假设: $\begin{cases} (a) \text{ 绷紧的柔软细弦, 张力沿弦的切向} \\ (b) \text{ 振动微小, 弦与水平 } x \text{ 轴的夹角很小} \\ (c) \text{ 弦单位长度所受的外力垂直于 } x \text{ 方向} \\ (d) \text{ 弦很轻, 略去重力, 重力远小于拉力} \end{cases}$

考虑从 x 到 $x + dx$ 的一小段弦, 如图



显然不振动时整段弦在 x 轴, 振动时位移 $u(x, t)$ 给出 t 时刻弦所在的曲线

根据导数的几何意义: $u_x(x, t)$ 为弦在 x 处的切向与 x 轴的夹角的正切: $\text{tg } \alpha_1 = u_x(x, t)$

由于柔软弦绷紧, 仅受拉力, 故这一小段弦两端受力方向如上图所示

弦沿垂直方向振动, 因此有: $\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + f(x) dx = (dm) u_{tt}(x, t) \end{cases}$ 其中 f 为弦单位长度所受的外力。

由假设 (b), $\cos \alpha_2 \approx \cos \alpha_1 \approx 1$, $\sin \alpha_2 \approx \text{tg } \alpha_2 = u_x(x + dx, t)$, $\sin \alpha_1 \approx \text{tg } \alpha_1 = u_x(x, t)$

因而上两个方程退化为: $\begin{cases} T_2 = T_1 = T \\ T[u_x(x + dx, t) - u_x(x, t)] + f(x) dx = (\lambda dx) u_{tt}(x, t) \end{cases}$, λ 为弦的线密度

令 $a = \sqrt{Y/\lambda}$, 有: $u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = f(x)$, 若弦不受外力, 则: $\boxed{u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0}$

杆的纵振动和弦的横振动满足的偏微分方程相同。更一般地, 在三维空间中, 方程为以下形式

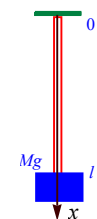
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0} \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

上式称为波动方程，其中 ∇^2 称为Laplace算符， $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是Laplace算符在直角坐标系下的形式。

例题

- 例 5: 弹性细杆垂直放置， $x=0$ 端固定， $x=l$ 端与一质量为 M 的重物相连，如图，已知杆振动时受到的空气阻力与其速度成正比，求杆的振动方程。

解:

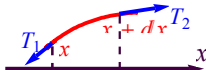


杆上端 $x=0$ ，杆下端 $x=l$ 。
 考虑从 x 到 $x+dx$ 的一小段，这一小段杆所受到的外力包括：
 重力： $S\lambda g dx$ ；空气阻力： $-\gamma u_t(x, t) dx$ ；
 下端的拉力： $YSu_x(x+dx, t)$ ；上端的拉力： $YSu_x(x, t)$ ；
 振动方程： $S\lambda g dx - \gamma u_t(x, t) dx + YS[u_x(x+dx, t) - u_x(x, t)] = \lambda u_{tt}(x, t) dx$
 整理得： $u_{tt}(x, t) + \beta u_t(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = g$

- 例 6: 细绳一端固定在以角速度 ω 转动的竖直轴上，因惯性离心力的作用，细绳的平衡位置是水平线。若某时刻细绳上的点有竖直方向的微小偏移，求细绳相对于水平方向的横振动方程。

解：设绳子固定端为 $x=0$ ，另一端为 $x=l$ ，并设细绳的线质量密度为 λ

考虑从 x 到 $x+dx$ 的一小段绳，如图



水平方向有： $T(x) \cos \alpha_1 - T(x+dx) \cos \alpha_2 = \frac{\lambda dx}{dm} \omega^2 x$ 向心力与向心加速度。

$$\frac{dT}{dx} = -\lambda \omega^2 x \implies T = -\frac{1}{2} \lambda \omega^2 x^2 + c,$$

$$\text{在 } x=l \text{ 端，自由端不受力 } T|_{x=l} = 0 \implies T = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 (l^2 - x^2)$$

竖直方向有： $T(x+dx) \sin \alpha_2 - T(x) \sin \alpha_1 = \frac{\lambda dx}{dm} u_{tt}(x, t)$ ，利用 $\sin \alpha_1 = \tan \alpha_1 = u_x(x, t)$ ， $\sin \alpha_2 = \tan \alpha_2 = u_x(x+dx, t)$

$$\text{得振动方程： } u_{tt}(x, t) = \frac{1}{\lambda dx} (T(x+dx) u_x(x+dx, t) - T(x) u_x(x, t)) = \frac{d[T(x) u_x(x, t)]}{\lambda dx} = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial [(l^2 - x^2) u_x(x, t)]}{\partial x}$$

$$\text{即： } u_{tt}(x, t) = \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial [(l^2 - x^2) u_x(x, t)]}{\partial x}$$

- 例 7: 一长为 l 的匀质柔软重绳，上端固定于一竖直轴上，绳子与轴以角速度 ω 旋转。求重绳在重力作用下相对于竖直轴的横振动方程。（略去Coriolis力： $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$ 。）

解：设绳子固定端（上端）为 $x=0$ ，下端为 $x=l$

在竖直方向： $T(x+dx) \cos \alpha_2 - T(x) \cos \alpha_1 = \frac{\lambda dx}{dm} g$

$$\frac{dT}{dx} = -\lambda g \implies T = \lambda g x + c, \text{ 在 } x=l \text{ 端，自由端不受力 } T|_{x=l} = 0 \implies T = \lambda g (l-x)$$

水平方向有： $T(x+dx) \sin \alpha_2 - T(x) \sin \alpha_1 + \frac{u(x, t) \lambda dx \omega^2}{\text{非惯性系中的离心力}} = \frac{\lambda dx}{dm} u_{tt}(x, t)$

$$\text{振动方程： } u_{tt}(x, t) = g \frac{\partial [(l-x) u_x(x, t)]}{\partial x} + u(x, t) \omega^2$$

- 为何在 $x=l$ 的自由端, $T=0$

考虑从 $l-dx$ 到 l 的一小段, 这一小段在 $x=l$ 端, 自由端没有受到任何力, 设在 $l-dx$ 端, 这一小段受力为 T 那么: $T=\lambda g dx$, $dx \rightarrow 0$, 故: $T=0$, 即在自由端: $T=0$ 。

