10

行波法 分离变量法

有了数学物理方程和所需的附加条件，下一步就是：如何解？

先从物理上考虑。

10.1 一维无界区域的自由振动 D'Alembert 公式

无界区域的自由振动

以弦的横振动为例。振动方程：

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$$

其中：$a^2 = T/\rho$, $f = F/\rho$, F 为单位长度受到的外力，ρ 弦的线密度。

对自由振动，$f = 0$。无限长的弦，不必计及边界的影响。

物理上的理解：弦足够长，边界足够远，以致于边界的影响（反射）尚来不及传到我们所感兴趣的这段弦。

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & \text{双曲型泛定方程} \\ u(x,\,0) = \varphi(x),\quad u_t(x,\,0) = \psi(x) & \text{Cauchy初始条件（给定函数及其导数值）} \end{cases}$$

方程对应于 § 9.4节(1.4)式：

$$A\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial x} + C\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

中 $A = 1$, $B = 0$, $C = -a^2$，$B^2 - 4AC = 4a^2 > 0$，可作变换

$$\begin{cases} \xi = A\,x + \dfrac{1}{2}\left[-B + \sqrt{B^2 - 4AC}\,\right] t = x + a\,t, \\ \eta = A\,x + \dfrac{1}{2}\left[-B - \sqrt{B^2 - 4AC}\,\right] t = x - a\,t \end{cases}$$ 把方程化为：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0$ 形式

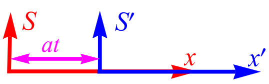
从而可解得：

$u = f_1(\xi) + f_2(\eta) = f_1(x - a\,t) + f_2(x + a\,t)$，其中 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为任意函数。

可见，只有泛定方程，远远不能完全确定解。

解的物理意义：

第一项：$f_1(x - a\,t) = f_1(x')$, $x' = x - a\,t$



以 S 为实验室坐标系，x 为在 S 坐标系中的坐标，

以 S' 为相对于实验室坐标以速度 a 沿 x 方向运动的坐标系，

据伽利略变换，在 S' 坐标系中的坐标 $x' = x - a\,t$

因波形 $f_1(x')$ 不显含时间，所以在 S' 坐标系中看，波形是固定不变的 。

从而在实验室坐标系 S 上看，$f_1(x - a\,t)$ 表示一个以速度 a 不畸变地向右运动的波形 。

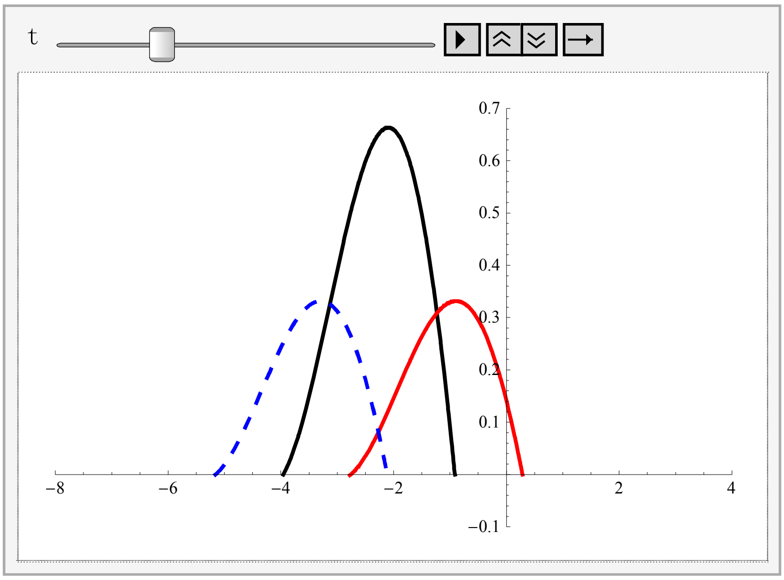
第二项：$f_2(x + a\,t) = f_2(x'')$, $\quad x'' = x + a\,t$

类似于 $f_1(x - a\,t)$，在实验室坐标系 S 上看，$f_2(x + a\,t)$ 表示一个以速度 a 不畸变地向左运动的波形 。

因此，泛定方程的解为两个不畸变的传播波，一个向右传播，一个向左传播。

```
f[x_] := If[-4 < x < -0.915, -Sin[x] - 1/2 x - 1.25, 0];
a = 1;
Animate[
 Plot[{f[x], 1/2 f[x - a t], 1/2 f[x + a t]}, {x, -9, 4},
  PlotRange → {{-8, 4}, {-0.1, 0.7}},

  PlotStyle → {{Black, Thick}, {Red, Thick}, {Blue, Dashing[0.02], Thick}}
  , RegionFunction → Function[{x, y}, y > 0]],
 {t, 0, 5, 0.02}, AnimationRunning → False]
```



