第十四章　格林函数--偏微分方程解的积分表示

解偏微分方程主要有两种方法:

A: 数理方法中的分离变量法：正交的多项式或无穷级数解，但需要齐次边界条件。

B: 理论物理中的 Green 函数方法:既是简单的有理形式解,又允许任意的边界条件!

1，Green 函数（GF）的意义：物理上：点源产生的场（函数）在时空中的分布。特别是它在空间是源函数；在时空是传播函数。(See below)

数学上: 具有点源的偏微分方程在齐次边界条件或者无界区域、初值条件下的解。

2，GF 的分类：边界值 GF：$G(\vec{r},\vec{r}\,')$ 即源函数；初始值 GF：$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')$ 即传播函数。

3，Green 函数的性质：

1）对称性：$G(\vec{r},\vec{r}\,')=G(\vec{r}\,',\vec{r})$，它与定解问题相关，即与厄米性相关。(See 4 below)

2）时间传播函数没有对称性：$G(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')\neq G(\vec{r}\,',t';\vec{r},t)$.（因果律引起）

3）存在的必要条件：设方程 $(\nabla^2+\lambda)G(\vec{r},\vec{r}\,')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$，若 λ 是对应齐次方程的本征值，即 $\nabla^2\varphi=-\lambda\varphi$ 和附加齐次边界条件，则 $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ 不存在。这是因为既有点源：$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ 矛盾于又无流：$\frac{\partial}{\partial n}G|_\Sigma=0$. 本征值问题存在，但是没有激发，物理上自相矛盾！平面波 $Ae^{ik(x\mp at)}$，球面波 $Ar^{-1}e^{ik(x\mp at)}$ 和柱面波 $A\rho^{-1/2}e^{ik(\rho\mp at)}$ 均是 Laplace Equation 的解，但不是 Possion Equation 的解。球、柱面波分别来自于 $x\gg 1$ 时（散射问题）渐近行为：$H_m^{(1,2)}(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{\pm i[x-(m+1/2)\pi/2]}, h_l^{(1,2)}(x)\sim\frac{1}{x}e^{\pm i[x-(l+1)\pi/2]}$.

4，Green 函数的边值条件：

选取边值条件具有人为性，但要求简单并保证算子的厄米性。

1）齐次边值条件：$(\alpha\frac{\partial G}{\partial n}+\beta G)|_\Sigma=0$ 矛盾于上述 3,3)，详见下面 14.1.2 末。

2）有解性（解收敛）：$G|_{r\to\infty}=0$ --基本解。

5，Green 函数的用途：偏微分方程的积分解法：1）求 $G(\vec{r},\vec{r}\,')$，2）利用迭加原理给出物理问题 $u(\vec{r})$ 的积分形式解；Green 函数的奇点与元激发的能量和寿命有关 。

6，Green 函数的求法：

1)　特殊方法：$\nabla^2 G=-\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\overset{\text{无界}}{\Rightarrow}G=1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

2）本征函数展开法：相应算子在同一边界下的本征函数作为基矢。

3）方程齐次化方法：将非齐次项变成边值条件和初值条件。

4）积分变换法：Laplace Transforms，Fourier Transforms.

5) 形式解：算子运算。

14.1 Green 函数与偏微分方程

1，定义：Green 函数(源函数，影响函数，传播函数，传播子)

数学上，含点源的偏微分方程在一定的边界条件或者初始条件下的解；

物理上，点源在一定物理条件下产生的场。这种解（场）在时空中的分布与传播。

例1， 无界空间 Possion Equation:

$$\begin{cases}\nabla^2 u=-4\pi\rho(\vec r),\\ u|_\Sigma=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2 G(\vec r,\vec r\,')=-4\pi\delta(\vec r-\vec r\,'),\\ G|_\Sigma=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow G(\vec r,\vec r\,')\overset{\text{无界}}{=}\frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|},\quad u(\vec r)=\int G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r\,')\mathrm{d}\vec r\,'.$$

基本解---无界空间 Green 函数的叠加（see below for the solution）.