9.2 输运方程

本节以热传导为例, 导出热传导方程, 其形式全同于粒子扩散的输运方程。

热传导的若干基本物理定律

1. 傅里叶定律

在各向同性介质中, 热流密度矢量 \vec{q} 与温度梯度成正比

$$\vec{q} = -k \nabla u, \quad \text{其中: } u(x, y, z, t) \text{ 为温度, } k > 0 \text{ 称为热导率或热传导系数}$$

注意方程中的负号, 表明热量总是从高温区流向低温区 (热力学第二定律), 故 $k > 0$ 。

热流密度矢量 \vec{q} 的物理意义: (类似于电流密度矢量: \vec{j})

$\vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$: 单位时间穿过法向沿 \vec{n} 的小面积元 $d\sigma$ 的热量。



$\int_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$: 单位时间穿过法向曲面 S 的热量。

$Q = \oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$: 若 \vec{n} 取闭合曲面的外法向, 则 Q 为单位时间流出闭合曲面 S 的热量,

类似地: $-\oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$ 为单位时间流入闭合曲面 S 的热量

- $\vec{q} = -k \nabla u$ 与牛顿第二定律 $\vec{f} = m \vec{a}$ 类似:

有什么样的热流密度矢量必在介质内建立对应的温度梯度,

有什么样的温度梯也表示介质内有对应的热流密度矢量。

- 物理上更严格一些, 这里所说的“流出(流入)的热量”指的是: 以热的方式转移(传递)的能量。

2. 牛顿冷却定律

单位时间从物体表面单位面积流到周围介质的热量与物体表面与外界的温差成正比。

$$\vec{Q} = K [u(x, y, z, t)|_{\Sigma} - u_0] \vec{n},$$

其中: $u(x, y, z, t)|_{\Sigma}$ 为物体表面温度, $K > 0$ 称为热交换系数, \vec{n} 为外法向。

显然, 当物体表面温度高于外界温度时, 热量是流出的, 故 $K > 0$ 。

- 牛顿冷却定律常用于确定边界条件

热传导方程

考虑一闭合曲面 S 围成的区域, 该区域 V 内有某些区域单位时间单位体积内可释放出 f 的热量 (如: 燃烧、热核反应)。

该区域的物质具有比热容 c (单位质量物质升高单位温度所需的热量), 物质质量密度为 ρ 。

对该区域, 有以下方程: $u(x, y, z, t)$ 表示温度, u_t 是温度的时间变化率 (单位时间的温度增加)

$$-\oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_V f d\tau = \int_V \frac{dm}{(\rho d\tau)} c u_t$$

上式左边的第一项为单位时间流入区域 V 内的热量, 第二项为单位时间区域 V 内产生的热量,

上式右边为单位时间区域 V 内的物质因温度升高所吸收的热量。

从区域表面流入的热量与区域内部产生的热量均用于区域内物质的升温。

利用高斯定理，可将面积分化为体积分，因而上式可化为

$$-\int_V \nabla \cdot \vec{q} \, d\tau + \int_V f \, d\tau = \int_V (\rho \, d\tau) c u_t$$

傅里叶定律： $\vec{q} = -k \nabla u \implies \nabla \cdot \vec{q} = -\nabla \cdot (k \nabla u)$ ，故有：

$$\int_V \nabla \cdot (k \nabla u) \, d\tau + \int_V f \, d\tau = \int_V (\rho \, d\tau) c u_t \quad \text{此式对任意体积均成立}$$

$$\rho c u_t = \nabla \cdot (k \nabla u) + f \quad \text{对均匀体系：} \quad \boxed{u_t - \frac{k}{\rho c} \nabla^2 u = \frac{f}{\rho c}}$$

若体系内无热源且热导率为常数（体系均匀区），则有： $\boxed{u_t - a^2 \nabla^2 u = 0}$ 热传导方程

更一般地，若介质各向异性，则傅里叶定律改写为： $\vec{q} = -\vec{\kappa} \cdot \nabla u$ ， $\vec{\kappa}$ 为 3×3 矩阵。热传导方程为

$$\boxed{\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\vec{\kappa} \cdot \nabla u) = f} \quad (1.2)$$

类似地，由物质浓度不均匀而产生的扩散，分子浓度 $u(x, y, z, t)$ 满足与热传导方程相似的方程。


$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla^2 u = f} \quad (1.3)$$

其中 D 为扩散系数， $f(x, y, z, t)$ 为单位时间在单位体积内分子的产生率。

例题

例 1：阳光照射到半径为 a 表面完全吸收的球，设阳光的热流密度矢量为 q ，

外界温度 $u_0 = 0$ ，写出球表面温度应满足的条件（边界条件）。

解：取如图所示坐标系，热流密度矢量： $\vec{q} = -q \vec{e}_z$ 

同时，球还与外界按牛顿冷却律交换热量，产生的热流为： $\vec{Q} = K(u - u_0) \vec{e}_r$

在球表面总的热流密度矢量： $\vec{q}_t = \begin{cases} \vec{q} + \vec{Q} = -q \vec{e}_z + K(u - u_0) \vec{e}_r & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ \vec{Q} = K(u - u_0) \vec{e}_r & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

球表面的热流密度矢量 \vec{q}_t 必在球表面建立 ∇u 的温度梯度，

这一点类似于牛顿第二定律，受到外力 \vec{f} 必然使物体有 \vec{a} 的加速度： $\vec{f} = m \vec{a}$

对应的傅里叶定律表明： $\vec{q}_t = -k \nabla u$ ，其中 k 为热导率

两边同点乘 \vec{e}_r ，并利用 $\vec{e}_r \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} = u_r$ 得：

$$\begin{cases} -q \cos \theta + K u(a, \theta, \phi) = -k u_r(a, \theta, \phi) & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ u = -k u_r(a, \theta, \phi) & \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

其中 $u(r, \theta, \phi)$ 为球内温度， $u(a, \theta, \phi)$ 为球表面温度， $u_0 = 0$

▲ 为何要点乘 \vec{e}_r ：因为要得到 $u(r, \theta, \phi)$ 在球面的法向导数。

例 2：半径 a 密度 ρ 比热 c 热传导系数为 k 的匀质圆杆，设同一横截面的温度相同，杆侧面与温度为 u_0 的外接热交换。

热交换系数为 K ，求杆温度 u 满足的方程。

解：同一截面的温度相同，退化为一维问题： $u(x, t)$ 。考虑 x 到 $x + dx$ 的一小段。

左端有温度梯度： $\nabla u = u_x(x, t) \mathbf{e}_x$ ，必对应于 $-k \nabla u$ 的热流密度矢量，故左端必有热量 $\pi a^2 (-k \nabla u) \cdot \mathbf{e}_x$ 流入

