# 圣彼得堡悖论

长期以来，不确定情况下的决策问题是与概率论这门学科相联系的。当时这类问题大多用赌博的形式提出来的，并认为是否值得参加一场赌博决策，在可能情况下可通过计算局中人的期望收益来判断，如果期望收益为正，那么对参与者而言有利的，虽然这并不意味着每赌必赢，但不断赌下去平均收益为正；期望收益为负的情况恰恰相反。而期望值为零，则意味着这场赌博为“公平游戏”。这样，期望收益的大小是“理性赌徒”用来对赌博进行决策的主要依据，或者说期望收益可以给赌博进行“定价”。

然而，这样的决策分析很快被遭到质疑。瑞士著名数学家丹尼尔•贝诺利（Daniel Bernoulli）在 1725-1733 年在圣彼得堡研究一种投币游戏，并于 1738 年揭开了这个有趣的谜题。后来，这个谜题以“**圣彼得堡悖论**”（St. Petersburg Paradox）著称。所谓“圣彼得堡悖论”涉及的是一场猜硬币正反面的赌博。参加游戏者必须先支付门票，然后抛硬币，直到第 1 个正面出现为止。若第 1 次抛到正面，就赚 2 元；若没有，继续抛，若第 2 次抛到正面,赚 4 元…依此类推。问题是：为使得一个赌徒有权参加这样的游戏，他应该最多付多少钱才能使得这场赌博成为“公平游戏”？

由于在抛到正面之前，反面出现的次数（用 n 表示）用来计算参加者的报酬 r：

$r(n)=2^n$

下表是各种结果的概率和报酬。

| 反面 | 概率 | 报酬 | 概率*报酬 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1/2 | 1 | 1/2 |
| 1 | 1/4 | 2 | 1/2 |
| 2 | 1/8 | 4 | 1/2 |
| 3 | 1/16 | 8 | 1/2 |
| … | … | … | … |
| $n$ | $(1/2)^{n+1}$ | $2^n$ | 1/2 |

预期收益：

$$E(R)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n r_n = 1/2+1/2+\cdots=\infty$$

以上的 1/2 是掷出正面或反面的概率，这个算式没有终结，所以这个游戏的期望值是无限，即你最多肯付出无限的金钱去玩着游戏！尽管游戏的预期报酬是无限的，但参加者的支付却是有限的。问题是，你有可能只赚到 2 元，又或者 4 元，那你为何肯付出无限的金钱作“打和”呢？这就是悖论所在。即圣彼得堡悖论内涵表明，一个机会的数学价值与人们通常给它的较低价值并不一致。

贝诺利研究发现，投资者赋予所有报酬的每 1 个美元的价值是不同的，并由此解决的

此悖论。随着财富的增多，福利值或效用值的边际效用在下降，即“边际效用递减”。在此，可以通过一个赋予报酬的函数 $\ln(r_n)$ 来表达投资者的主观价值。若用支付的美元 $r$ 来取代效用值 $\ln(r_n)$，则游戏的期望效用值的上限则为：

$V(r)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n \ln(r_n)=\sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^{n+1}\ln(2^n)=0.693$。可见，随着报酬的递增，每个美元的价值在变小，游戏者的主观效用呈现有限性特征。也就是说，对一个风险厌恶的投资者而言，如果公平游戏的预期利润为零，他的效用函数（对数效用函数）将呈一个特殊的方式向上倾斜——以一个递减的比率递增。

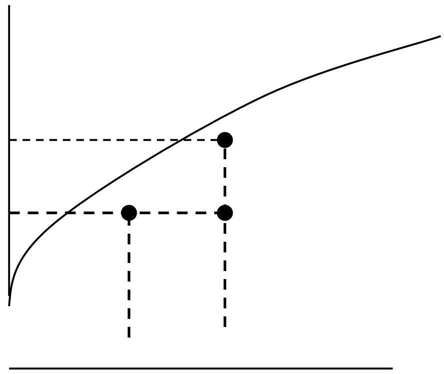

**图 1：公平游戏与期望效用**

贝诺利的答案深刻揭示了人们在不确定的环境下一般并不以追求直接利益的最大数学期望作为选择目标，而是另有“更高的道德期望”。但是，贝诺利的“道德期望”长期以来并不为人们所理解。1944 年，冯诺曼和摩根斯坦（Neumann and Morgenstern）发表巨著《对策论与经济行为》，以完全公理的体系将效用思想应用到投资理论。他们证明，对任一理性决策者，一定存在某种方式对他所关心的各种可能结果赋予效用数值，使其总是选择最大化自己的效用。