现在需确定适当的函数 f_1 和 f_2，使解满足两个初始条件。

$$u(x,\,t) = f_1(x - a\,t) + f_2(x + a\,t),$$

$$\begin{cases} u(x,\,0) = \varphi(x) & \Longrightarrow \quad f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(x,\,0) = \psi(x) & \Longrightarrow \quad -a\,f_1'(x) + a\,f_2'(x) = \psi(x) \quad \Longrightarrow \quad f_1(x) - f_2(x) = -\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,d\xi + c \end{cases}$$

解得：$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{c}{2} \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\,d\xi - \frac{c}{2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow\quad u(x,\ t) = f_1(x - a\,t) + f_2(x + a\,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - a\,t) + \varphi(x + a\,t)] + \frac{1}{2a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi$$

从而，一维无界波动方程的解 —— D’Alembert 公式

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,\ 0) = \varphi(x) \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{u(x,\ t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - a\,t) + \varphi(x + a\,t)] + \frac{1}{2a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi}$$

其物理意义为：一个向左、一个向右传播的无畸变的行波，如上图所示。故称这种解法为行波法。

例 1. 无限长弦在 $x = x_0$ 受一冲量 I 冲击，弦的线密度为 ρ，求弦振动

解：先写出定解问题（定解条件）：无限长，无需边条

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & \text{泛定方程} \\ u(x,\ 0) = 0,\quad u_t(x,\ 0) = ? & \text{初条} \end{cases}$$

在 x_0 点得到冲量，从而仅在该点有初速度：$u_t(x,\ 0) = c\,\delta(x - x_0)$

$I = \int u_t(x,\ 0)\,\rho\,dx \longrightarrow c\,\rho = I \longrightarrow u_t(x,\ 0) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)$ （参见 §9.4 例 2）

利用 D'Alembert 公式：$u(x,\ t) = \frac{1}{2a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\frac{I}{a}\delta(\xi - x_0)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int_{x-x_0-a\,t}^{x-x_0+a\,t}\frac{I}{a}\delta(\eta)\,d\eta$

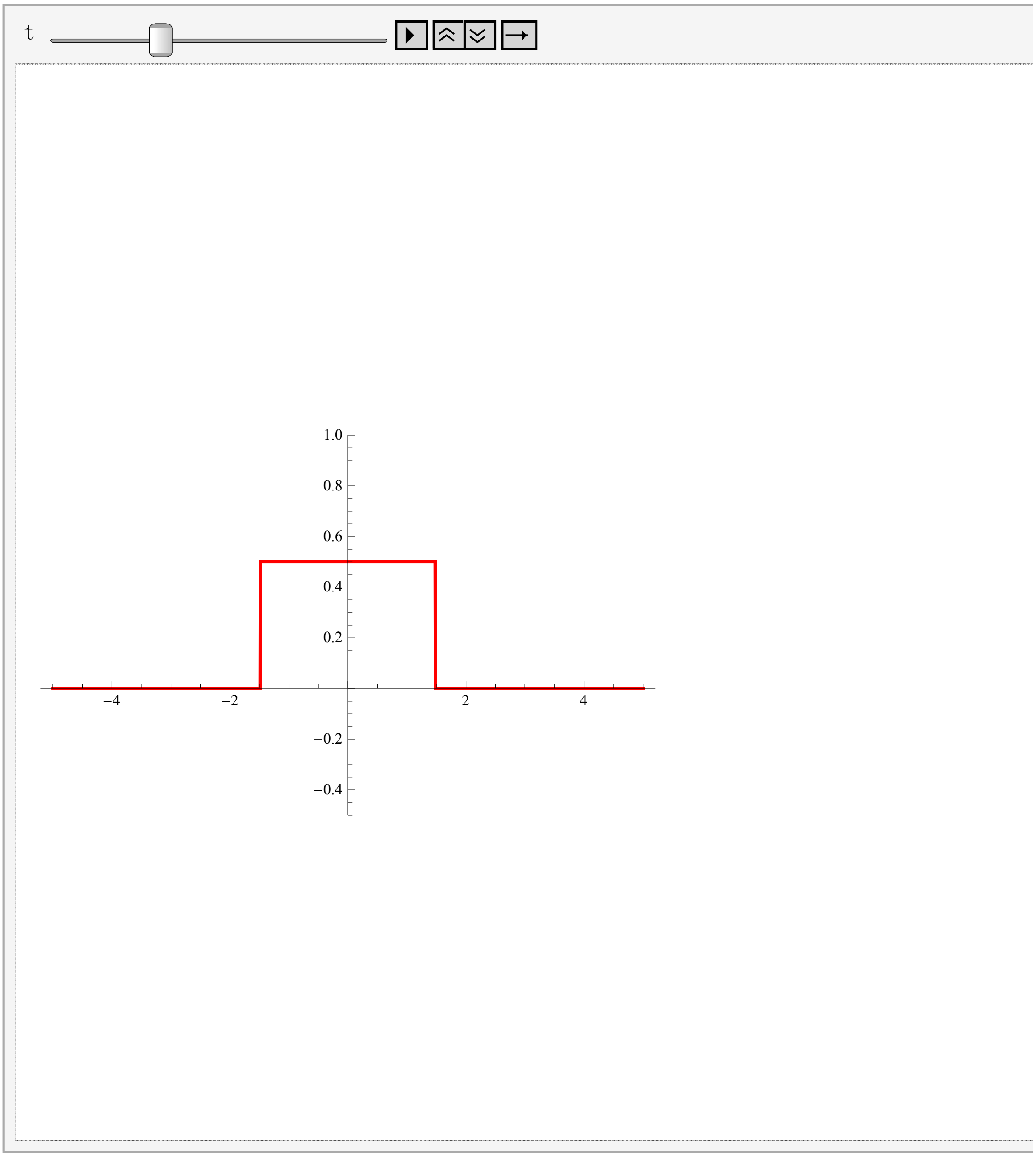
当 $\begin{cases} x - x_0 - a\,t < 0 \\ x - x_0 + a\,t > 0 \end{cases}$ 即 $t > \frac{|x - x_0|}{a}$ 时，$u = \frac{I}{2\,a\,\rho}$