右端有温度梯度： $\nabla u = u_x(x + dx, t) \mathbf{e}_x$ ，因此右端必有热量 $\pi a^2 (-k \nabla u) \cdot (-\mathbf{e}_x)$ 流入，注意右端流入应点乘 $(-\mathbf{e}_x)$ 。

同时，侧面还与外界热交换：单位面积热流 $\vec{Q} = K(u - u_0) \mathbf{e}_r$ ，从侧面流出的热量为： $K(u - u_0) 2\pi a dx$

从而： $\pi a^2 (-k \nabla u) \cdot (-\mathbf{e}_x)|_{x+dx} + \pi a^2 (-k \nabla u) \cdot \mathbf{e}_x|_x - K(u - u_0) 2\pi a dx = (\rho \pi a^2 dx) c u_t(x, t)$

整理： $u_t = \frac{k}{\rho c} u_{xx} - \frac{2K}{a \rho c} (u - u_0)$ ，其中利用了： $(\nabla u) \cdot \mathbf{e}_x = u_x$ （方向导数）

例 3：试在球对称温度分布条件下导出匀质孤立球体的热传导方程。

解：本题当然可以借助三维热传导方程在球坐标系的形式导出。现直接推导。

同一球层的温度相同，温度可表为： $u(r, t)$ ，与极角 θ 和方位角 ϕ 无关。考虑 r 到 $r + dr$ 的一小薄球壳。

由内表面流入球壳的热量为： $\pi r^2 \vec{q} \cdot \mathbf{e}_r$ ， $\vec{q} = -k \nabla u$ ，流入的热量为： $-4\pi r^2 k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_r = -4\pi r^2 k u_r(r, t)$

外表面流入球壳的热量： $\pi (r + dr)^2 \vec{q} \cdot (-\mathbf{e}_r)$ ， $\vec{q} = -k \nabla u$ ，流入的热量为： $4\pi (r + dr)^2 k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r+dr} =$

$4\pi r^2 k u_r(r + dr, t)$

球壳单位时间温度升高吸收的热量： $4\pi r^2 dr \rho c u_t$

从而： $4\pi (r + dr)^2 k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r+dr} - 4\pi r^2 k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_r = 4\pi r^2 dr \rho c u_t$

简化： $u_t = \frac{k}{r^2 \rho c} \frac{\partial [r^2 u_r(r, t)]}{\partial r}$ ，令 $U(r, t) = r u(r, t)$ ，方程可化为： $U_t - a^2 U_{rr} = 0$ ， $a^2 = \frac{k}{\rho c}$

例 4：细杆两端与外界（温度为 u_0 ）有热交换，求细杆两端的温度所满足的条件。

解： $x = 0$ 端：由牛顿冷却定律： $\vec{Q} = K(u - u_0)(-\mathbf{e}_x)$ ，注意在 $x = 0$ 的外法线方向是 $(-\mathbf{e}_x)$

据傅里叶定律： $\vec{Q} = -k \nabla u \xrightarrow{\text{两边同点乘 } \mathbf{e}_x} k u_x(0, t) = K[u(0, t) - u_0]$ ，即： $u_x(0, t) - \frac{K}{k} u(0, t) = -\frac{K}{k} u_0$

$x = l$ 端： $\vec{Q} = K(u - u_0) \mathbf{e}_x$ ，类似可求得： $k u_x(l, t) = -K[u(l, t) - u_0]$ ，即： $u_x(l, t) + \frac{K}{k} u(l, t) = \frac{K}{k} u_0$

特别注意， $x = 0$ 与 $x = l$ 两端相差一个负号。

9.3 稳定问题

在一定条件下，温度达到稳定，则温度分布满足 Poisson 方程

$$u_t - \frac{k}{\rho c} \nabla^2 u = \frac{f}{\rho c} \implies \nabla^2 u = -\frac{f}{k}$$

若体系内无热源，则退化为 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

均匀介质中的静电势 $\varphi(x, y, z)$ ，也满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \text{其中 } \rho \text{ 为电荷密度, } \varepsilon \text{ 为介质的静电介电常数。}$$

若无电荷分布的空间，静电势也满足 Laplace 方程。

若波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

中, $u(x, y, z, t)$ 随时间周期变化 (称为时谐场), 则可用复数表示物理场: $u(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[v(x, y, z) e^{-i\omega t}]$

代入波动方程, 可得 $v(x, y, z)$ 满足的方程:

$$\nabla^2 v(x, y, z) + k^2 v(x, y, z) = 0 \quad \text{此方程称为 Helmholtz 方程。} \quad k = \omega/a \text{ 为波数。}$$

9.4 二阶线性常系数偏微分方程的分类

上几节导出了物理中常见的几种方程:

- 波动方程: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- 扩散方程: $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
- 稳定问题: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (为讨论简单起见, 以二维静电势为例。)

这三种方程似有相似, 又有不同。可以证明, 这三种方程代表了所有二阶线性偏微分方程的行为。

本节以这三种方程为例, 讨论偏微分方程的一些基本性质。

常数系数二元二阶偏微分方程的分类

考虑如下形式的偏微分方程

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \text{其中 } A, B, C \text{ 为常数。} \quad (1.4)$$

即使看起来如此简单的方程, 在一般情况下也不是很容易直接求解。

一种尝试: 若能做以下变量 (“坐标”) 变换

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$$

将偏微分方程化为如下形式:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (1.5)$$

那求解就相当容易, 因为该方程的解为:

$$\varphi = F(\xi) + G(\eta), \quad \text{其中: } F, G \text{ 可以为任意函数。}$$

能否做这种变化? 如何通过“坐标”变换?