例2， 无界空间 Helmholtz Equation：

$$\begin{cases}(\nabla^2+\lambda)u=-4\pi\rho(\vec r),\\ u|_\Sigma=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(\nabla^2+\lambda)G(\vec r,\vec r\,')=-4\pi\delta(\vec r-\vec r\,'),\\ G|_\Sigma=0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow u(\vec r)=\int G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r\,')\mathrm{d}\vec r\,'$$

(see below for the solution. $G(\vec r,\vec r\,')$: Field; $\rho(\vec r\,')$: Source).

例 3， 无界空间波动方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)u=\rho(\vec r,t),\ u|_\Sigma=0,\ u|_t=0,\ u_t|_t=0.$$

$$\Rightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2\right)G(\vec r,t;\vec r\,',t')=\delta(\vec r-\vec r\,')\delta(t-t'),\ G|_\Sigma=0,\ G|_t=0,\ G_t|_t=0.$$

在含时 Green 函数 $G(\vec r,t;\vec r\,',t')$ 中，为方便计，我们将它简记为 $G(\vec r,\vec r\,')$.

2, Helmholtz Equation and Laplace Equation 解的积分形式（在定解问题中求 G ）

设定解问题:

$$(\nabla^2+\lambda)u=-4\pi\rho(\vec r),---(1)$$

$$(\alpha u_n+\beta u)|_\Sigma=f(\Sigma),---(2)$$

对应于 $(\nabla^2+\lambda)G(\vec r,\vec r\,')=-4\pi\delta(\vec r-\vec r\,'),---(3)$

$$(\alpha G_n+\beta G)|_\Sigma=0.(\text{齐次边界条件})--(4)$$

假设 $G(\vec r,\vec r\,')$ 已经求出，方法见 14.3.作算符运算：$\int\limits_\Omega[G(\vec r,\vec r\,')\mathrm{Eq.}(1)-u(\vec r)\mathrm{Eq.}(3)]\mathrm{d}\vec r$ 得

$$\int\limits_\Omega[G(\vec r,\vec r\,')\nabla^2u(\vec r)-u(\vec r)\nabla^2G(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}\vec r=-4\pi\int\limits_\Omega[G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r)-u(\vec r)\delta(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}\vec r.$$

对上式左边利用 Gauss 公式 $\int_\Omega\nabla\cdot\vec F\mathrm{d}\vec r=\oiint_\Sigma\vec F\cdot\hat n\mathrm{d}\Sigma$, 其中 $\vec F=G\nabla u, u\nabla G$, 可得如下的

Green 恒等式：$\oint_\Omega[G(\vec r,\vec r\,')\nabla^2u(\vec r)-u(\vec r)\nabla^2G(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}\vec r=\oiint_\Sigma(Gu_n-uG_n)\mathrm{d}\Sigma.$

See 童裕孙等，高等数学下册，2nd 版，PP154-156&PP161-162.

故有形式解 $u(\vec r\,')=\int G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r)\mathrm{d}\vec r+\frac{1}{4\pi}\oiint_\Sigma\left(G(\vec r,\vec r\,')\frac{\partial u(\vec r)}{\partial n}-u(\vec r)\frac{\partial G(\vec r,\vec r\,')}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma.$（5）

在$G(\vec r,\vec r\,')$已知的前提下，解（5）也不是$u(\vec r)$用$G(\vec r,\vec r\,')$表示的最后形式。这是因为$u(\vec r),u_n(\vec r)$在边界Σ上还未知(最多知道他们在Σ的线性组合—BCs). 幸好$G(\vec r,\vec r\,')$的边界条件还可以以多种形式提出；只要选定G的边界条件为齐次，则$u(\vec r),u_n(\vec r)$或者其线性组合就可为已知的边界条件，从而最后确定$u(\vec r)$. 例如：