$$u(x,\ t) = \begin{cases} \frac{I}{2\,a\,\rho}, & t > \frac{|x - x_0|}{a} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

物理意义：离 x_0 距离为 $d = |x - x_0|$ 之处，要等到时间在 $\frac{|x - x_0|}{a}$ 后才有响应（位移）。

即：波从 x_0 传到距 x_0 的距离为 $d = |x - x_0|$ 处，需要时间 $\frac{d}{a}$，故 a 也称为波传播速度。

```
a = 1;
ρ = 1;
Ip = 1;
u[x_, t_] := If[t > Abs[x]/a, Ip/(2 a ρ), 0];
Animate[
 Plot[u[x, t], {x, -5, 5}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {-0.5, 1.0},
  PlotStyle → {{Red, Thick}}, RegionFunction → Function[{x, y}, y > -0.1]],
 {t, 0, 5, 0.02}, AnimationRunning → False]
```



半无界区域的自由振动—— 初始条件的延拓

1. 第一类齐次边条——奇延拓

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \geq 0 \text{（出现边界 } x=0\text{，在 } x=0 \text{ 需要边条）} \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = 0 & \text{相当于一端固定} \end{cases} \tag{1.1}$$

对这个定解问题，我们注意到两点：

(*a*) 我们仅需要在 $x \geq 0$ 区域 的解

(*b*) 满足以上方程的解是 唯一的， 即只要满足(1. 1)，就是该问题的解

为此，我们可在 $x < 0$ 区域人为地附加一些条件，使得问题拓展为无界问题，即可用D'Alembert公式求解。

然后在无界问题的解中取 $x \geq 0$ 部分，如果解在这部分满足定解条件 (1.1)，即为原问题的解。

至于无界问题的解在 $x < 0$ 区域如何，并不重要。—— 这就是延拓的思想。

$$\text{半无界} \xrightarrow{\text{延拓}} \text{无界：需要：} \begin{cases} \text{无界问题的解在 } x \geq 0 \text{ 区域仍满足 (1. 1)} \\ \text{延拓后可以用 D'Alembert公式} \end{cases}$$

半无界 Dirichlet （I 类）齐次边条的延拓：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \\ u(0,t) = 0 & \end{cases} \stackrel{\text{延拓}}{\Longrightarrow} \begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} & -\infty < x < +\infty \\ U(x,0) = \Phi(x) & \\ U_t(x,0) = \Psi(x) & \\ U(0,t) = 0 & \text{对应于：} u(0,t) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

显然延拓后 U 满足的泛定方程与 u 相同。也就是说： U 满足左边方程的第一行。

所以，问题就归结为如何选取 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$，使得 U 在 $x \geq 0$ 区域满足左边的 第二、三、四行。

令在 $x \geq 0$ 区域：$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 分别退化为 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$， $\begin{cases} \Phi(x) = \phi(x) \\ \Psi(x) = \psi(x) \end{cases}$ if $x \geq 0$

这样无界解 U 就可满足左边的 第二、三行。

而在 $x < 0$ 区域：$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 如何取？

取适当的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$，使得在 $x = 0$, $U(x,t)|_{x=0} = 0$ 以满足左边的 第四行。