尝试选取参数: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 使得方程 (1.4) 化为方程 (1.5) 形式。利用

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial}{\partial \eta}$$

等复合函数求导法则

即可将方程 (1.4) 化为


```

eq1 = AD[φ[x, t], {t, 2}] + BD[D[φ[x, t], x], t] + cD[φ[x, t], {x, 2}];
eq1 // TraditionalForm
sim1 = {ξ → α x + β t, η → γ x + δ t};
sim = {φ[x, t] → φ[ξ, η],
       φ(0,2)[x, t] → D[φ[ξ, η] /. sim1, {t, 2}],
       φ(1,1)[x, t] → D[D[φ[ξ, η] /. sim1, t], x],
       φ(2,0)[x, t] → D[φ[ξ, η] /. sim1, {x, 2}]}];
sol = Solve[{ξ == α x + β t, η == γ x + δ t}, {x, t}];
eq2 = eq1 /. sim /. sol[[1]];
Simplify[eq2] // TraditionalForm

```

$$A\varphi^{(0,2)}(x, t) + B\varphi^{(1,1)}(x, t) + c\varphi^{(2,0)}(x, t)$$

$$\phi^{(2,0)}(\xi, \eta)(A\beta^2 + \alpha\beta B + \alpha^2 c) + \phi^{(1,1)}(\xi, \eta)(2A\beta\delta + \alpha B\delta + \beta B\gamma + 2\alpha c\gamma) + \phi^{(0,2)}(\xi, \eta)(\delta(A\delta + B\gamma) + c\gamma^2)$$

$$(A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + [2A\beta\delta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2\alpha C\gamma] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + (A\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0$$

为了化为方程 (1.5) 形式: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, 必须

$$A\beta^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0, \quad A\delta^2 + B\gamma\delta + C\gamma^2 = 0 \quad \text{—— 四个参数, 两个方程?}$$

实际上, 我们没有必要求出四个参量: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 只需求出比值 $\eta_1 = \beta/\alpha$ 与 $\eta_2 = \delta/\gamma$, 这两个比值满足方程

$$\begin{cases} A\eta_1^2 + B\eta_1 + C = 0 \\ A\eta_2^2 + B\eta_2 + C = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{方程相同}} \begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{2A}[-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}] \\ \eta_2 = \frac{1}{2A}[-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}] \end{cases}$$

因为原方程 (1.4) 中的 u 是二变量函数, 经变换, $\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = x + \eta_1 t \\ \eta = x + \eta_2 t \end{cases}$,

也应该是两(独立)变量的函数, 因此, η_1 与 η_2 应取不同的值。

为此, 有三种情况:

1. $B^2 - 4AC > 0$, 这时有两个实根, 可取:

$$\begin{cases} \xi = 2Ax + \left[-B + \sqrt{B^2 - 4AC}\right]t \\ \eta = 2Ax + \left[-B - \sqrt{B^2 - 4AC}\right]t \end{cases}$$

得方程 (1.4): $A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$

化为方程 (1.5) 形式: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 。这时称 **双曲型** 方程。

因为此时再令 $u = \xi + \eta, v = \xi - \eta$, (1.5) 形式可在化为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0 \quad \text{形如双曲线, 这种形式也称为 } \text{双曲型} \text{ 方程的标准形式}$$

波动方程就如这种形式。——波动方程是双曲型微分方程。

2. $B^2 - 4AC = 0$, 仅有一个实根 $\eta_1 = \eta_2 = -B/(2A)$, 可取:

$$\xi = 2Ax - Bt, \quad \eta = t \quad (\text{相当于取 } \eta_2 = 0, \text{ 没有两根以 } 0 \text{ 替代})$$

$$\text{方程 (1.4): } A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

化为方程如下形式。这时称**抛物型**方程。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad \text{方程的解为: } \varphi = p(\xi) + \eta q(\xi) \text{ 形式}$$

扩散方程就如这种形式。——扩散方程是**抛物型**微分方程。

```
sim1 = {α → 2 A, β → -B, γ → 0, δ → 1};
eq2 /. sim1;
Simplify[%, B^2 - 4 A C == 0]
```

```
A φ(0,2) [ξ, η]
```

实际上，扩散方程： $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ 中出现一阶导数项，但讨论类似。

3. $B^2 - 4AC < 0$, 没有实根, 不可能通过“坐标”变换, 使方程变成 (1.5): $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ 形式, 可取:

$$\xi = \frac{2Ax - Bt}{\sqrt{4AC - B^2}}, \quad \eta = t$$

$$\text{方程 (1.4): } A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

化为方程如下形式。这时称**椭圆型**方程。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0$$

Laplace方程就如这种形式。——Laplace方程是**椭圆型**微分方程。

```
sim2 = {α →  $\frac{2A}{\sqrt{4AC - B^2}}$ , β →  $-(B / (\sqrt{4AC - B^2}))$ , γ → 0, δ → 1};
eq2 /. sim2;
Simplify[%]
```

```
A (φ(0,2) [ξ, η] + φ(2,0) [ξ, η])
```

对如下形式的更一般的二阶线性偏微分方程,

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + D \frac{\partial \varphi}{\partial t} + E \frac{\partial \varphi}{\partial x} + F \varphi = 0, \quad \text{其中 } A, B, C, E, F, G \text{ 为常数。}$$

仍然可以用 $B^2 - 4AC$ 来类似分类:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{双曲型: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{如波动方程}) & \text{if } B^2 - 4AC > 0 \\ \text{抛物型: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{如扩散方程}) & \text{if } B^2 - 4AC = 0 \\ \text{椭圆型: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\text{如稳态方程}) & \text{if } B^2 - 4AC < 0 \end{array} \right.$$

甚至对系数不是常数的方程, 仍可如此分类, 只不过在不同区域, 方程属于不同类型。

一般的多变量情况

对更多变量的偏微分方程，也可以先考虑以下简单形式（注意不再区分 t 与 x ）

$$\sum_{i,j}^N A_{ij} \partial_i \partial_j \varphi = 0, \quad \text{其中 } A_{ij} \text{ 为实对称矩阵, } \partial_j = \partial / \partial x_j$$

（思考：为何 A_{ij} 一定为实对称矩阵。）

判断方程类型的方法是：将矩阵 A_{ij} 对角化，方程化为如下形式：

$$\sum_i^N \Lambda_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta_i^2} = 0,$$