1）第一类边界条件：　$\alpha=0,\beta=1,u|_\Sigma=f(\Sigma),G|_\Sigma=0$

$$\Rightarrow u(\vec r\,')=\int_\Omega G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r)\mathrm{d}\vec r-\frac{1}{4\pi}\oiint_\Sigma u(\vec r)\frac{\partial G(\vec r)}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma.$$

2）第二类边界条件：$\alpha=1,\beta=0,u_n|_\Sigma=f(\Sigma),G_n|_\Sigma=0.$

$$\Rightarrow u(\vec r\,')=\int_\Omega G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r)\mathrm{d}\vec r+\frac{1}{4\pi}\oiint_\Sigma G(\vec r,\vec r\,')\frac{\partial u(\vec r)}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma.$$

3)第三类边界条件：$(\alpha,\beta)\neq 0$, taking $G\cdot\mathrm{Eq.}(2)-u\cdot\mathrm{Eq.}(4),\Rightarrow \alpha(Gu_n-uG_n)|_\Sigma=Gf(\Sigma).$

得到 $$u(\vec r\,')=\int_\Omega G(\vec r,\vec r\,')\rho(\vec r)\mathrm{d}\vec r+\frac{1}{4\pi\alpha}\oiint_\Sigma G(\vec r,\vec r\,')f(\Sigma)\mathrm{d}\Sigma.$$

这些形式解的前提是G要已知或者可求出。实际问题中，G可能就不存在。例如在第二类边界条件中，$\lambda=0$的问题[Possion Equation, 点源存在，但边界“流”为零--$G_n|_\Sigma=0$. 物理上不通(既产生又绝缘--矛盾)，数学上无解]。再例如，构成本征值问题的$(\nabla^2+\lambda)u=0,(\alpha u_n+\beta u)|_\Sigma=0$，不存在相对应的方程（3）和（4）. 这是因为即使在边界条件完全相同的情况下，$\rho\equiv 0$（无源）而方程（3）的源为 $\delta(\vec r-\vec r\,')$. 在此情况下G无解（或适当修改 Green 函数的意义），其实分离变量法已解决了问题，GF 就多此一举了。GF 要解决更为复杂的物理问题！

3. Green 函数的物理意义

以Σ为边界的区域Ω，既无论原方程是否齐次（即Ω内有、无源），又无论原边界条件是否齐次（即Σ上有、无源），GF 总是定义在Ω内除一点(点源)以外方程的非齐次项处处为零（问题本身总要有非齐次项，如源于边界条件）但要化成齐次边界条件的定解问题的解。因此 GF 是“点源影响函数” 或者 “作用的传播函数”。对于所讨论的线性方程而言，一旦知道了相应问题的 Green 函数，只要再做两个积分，把原方程的非齐次项所反应的连续源分布对各点所产生的影响线性迭加起来，便给出原问题的解。这是线性迭加原理的最成功应用。齐次方程的本征值问题的本征值解可用于表示相应非齐次方程定解问题的 GF(求法见最后一节)。

14.2 Green 函数的性质

1. Green 函数由线性算子 $\hat{L}$ 和边界条件和初始条件决定：

$$\hat{L}G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')$$，加上齐次边界条件和初始条件。

2. Green 函数的叠加性

1). $G=G_0+G_1$: 非齐次方程特解（δ δ）+齐次方程通解（δ δ =0）.

例如：
$$\begin{cases}\hat{L}G(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\\ G|_\Sigma=f(\Sigma).\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{L}G_0=\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\\ G_0|_\Sigma=0;\end{cases}\oplus\begin{cases}\hat{L}G_1=0,\\ G_1|_\Sigma=f(\Sigma).\end{cases}$$

2). $\hat{L}(G^*-G)=0.$

3. Green 函数的对称性：

若算子 $\hat{L}$ 是厄米的，则由 $\hat{L}$ 产生的 G 有 $G^*(\vec{r},\vec{r}')=G(\vec{r}',\vec{r})$. 特别地，对于实变 Green 函数，$G(\vec{r},\vec{r}')=G(\vec{r}',\vec{r})$.

