第二章部分重要题目解答

4.设

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}cos\phi&-sin\phi\\sin\phi&cos\phi\end{pmatrix},$$

求A^n,B^n。

解：1) 设$F_n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$，则$F_nA=\begin{pmatrix}1&n+1\\0&1\end{pmatrix}$. 又因为$A=F_1$,由数学归纳法得$A^n=F_n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

5.设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-2\\0&4&3\end{pmatrix}$,证明：

(1)$A^n=\begin{pmatrix}1&n&C_n^2\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$

(2)n为偶数时$B^n=E$。 n为奇数时$B^n=B$ 。

证明：(1)用数学归纳法。$n=1$ 时结论成立。假设当 $n=k$ 时结论成立，即

$$A^k=\begin{pmatrix}1&k&C_k^2\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}1&k+1&k+C_k^2\\0&1&k+1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1&C_{k+1}^2\\0&1&k+1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

原命题得证 (2)经验证$B^2=E$，因此原命题得证。

11. 设A,B都是n阶方阵，求证：
(1)$(A+E)^2=A^2+2A+E$，$(A+E)(A-E)=A^2-E$
(2)当$AB\neq BA$时

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2;(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$$

证明：(1)

$$(A+E)^2=A(A+E)+E(A+E)=A^2+A+A+E=A^2+2A+E$$

$$(A+E)(A-E)=(A+E)A-(A+E)E=A^2+A-A-E=A^2-E$$

(2)当$AB\neq BA$时，

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=(A+B)A+(A+B)B=A^2+BA+AB+B^2\neq A^2+2AB+B^2$$

$$(A+B)(A-B)=(A+B)A-(A+B)B=A^2+BA-AB+B^2\neq A^2-B^2$$

证毕。

12. 若 $A=\frac{1}{2}(B+E)$ ，证明$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$。
证明：
$A^2=A\leftrightarrow$
$\frac{1}{4}(B+E)^2=\frac{1}{2}(B+E)\leftrightarrow$
$B^2+2B+E=2B+2E\leftrightarrow$
$B^2=E$

18. 设 n 阶方阵 A 满足：$A^2-A+E=0$，证明 A 为可逆阵，并求A^{-1}。
证明：由$A^2-A+E=0$可以知道 $A-A^2=E$，即$A(E-A)=E$。所以A 为可逆阵，且$A^{-1}=(E-A)$。

19. 设 A 为方阵，某正整数 $k>1$，$A^k=0$，证明：

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

证明：等式两边同乘以 $E-A$ ，则原命题等价于

$$E=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$=E(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})-A(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

$$=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}-(A+A^2+\cdots+A^k)$$

$$=E-A^k=E$$

证毕。

21. 已知三阶方阵A的行列式$|A|=3$，求： $|A^*|$
解：
$|A^*|=||A|A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=9$

27. 设A,B 分别为r,k阶可逆矩阵。

$$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

证明X^{-1} 存在，并求X^{-1}。
证明：直接计算$det(X)$。

$$det(X)=\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{r+k}\begin{vmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}=(-1)^{r+k}|A||B|\neq 0$$

因此X可逆。

$$X\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}=E$$

因此$X^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$

30. 设A是实对称矩阵，证明若$A^2 = 0$，则$A = 0$

证明：

由于A是实对称矩阵，考虑A^2对角线上的元素

$$b_{ii} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} a_{ji} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^2$$

又因为$A^2 = 0$ 且a_{ij}均为实数，故对于任意一行元素的平方和为零，也就是$A = 0$。

31. 证明：任一个 n 阶方阵都可以表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和。

证：

对于 n 阶方阵 A ，直接构造对称矩阵 B 和反对称矩阵 C ，其中

$$B = \frac{A + A^T}{2}$$

$$C = \frac{A - A^T}{2}$$