实对称矩阵的本征值必为实数，故 Λ_i 为实数， ζ_i 为 A 矩阵对应于 Λ_i 的本征矢量构成的新变量。

1. 若所有本征值 Λ_i 均不为 0 且同号，则称为椭圆型方程。

Laplace 方程是椭圆型方程，与空间维度无关。

2. 若所有本征值 Λ_i 均不为 0 但有正有负，须再分两种情况

a. 若只有一个本征值与其他本征值反号，则称为双曲型方程。

波动方程是双曲型方程，与空间维度无关。与时间变量相关的本征值与其它本征值反号。

b. 若有多个本征值与大多数本征值反号，则称为超双曲型方程。

3. 某些本征值为 0，则称为抛物型方程。

常见的情况是：仅有一个本征值为 0 且与该本征值相关的变量有一阶导数项。

扩散方程是抛物型方程，与空间维度无关。

以上判断对如下形式的更一般的二阶线性偏微分方程，仍然可用。

$$\sum_{i,j}^N A_{ij} \partial_i \partial_j \varphi + \sum_k^N B_k \partial_k \varphi + C \varphi + D = 0.$$

求解偏微分方程的辅助（附加）条件

为何要对二阶偏微分方程进行分类：

1. 因为所有二阶偏微分方程的行为均落入这三类；
2. 因为不同类型的偏微分方程，确定唯一解的辅助（附加）条件不同。

辅助（附加）条件包括：边界条件和初始条件，这是基于物理观点。

从物理上我们隐约感知到：

在空间的边界上给出函数或其导数的值，称为边界条件；

在一些初始时刻给出函数和其导数的值，称为初始条件。

但从数学上看，哪一个是“时间”，哪一些是“空间”变量？都是变量，无从区分。

正如在微分方程分类中所看到的，对椭圆型方程，所有自变量均对应于物理上的空间变量，需要边界条件。

而对双曲型和抛物型方程，有一个与其它变量不同的“特殊”变量，这个变量，应该对应于物理上的时间变量。

对双曲型方程，这个“特殊变量”对应于的本征值与其它本征值反号。

对抛物型方程，这个“特殊变量”所对应于本征值为 0。

对这个“特殊”变量（对应于物理上的时间变量），相应地，“边界”条件称为初始条件。

有时，数学上把初始条件也看成一种（广义的）边界条件（时间边界）。

然而，物理上的因果关系要求，对于时间变量，有某个“边界”对确定微分方程的解没有帮助。

例如：在时间上，我们不可能通过改变明天的振动情况，影响今天的振动，

但是在空间上，却可以改变一端的振动情况，影响整个体系的振动。

这样，广义边界条件就包括在“开表面”和“闭表面”上给定函数（或/和其导数）的值。

“闭表面”：需给定“两端”的函数值或其导数值，“两端”的值对解均有影响。

“开表面”：只需（也只有）“一端”的函数值（和其导数值），只有“一端”的值对解有影响。

因此，广义边界条件可分为几种：

1. Cauchy 条件： 给定广义边界上的函数 和其（法向）导数的值。
2. Dirichlet 条件： 给定广义边界上的函数的值。
3. Neumann 条件： 给定广义边界上法向导数的值。
4. Robin 条件： 给定广义边界上函数值和其法向导数值的线性组合。

不同类型的微分方程，确定唯一解的广义边界条件（辅助条件）也不同。

1. 椭圆型： 诸如Laplace方程的椭圆型方程，

各变量本质相同（对应的本征值均不为零且同号）

必须对各变量（物理上对应于在空间边界）闭表面 给定：

函数值（Dirichlet条件）或其导数值（Neumann条件）或函数与其导数的线性组合值（Robin条件）。

在空间边界（闭表面）同时给定函数值 和其导数值（Cauchy 条件）可能导致条件过于苛刻而无解。

2. 抛物型： 诸如扩散方程的抛物型方程，

有一个变量特殊（对应的本征值为 0）

必须对此变量（物理上对应于在某些时刻）开表面 给定函数值，

同时对其他变量（物理上对应于在空间边界）闭表面 给定函数值或其导数值 或二者的线性组合。

在空间边界（闭表面）同时给定函数值和其导数值可能导致条件过于苛刻而无解。

3. 双曲型： 诸如波动方程的双曲型方程，

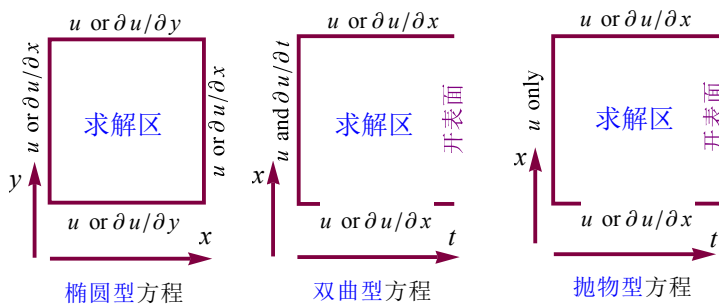
有一个变量特殊（对应的本征值与其他变量对应的本征值反号）

必须对此变量（物理上对应于在某些时刻）开表面 给定函数值 和其导数值（Cauchy条件）

同时对其他变量（物理上对应于空间边界）闭表面 给定函数值或其导数值 或二者的线性组合值。

在空间边界（闭表面）同时给定函数值和其导数值可能导致无解。

下图总结了不同类型的偏微分方程之辅助（附加）条件。即使给定“开表面”的“边界条件”，也影响不了区域的解。



思考：物理上容易判断，哪一个变量是空间变量，哪一个和时间变量，空间（时间）变量对应于闭（开）表面。

而数学上，

是通过判断某个变量与其它变量不同（对应的本征值与“它人”反号）来判断哪一个变量对应于开表面，

对一维波动方程： $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ ，如何判断？

三种常见物理问题的定解条件

我们涉及的三种问题包括：波动问题、扩散（热传导）问题和稳定问题，

描述问题的偏微分方程分属三种类型：双曲型、抛物型和椭圆形。

定解条件是求出问题唯一解所需要的条件，除了微分方程，

还需边界条件、初始条件，可能还有衔接条件、自然条件、周期条件、辐射条件等。

定解问题：微分方程（也称为泛定方程）+ 附加条件（包括边条、初条、自然、周期、衔接等）

1. 波动问题

波动问题的微分方程属双曲型，对一维情况，定解条件为：

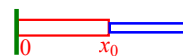
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0 \\ \text{初始条件: } u(x, 0) = \varphi(x) \text{ 和 } u_t(x, 0) = \psi(x) \\ \text{边界条件: } \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = p(t) \text{ 和 } u(l, t) = q(t) \\ \text{或} \\ u_x(0, t) = \bar{p}(t) \text{ 和 } u_x(l, t) = \bar{q}(t) \\ \text{或} \\ \begin{cases} \alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = \bar{p}(t) \\ \alpha' u(l, t) + \beta' u_x(l, t) = \bar{q}(t) \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Dirichlet 条件 (第一类边条)} \\ \text{Neumann 条件 (第二类边条)} \\ \text{Robin 条件 (第三类边条)} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{泛定方程} \\ \text{初始条件} \\ \text{边界条件} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{初始位移和初始速度} \\ \text{(Cauchy 条件)} \\ \text{若 } p(t), q(t) = 0, \\ \text{则称为齐次边条} \end{array}$$