1）Helmholtz 方程:
$$\begin{cases}(\nabla^2+\lambda)G(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\text{..........}(1)\\ (\alpha G_n'+\beta G')|_\Sigma=0\text{...}('\text{: source }')\text{......}(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(\nabla^2+\lambda)G(\vec{r},\vec{r}'')=\delta(\vec{r}-\vec{r}''),\text{.........}(3)\\ (\alpha G_n''+\beta G'')|_\Sigma=0\text{....}(''\text{: source }'')\text{...}(4)\end{cases}$$

作 $\int_\Omega[G(\vec{r},\vec{r}'')\text{Eq.}(1)-G(\vec{r},\vec{r}')\text{Eq.}(3)]\mathrm{d}\vec{r}$，则方程右端变为 $G(\vec{r}'',\vec{r}')-G(\vec{r}',\vec{r}'')$，而左端 $\int_\Omega[G(\vec{r},\vec{r}'')\nabla^2G(\vec{r},\vec{r}')-G(\vec{r},\vec{r}')\nabla^2G(\vec{r},\vec{r}'')]\mathrm{d}\vec{r}$. 利用 Guass 公式和 Green 恒等式，上式变为 $\oiint_\Sigma(G''G_n'-G'G_n'')\mathrm{d}\Sigma=0$ [这是因为 Eqs.（2）和（4）的行列式为零]。 故： $G(\vec{r}',\vec{r}'')=G(\vec{r}'',\vec{r}')$.

2) Green Equations:
$$\begin{cases}\hat{L}G(\vec{r},\vec{r}')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}'),\text{...................}(1)\\ (\alpha G_n'+\beta G')|_\Sigma=0\text{...........................}(2)\end{cases}$$
$$\begin{cases}[\hat{L}G(\vec{r},\vec{r}'')]^*=-[\delta(\vec{r}-\vec{r}'')]^*=-\delta(\vec{r}-\vec{r}''),\text{.....}(3)\\ (\alpha G_n''+\beta G'')|_\Sigma=0\text{..}(4)\end{cases}$$

作 $\int_\Omega[G^*(\vec{r},\vec{r}'')\text{Eq.}(1)-G(\vec{r},\vec{r}')\text{Eq.}(3)]\mathrm{d}\vec{r}$，则方程右端变为 $G(\vec{r}'',\vec{r}')-G^*(\vec{r}',\vec{r}'')$，而左端 $\int_\Omega\{G^*(\vec{r},\vec{r}'')\hat{L}G(\vec{r},\vec{r}')-G(\vec{r},\vec{r}')[\hat{L}G(\vec{r},\vec{r}'')]^*\}\mathrm{d}\vec{r}=0$, (因为 $\hat{L}$ 的厄米性)。

故 $G^*(\vec{r}',\vec{r}'')=G(\vec{r}'',\vec{r}')$, or $G^+=G$.

推论，$(G^*)^*=G; G(\vec r,\vec r')=G(\vec r',\vec r)$，如果$G$为实变函数。

总之，$u(\vec r)=\int_\Omega G(\vec r,\vec r')\rho(\vec r')\mathrm{d}\vec r'+\frac{1}{4\pi}\oiint_\Sigma\left(G(\vec r,\vec r')\frac{\partial u(\vec r')}{\partial n}-u(\vec r')\frac{\partial G(\vec r,\vec r')}{\partial n}\right)\mathrm{d}\Sigma.$

物理意义：点源$\vec r'$处产生的势传播到$\vec r$处：$G(\vec r,\vec r')$，再对整体求和，加上边界条件产生的势，总和为$\vec r$处的势分布。

4. Green 函数的奇异性及其随空间维数降低的减弱性。

1).（有）无界区域 Green 函数----基本解$G_0(\vec r,\vec r')$.

a).无界区域：$\hat L G=-\delta(\vec r-\vec r')$. 设解为$G_0(\vec r,\vec r')$（详解见下），则基本解$G_0(\vec r,\vec r')$为有限形式，且中心对称（与$|\vec r-\vec r'|$有关）以及关于$\vec r=\vec r'$发散（奇异性与维度$D$有关）。

b).有界区域：$G=G_0+G_1$，$\hat L G_0=-\delta(\vec r-\vec r')$ 和 $\hat L G_1=0, G_1|_\Sigma=-G_0|_\Sigma=-G_0(\Sigma,\vec r')$. 因为基本解$G_0$有奇异性，所以直接影响分布。点源$\vec r'$通过边界$\Sigma$，i.e.，$-G_0(\Sigma,\vec r')$对$\vec r$处的分布有直接影响。

2). Helmholtz Equation $(\nabla^2+k^2)G=-\delta(\vec r-\vec r')$ 的解$G(\vec r,\vec r')$在$\vec r=\vec r'$附近的奇异性（具体求解见下节）：3D: $G\propto\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$，$\frac{1}{r}$发散；2D: $G\propto\ln\frac{1}{|\rho-\rho'|}$，对数发散; 1D: G连续，$G_x|_{x_0^+}-G_x|_{x_0^-}=-1$，导数发散。

由此可见：Green 函数的奇异性随空间维数的降低而减弱。

14.3 Green 函数的求法

1. 方程齐次化法：将非齐次项$-\delta(\vec r-\vec r')$变为边界条件。

1) Helmholtz Equation:

a). 1D: $G''+k^2G=-\delta(x-x')\ \Rightarrow\begin{cases}G''+k^2G=0, & (x\neq x')\\ (G''+k^2G)|_{x=x'}=-\delta(x-x').\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}G=Ae^{ik|x-x'|} & [\because G(x,x')=G(x',x)]\overset{\text{BC}}{\Rightarrow}\text{积分得}A=i/(2k):\\ -1=\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}(G''+k^2G)\mathrm{d}x=G'|_{x'+\varepsilon}-G'|_{x'-\varepsilon}\ (\text{奇异性}, G=Ae^{ik|x-x'|}\text{光滑})\overset{\text{代入}}{\Rightarrow}A=i/(2k).\end{cases}$$

b). 2D: $G_{xx}+G_{yy}+k^2G=-\delta(x-x')\delta(y-y')$

移动原点$0\to 0'$且改用极坐标系，$\begin{cases}\rho^{-1}(\rho G_\rho)'+k^2G=0, & (\rho\neq 0)\\ \left(\rho^{-1}(\rho G_\rho)'+k^2G\right)|_{\rho=0}=-\delta(x)\delta(y).\end{cases}$

其解为$\mathrm{J}_0(k\rho)$和$\mathrm{N}_0(k\rho)$, 其中$\mathrm{N}_0(k\rho)\sim\dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{k\rho}{2}$是对数分散，或

$G(\rho)=A[\mathrm{J}_0(k\rho)+i\mathrm{N}_0(k\rho)]\equiv A\mathrm{H}_0^{(1)}(k\rho)\approx Ai\dfrac{2}{\pi}\ln(k\rho/2)$ ($\rho\sim 0$ 奇异性)。确定 A:

$$-1=\iint_{0'}\left(\nabla^2G+k^2G\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{\text{Green}}{\underset{\text{Fomula}}{=}}\oint_L G_\rho|_{\rho=\varepsilon}\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}(G_\rho\rho)|_{\rho=\varepsilon}\mathrm{d}\varphi=2\pi\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{H}_0^{(1)}(k\rho)\Rightarrow A=\frac{i}{4}.$$

$\Rightarrow G(\rho)=\dfrac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(|k\vec{\rho}-k\vec{\rho}\,'|)$. 特别 $k=0$ (Laplace Eq.): $\begin{cases}\rho^{-1}(\rho G_\rho)'=0,\\ \nabla^2G|_{\rho=0}=-\delta(x)\delta(y).\end{cases}$

$\Rightarrow G(\rho)=B\ln(1/\rho)+C$, 积分得 $B=1/2\pi$（自证）, C由物理条件确定。

c). 3D: 设散射中心 $\vec{r}\,'=0$，$\begin{cases}(\nabla^2+k^2)G=0,\\ (\nabla^2+k^2)G|_{r=0}=-\delta(\vec{r}).\end{cases}$