关于这三类边界条件的例题，可见 §9.1。

以上是对均匀体系，对分区均匀体系，还需要在衔接处的衔接（连接）条件。

例 1：长为 l 的细杆在 x_0 左右两边由不同材料、截面积的杆组成，杆在 $x=0$ 端固定，另一端受压缩，

受压后杆长缩为 $l(1-\varepsilon)$ ，在 $t=0$ 时刻放手，试写出杆纵振动的定解条件。



$$\text{解: 振动方程: } \begin{cases} u_{tt}(x, t) - a_1^2 u_{xx}(x, t) = 0, & 0 \leq x \leq x_0, & a_1 = \sqrt{Y_1/\rho_1} \\ u_{tt}(x, t) - a_2^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x_0 \leq x \leq l, & a_2 = \sqrt{Y_2/\rho_2} \end{cases}$$

边界条件：固定端： $u(0, t) = 0$ ，自由端： $u_x(l, t) = 0$ 。两端分别为第一类和第二类齐次边条。

$$\text{连接条件: } \begin{cases} u(x_0^-, t) = u(x_0^+, t), & \text{杆不断开, 位移相同} \\ S_1 Y_1 u_x(x_0^-, t) = S_2 Y_2 u_x(x_0^+, t), & x_0 \text{ 两边的作用力等于反作用力 (负号去哪啦?)} \end{cases}$$

其中： $S_1 Y_1 u_x(x_0^-, t)$ 为 x_0 右边对 x_0 左边的拉力， $S_2 Y_2 u_x(x_0^+, t)$ 为 x_0 左边对 x_0 右边的拉力

$$\text{初始条件: } \begin{cases} u(x, 0) = -\varepsilon x, & \text{见下详细解答} \\ u_t(x, 0) = 0, & \text{刚放手时, 杆还来不及动, 初始速度为 0} \end{cases}$$

在 $t=0^-$ 时，杆静止，既无初速度，也无初加速度（但存在初位移）。令： $v(x) = u(x, 0^-)$

看从 x 到 $x+dx$ 的一小段： $YSv_x(x+dx) - YSv_x(x) = \rho dx u_{tt}(x, 0) = 0 \implies v_{xx} = 0 \implies v = cx + b$

$$\text{从而, } \begin{cases} \text{在 } x < x_0, & v = c_1 x + b_1 \\ \text{在 } x > x_0, & v = c_2 x + b_2 \end{cases} \quad \text{四个待定系数: } c_1, c_2, b_1, b_2$$

由连接条件： $v(x_0^-) = v(x_0^+)$, $S_1 Y_1 u_x(x_0^-, t) = S_2 Y_2 u_x(x_0^+, t)$ ，固定端： $v(0) = 0$ ，受压端： $v(l) = -l\varepsilon$

解得： $b_1 = b_2 = 0$, $c_1 = c_2 = -\varepsilon$

例 2：长为 l 线密度为 ρ 的细弦两端固定，开始时在 $|x-c| < \varepsilon$ 处受冲量 I 作用，写出定解条件。

$$\text{解: 振动方程: } u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

边界条件：固定两端： $u(0, t) = 0 = u(l, t)$ 。两端均为第一类齐次边条。

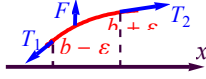
$$\text{初始条件: } \begin{cases} u(x, 0) = 0, & \text{还没来得及动, 初位移为 0} \\ u_t(x, 0) = ?, & \text{得到冲量, 必有速度} \end{cases}$$

在 $|x - c| < \varepsilon$ 处得到冲量 I , 故 $u_t(x, 0) = \begin{cases} \frac{I}{2\varepsilon\rho}, & |x - c| < \varepsilon \\ 0, & |x - c| \geq \varepsilon \end{cases}$, 满足: $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} u_t(x, 0)\rho dx = I$

▲ 若冲量仅作用在 $x = c$ 点, 则: $u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - c)$

例 3: 横振动的弦上某点 b 受到横向力 $F(t)$ 的作用, 求连接条件。

解: 将该点的受力均匀分配到: $|x - x_0| < \varepsilon$,



这时有力密度 (单位长度的弦受到的力) $f = \frac{F}{2\varepsilon}$, 对从 $b - \varepsilon$ 到 $b + \varepsilon$ 这段弦,

有: $\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + f dx = \rho dx u_{tt} \end{cases} \implies T_1 = T_2 = T$
 $\xrightarrow{dx = 2\varepsilon \rightarrow 0} -F = T[u_x(b^+, t) - u_x(b^-, t)]$

从而连接条件为: $\begin{cases} u(b^+, t) = u(b^-, t) & \text{弦没断, 位移连续} \\ u_x(b^+, t) - u_x(b^-, t) = -\frac{F}{T} & \text{位移的偏导数不连续} \end{cases}$