球对称，$\dfrac{1}{r}(rG)''+k^2G=0\Rightarrow rG=Ae^{\pm ikr}\Rightarrow G=\dfrac{A}{r}e^{ikr}$ (球面波散射). 请自证：

积分$\iiint\left(\nabla^2G+k^2G\right)\mathrm{d}\vec{r}=-1$得$A=\dfrac{1}{4\pi}$和$G=\dfrac{e^{ikr}}{4\pi r}\Rightarrow G(\vec{r},\vec{r}\,')=\dfrac{\exp[i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')]}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$.

2）1D 波动方程: $\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\\ G|_{x=0,l}=0, G|_{t=0}=G_t|_{t=0}=0.\end{cases}$

冲量定理法: $\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=0,\\ G|_{x=0,l}=0, G|_{\tau+\varepsilon}=0, G_t|_{\tau+\varepsilon}=\delta(x-\xi).\end{cases}$

$$\Rightarrow G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\frac{x}{l})\sin(n\pi\frac{\xi}{l})\sin[n\pi\frac{a}{l}(t-\tau)].$$

3）1D 输运方程: $\begin{cases}G_t-a^2G_{xx}=0,\\ G|_{x=0,l}=0, G|_{t+\varepsilon}=\delta(x-\varepsilon).\end{cases}$

$$\Rightarrow G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(n\pi\frac{a}{l})^2(t-\tau)}\sin(n\pi\frac{x}{l})\sin(n\pi\frac{\xi}{l}).$$

对于第二类边界条件，将上面 2)and 3)中的 sin 换为 cos 就行了。

2. 积分变换法:

1）Fourier Transform.

a). 3D Possion Equation: $\nabla^2G(\vec{r},\vec{r}\,')=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'),\vec{r}\,'\equiv 0.$

$$\tilde{G}(\vec{k})\overset{\mathrm{FT}}{=}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int G(\vec{r})e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r},\ \text{作其反演：}\ G(\vec{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\tilde{G}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{k}.$$

再作 $\nabla^2 G(\vec{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int(-k^2)\tilde{G}(\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{k}.$ 又因为 $\delta(\vec{r})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3}\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{k}$, 所以 3D Possion Equation 在 TF 以后变为 $\tilde{G}(\vec{k})=\sqrt{2/\pi}/k^2$. 进而积分

$$G(\vec{r})=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{1}{k^2}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}\vec{k}=\int\frac{1}{k^2}e^{ikr\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi k^2\mathrm{d}k=\frac{1}{r}.\quad\Rightarrow G(\vec{r}-\vec{r}\,')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

b). 3D Helmholtz Equation:

$$(\nabla^2+\lambda)G(\vec{r})=-4\pi\delta(\vec{r}),\ \mathrm{FT}:(-k^2+\lambda)\tilde{G}(\vec{k})=-1/(2\pi^2).$$

$$\therefore G(\vec{r})=\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{k^2-\lambda}\mathrm{d}\vec{k}=\frac{1}{i\pi r}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{k^2-\lambda}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}k=\cdots=\frac{1}{r}e^{-i\sqrt{\lambda}r}\text{(Chap 7, P. 15).}$$

如果 $\lambda=-1/\lambda_L^2$，则 $G(\vec{r})=e^{-r/\lambda_L}/r$, this is the Coulomb screened potential.

c). 3D 波动方程: $(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})G(\vec{r},t)=-4\pi\delta(\vec{r})\delta(t)$ （源位于 $r'=0,t'=0$ 处).

Taking FT for t, one has $(\nabla^2+\frac{\omega^2}{c^2})\tilde{G}(\vec{r},\omega)=-\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}}\delta(\vec{r})$. 于上述结果 b 比较

得 $G^{\pm}(\vec{r},\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}$, $G^{\pm}(\vec{r},\tau)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{e^{\pm i\omega r/c}}{r}e^{i\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{r}\delta(\tau\pm r/c)$.

故: $G^{\pm}(\vec{r},t;\vec{r}\,',t')=\frac{\delta(t-t'\pm|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ 为超前/推迟 Green 函数。

2）Laplace Transform (3+1)D.

a). 波动方程: $\begin{cases}(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})G=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t'),\\ G|_{t=0}=G_t|_{t=0}=0.\end{cases}$

作 LT for t $\bar{G}(p)=\int_0^{\infty}G(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ $(\mathrm{Re}\,p>0)$. 于是上述方程变为：

$$(\nabla^2-p^2/c^2)\bar{G}(\vec{r},p;\vec{r}\,',t')=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')e^{-pt'}.$$

解此方程得：$\bar{G}(\vec{r},p;\vec{r}\,',t')=\frac{e^{\pm i\frac{p}{c}|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}e^{-pt'}$. 设 $\vec{r}\,'\equiv 0$，则推迟势

$$\bar{G}(\vec{r},p;t')=\frac{e^{-(t'+r/c)p}}{r}\Rightarrow G(\vec{r},t;t')=\frac{1}{2\pi i}\int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty}\bar{G}(\vec{r},p;t')e^{pt}\mathrm{d}p=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{(t-t'-r/c)p}}{r}\mathrm{d}p.$$

令 $p=p_0+ik$，则上式可表示为（推迟势）

$$\frac{1}{2\pi r}e^{p_0(t-t'-r/c)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(t-t'-r/c)k}\mathrm{d}k=\frac{1}{r}e^{p_0(t-t'-r/c)}\delta(t-t'-r/c)=\frac{1}{r}\delta(t-t'-r/c).$$

这是因为 $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

$\rightarrow G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t-t'-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)$ 这里只有推迟势。

b). 热传导方程： $\begin{cases}(\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t})G=-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t'),\\ G|_{t=0}=0.\end{cases}$

作 LT for t and FT for $\vec{r}$： $(-k^2-\dfrac{p}{c^2})\tilde{\bar{G}}(\vec{k},p,t')=-\dfrac{1}{2\pi^2}e^{-pt'}$.

再作 Inverse LT and Inverse FT： $G(\vec{r},t;\vec{r}',t')=\dfrac{1}{2c\sqrt{\pi}}\dfrac{1}{(t-t')^{3/2}}e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4c^2(t-t')}}$.

3. 本征函数展开法：

2D Possion Equation: $\begin{cases}G_{xx}+G_{yy}=-\delta(x-x')\delta(y-y'),\\ G|_{x=0,a;y=0,b}=0.\end{cases}$

选满足边界条件的正交函数系：

$$\Phi_{m,n}(x,y)=\sin(m\pi\frac{x}{a})\sin(n\pi\frac{y}{b})\quad(m,n=1,2,\cdots).$$

正交归一性： $\displaystyle\int_0^a\int_0^b\Phi_{m,n}(x,y)\Phi_{m',n'}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}ab\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}$.

设 $G(x,y;x',y')=\displaystyle\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\Phi_{m,n}(x,y)$ 带入方程得：

$$\nabla^2G=\sum_{m,n}g_{mn}(x',y')\lambda_{m,n}\Phi_{m,n}(x,y)=-\delta(x-x')\delta(y-y'),$$

其中 $\lambda_{m,n}=-\pi^2[(m/a)^2+(n/b)^2]$. 在此方程两边同乘以 $\Phi_{m',n'}$,再积分得到：

$$-g_{m,n}(x',y')\lambda_{m,n}\frac{1}{4}ab=\Phi_{m,n}(x',y')$$

故 $G(x,y;x',y')=\displaystyle\frac{4}{\pi^2ab}\sum_{m,n}\frac{\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)\sin(m\pi x'/a)\sin(n\pi y'/b)}{(m/a)^2+(n/b)^2}$.

Green 函数的解析性研究，即奇点与元激发的能量和寿命有关，见相关专业教材。