这种函数连续, 其偏导数不连续的情况, 在量子力学中还会遇到。

例 4: 同上题, 在弦的某点 b 系一质量为 M 的重物, 重物与弦同步运动没有相对位移, 求连接条件。

解: 同上题, 从而连接条件为: $\begin{cases} u(b^+, t) = u(b^-, t) & \text{弦没断, 位移连续} \\ u_x(b^+, t) - u_x(b^-, t) = -\frac{F}{T} & \text{位移的偏导数不连续} \end{cases}$

$$F - Mg = M u_{tt}(b, t)$$

2. 扩散问题

扩散问题的微分方程属抛物型, 定解条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } u_t(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0 \\ \text{初始条件: } u(\vec{r}, t)|_{t=0} = u(\vec{r}, 0) = \varphi(\vec{r}) \\ \text{边界条件: } \left\{ \begin{array}{l} u(\vec{r}, t)|_{\Sigma} = p(t, \Sigma) \\ \text{或} \\ \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \bar{p}(t, \Sigma) \\ \text{或} \\ \left[\alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right] \Big|_{\Sigma} = \bar{p}(t, \Sigma) \end{array} \right. \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Dirichlet 条件} \\ \text{Neumann 条件} \\ \text{Robin 条件 } (\alpha, \beta \text{ 为常数}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{初始温度分布} \\ \text{(时间上的 Dirichlet 条件)} \\ \text{若 } p(t, \Sigma) = 0, \\ \text{则称为齐次边条} \end{array}$$

3. 稳定问题

稳定问题的微分方程属椭圆型, 定解条件为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{泛定方程: } \nabla^2 u(\vec{r}, t) = f \\ \\ \text{边界条件: } \left\{ \begin{array}{l} u(\vec{r}, t)|_{\Sigma} = p(\Sigma) \quad \text{Dirichlet 条件} \\ \text{或} \\ \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \bar{p}(\Sigma) \quad \text{Neumann 条件} \\ \text{或} \\ \left[\alpha u(\vec{r}, t) + \beta \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial n} \right] \Big|_{\Sigma} = \bar{p}(\Sigma) \quad \text{Robin 条件 } (\alpha, \beta \text{ 为常数}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{若 } p(\Sigma) = 0, \\ \text{则称为齐次边条} \end{array} \right.$$

4. 其它物理条件

以上三种问题，在高维空间，还需要借助其它一些物理条件，才能确定问题的唯一解。

■ 自然条件:

例如，在取球坐标或柱坐标时，物理问题往往要求在 $r=0$ （球坐标）或 $\rho=0$ （柱坐标）时，函数是有限的。在球坐标中有时还要求，在极角 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi$ 时，函数也是有限的。

■ 周期条件:

例如，在取球坐标或柱坐标时，物理问题往往要求在 $u(\phi+2\pi) = u(\phi)$ ，其中 ϕ 为球（柱）坐标的方位角。

■ Helmholtz 方程与辐射条件:

波动方程 $u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0$ 在三维空间为： $u_{tt}(\vec{r}, t) - a^2 \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0$

对时谐（单色）波， $u(\vec{r}, t) = \text{Re}[u(\vec{r}) e^{-i\omega t}]$ ，代入波动方程，即可得到 $u(\vec{r})$ 满足的方程

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \quad \text{其中 } k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} \quad \text{这个方程称为 Helmholtz 方程。} \quad (1.6)$$

当然，对波动方程的时间变量做 Fourier 变换，也可得 Helmholtz 方程，这时的函数 $u(\vec{r})$ 代表 $\tilde{u}(\vec{r}, \omega)$ 。

Helmholtz 方程是椭圆形方程。

如果我们要求方程在某些有限区域之外的无穷区域的解，需要给定边条

(a) 在有限区域边界上给定： $\alpha u(\vec{r}) + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ 。其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示边界的法向导数。常数 α, β 不同时为 0。

注： $\alpha u(\vec{r}) + \beta \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}$ 形式实际上包含了三种可能的边条，例如 $\alpha=0, \beta \neq 0$ 即退化为 Neumann 边条。

(b) 在无穷远处的边条： $\lim_{r \rightarrow \infty} r u(\vec{r})$ 有限

(c) Sommerfeld 辐射条件： $\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial u(\vec{r})}{\partial r} - i k u(\vec{r}) \right] = 0$,

物理意义：场是向外辐射的。

当 $r \rightarrow \infty$ 时， $u \sim \frac{e^{i k r}}{r}$ 满足辐射条件， $u \sim \frac{e^{-i k r}}{r}$ 不满足辐射条件，而前者是向外辐射的波（参见 § 8.3）。

根据椭圆型方程的附加条件要求，前两个条件容易理解，相当于给定“闭表面”的边界条件。

而第三个（辐射条件）实际上隐含了物理上的因果关系：因为有限区域的源产生的场，一定是向外辐射的。

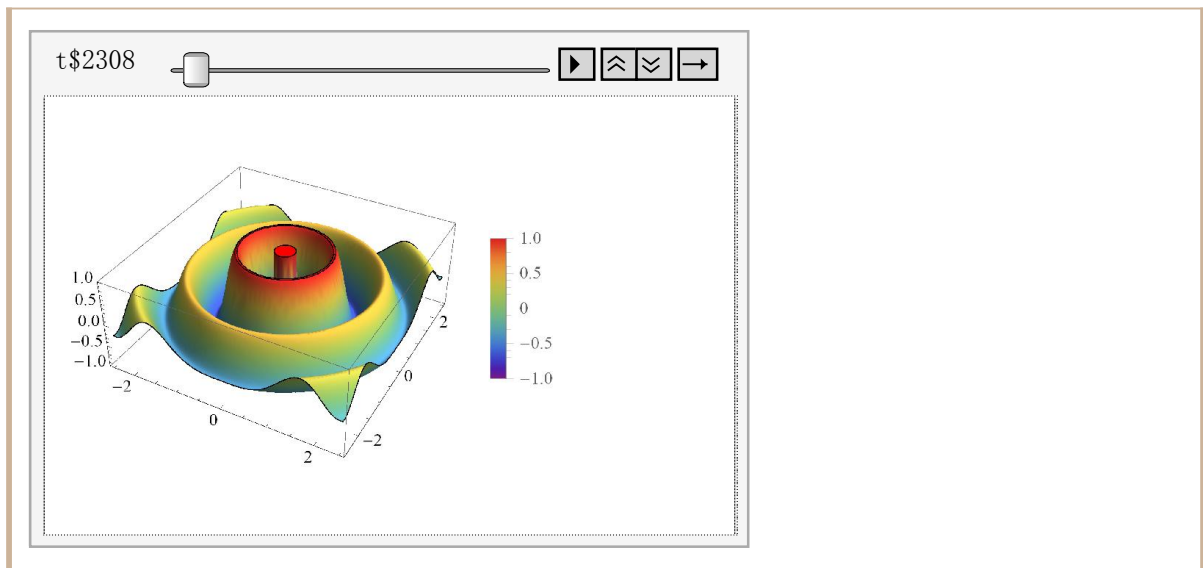
下图画出 $z=0$ 平面 $\frac{e^{i k r}}{r}$ 及 $\frac{e^{-i k r}}{r}$ 的波形随时间变化，可看出是一个向外传播的球面波。

注意真正的物理场是： $u(\vec{r}, t) = \text{Re}[u(\vec{r}) e^{-i\omega t}]$

```

Module [
  {k = 2 π, ω = 2 π, T, λ, x, y, r, t, so, si, sg1, sg2},
  T = 2 π / ω; λ = 2 π / k; r = √(x² + y²);
  so[t_] =  $\frac{e^{i k r - i \omega t}}{r}$ ;
  si[t_] =  $\frac{e^{-i k r - i \omega t}}{r}$ ;
  Animate [
    Plot3D[Re[so[t]], {x, -2.5 λ, 2.5 λ}, {y, -2.5 λ, 2.5 λ},
    PlotRange → 1, ClippingStyle → Red, PlotPoints → 50,
    ColorFunction → "Rainbow", Mesh -> None, ImageSize → {200, 200},
    PlotLegends → BarLegend[Automatic, LegendMarkerSize → {10, 90}],
    Exclusions → {x² + y² == 0}], {t, 0, 1, 0.01}, AnimationRunning → False]

```



9.5 二元线性常系数齐次偏微分方程的通解

二元常系数线性齐次偏微分方程的普遍形式是

$$A_0 \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \cdots + A_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} + B_0 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \cdots + B_{n-1} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}} + \cdots + M \frac{\partial u}{\partial x} + N \frac{\partial u}{\partial y} + P u = 0 \quad (1.7)$$

其中： $A_0, A_1, \dots, B_0, \dots, M, N, P$ 为常数。这里的线性齐次指的是方程仅含有 u （或其导数）的一次项。

该偏微分方程可写为

$$L(D_x, D_y) u = [A_0 D_x^n + A_1 D_x^{n-1} D_y + \cdots + A_n D_y^n + B_0 D_x^{n-1} + \cdots + B_{n-1} D_y^{n-1} + \cdots + M D_x + N D_y + P] u \quad (1.8)$$

其中算符： $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ 。算符 $L(D_x, D_y)$ 形式上貌似一个代数式。

现在讨论在一些简单情况下，二元常系数线性齐次偏微分方程 (1.7) 的解。

算符 $L(D_x, D_y)$ 是 D_x, D_y 的齐次式

这时，偏微分方程退化为

$$[A_0 D_x^n + A_1 D_x^{n-1} D_y + A_2 D_x^{n-2} D_y^2 + \cdots + A_n D_y^n] u = 0$$

取试探解为： $\phi(y + \alpha x)$ 形式，利用

$$D_x^m \phi(y + \alpha x) = \alpha^m \phi^{(m)}(y + \alpha x), \quad D_y^m \phi(y + \alpha x) = \phi^{(m)}(y + \alpha x), \quad D_x^m D_y^k \phi(y + \alpha x) = \alpha^m \phi^{(m+k)}(y + \alpha x)$$

偏微分方程化为

$$\underbrace{(A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \cdots + A_n)}_{\text{今此代数式为0}} \phi^{(n)}(y + \alpha x) = 0$$

令 n 次多项式 $A_n \alpha^n + A_{n-1} \alpha^{n-1} + A_{n-2} \alpha^{n-2} + \cdots + A_n$ 等于 0 得辅助方程

$$A_0 \alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} + \cdots + A_n = 0$$

解得根 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$

1. 若这些根各不相等，则原微分方程可写成

$$(D_x - \alpha_1 D_y)(D_x - \alpha_2 D_y) \cdots (D_x - \alpha_n D_y) \phi(y + \alpha x) = 0$$

$$\Rightarrow (D_x - \alpha_m D_y) \phi(y + \alpha x) = 0 \Rightarrow \phi(y + \alpha_m x) \text{ 是偏微分方程的解}$$

$$u(x, y) = \phi(y + \alpha_1 x) + \phi(y + \alpha_2 x) + \cdots + \phi(y + \alpha_n x)$$

2. 若有重根，

设有二重根 $\alpha^{(2)}$ ，则有以下形式

$$(D_x - \alpha^{(2)} D_y)^2 \phi(y + \alpha x) = 0 \quad \text{这时可令二重根对应的解为 } u_2 = \phi_0(y + \alpha x) + x \phi_1(y + \alpha x)$$

$$\text{代入可解得: } \alpha = \alpha^{(2)} \Rightarrow u_2 = \phi_0(y + \alpha^{(2)} x) + x \phi_1(y + \alpha^{(2)} x)$$

$$\text{类似地, } k \text{ 重根对应的解为: } u_k = \phi_0(y + \alpha^{(k)} x) + x \phi_1(y + \alpha^{(k)} x) + \cdots + x^{k-1} \phi_{k-1}(y + \alpha^{(k)} x)$$

算符 $L(D_x, D_y)$ 不是 D_x, D_y 的齐次式

这时会出现如下形式：

$$(D_x - \alpha D_y - \beta) u = 0 \tag{1.9}$$

令： $u = c(x) \phi(y + \alpha x)$ 代入上式得（注意函数 ϕ 自变量中的 α 等于上式的 α ）

$$c'(x) - \beta c(x) = 0 \Rightarrow c(x) = e^{\beta x} \Rightarrow \text{对应的解 } u = e^{\beta x} \phi(y + \alpha x)$$

若出现如下形式：

$$(D_x - \alpha D_y - \beta)^2 u = 0$$

类似可求得解为：

$$u = e^{\beta x} \phi_0(y + \alpha x) + x e^{\beta x} \phi_1(y + \alpha x)$$

例：求方程： $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的通解

$$\text{解：方程化为：} (D_x^2 - D_x D_y - 2 D_y^2 + 2 D_x + 2 D_y) u = 0$$

$$\text{因式分解：} (D_x + D_y)(D_x - 2 D_y + 2) u = 0$$

$$\text{解得：} u = \phi_1(y - x) + e^{-2x} \phi_2(y + 2x)$$

思考：(1.9) 式若取解的形式为： $u = c(y) \phi(y + \alpha x)$ ，如何？