这样，无界解 U 就满足半无界问题的定解条件，根据解的唯一性，在 $x \geq 0$ 区域：$u(x,t) = U(x,t)$。

由 (1.2)，利用D'Alembert公式可得：

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x - a\,t) + \Phi(x + a\,t)] + \frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t} \Psi(\xi)\,d\xi$$

现要求在 $x = 0$ 时，$U(0,t) = 0$ 以满足 (1.1) 中的第四行，为此，需要

$$U(0,t) = \frac{1}{2}[\Phi(-a\,t) + \Phi(a\,t)] + \frac{1}{2\,a}\int_{-a\,t}^{a\,t} \Psi(\xi)\,d\xi = 0$$

显然，只要 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 为奇函数即可 。

又因为，在 $x \geq 0$ 区域：$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 分别退化为 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$，

因此，我们就确定了 (1.2)式的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \geq 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

因为把原来给定的在 $x \geq 0$ 区域的初始条件做奇函数延拓至 $-\infty < x < +\infty$ 区域，故称为奇延拓。

这样， (1.2) 式解出的 $U(x,t)$ 在 $x \geq 0$ 区域满足 (1.1) 式，即：在 $x \geq 0$ 区域，$u(x,t) = U(x,t)$。

在 $x \geq 0$ 区域

$$u(x,\ t)=U(x,\ t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\phi(x-a\,t)+\phi(x+a\,t)]+\frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi, & x-a\,t\geq 0\\ \frac{1}{2}[\Phi(x-a\,t)+\phi(x+a\,t)]+\frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{0}\Psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\,a}\int_{0}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi, & x-a\,t<0\end{cases}$$

进一步化为：

$$u(x,\ t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[\phi(x-a\,t)+\phi(x+a\,t)]+\frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi, & x-a\,t\geq 0\\ \frac{1}{2}[\phi(x+a\,t)-\phi(a\,t-x)]+\frac{1}{2\,a}\int_{a\,t-x}^{0}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\,a}\int_{0}^{x+a\,t}\psi(\xi)\,d\xi, & x-a\,t<0\end{cases}\tag{1.3}$$

物理意义：

(a) 在 $t\leq x/a$ 时，解的形式 （上式第一行 ） 与无界情况完全相同，

因为在 x 发生的扰动，在 $t<x/a$ 的时间内尚未到达 $x=0$ 端，该端是固定还是延伸到无穷长 ，对波没有影响 。

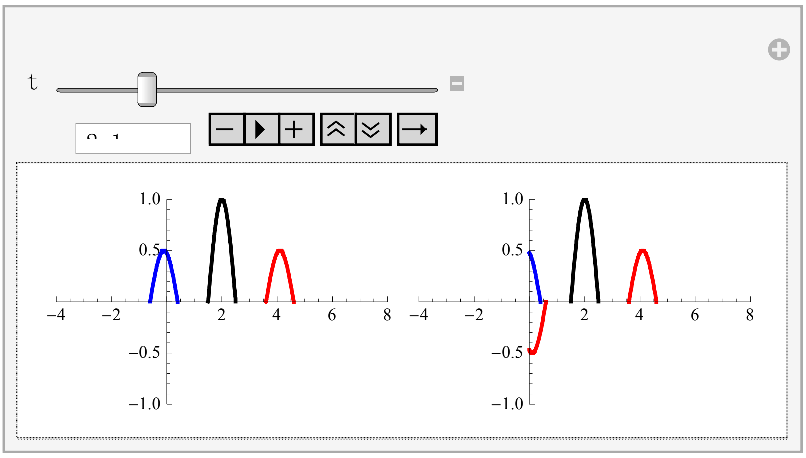
(b) 在 $t>x/a$ 时，解的形式 （上式第二行 ） 与无界情况不相同，

因为在 x 发生的扰动已经传到 $x=0$ 端，“发觉” 该端被固定而非延伸到无穷 ，边界效应就显现 ，解当然有区别 。

下图分别展示无界和半无界的行波。为简单起见，下图假设 $\psi(x)=0$。

若 $\psi(x)\neq 0$，可设 $h'(x)=\psi(x)$，则 $u(x,\ t)$ 中多了：$\frac{1}{2\,a}[h(x+a\,t)-h(a\,t-x)]$，与前一项 $\frac{1}{2}[\phi(x+a\,t)-\phi\,(a\,t-x)]$ 的形式完全相同。

```
Clear[f1, g1];
f1[x_] := If[Abs[x π - 2 π] < π / 2, Cos[π x ], ⅈ];
g1[x_] := If[x ≥ 0, f1[x], -f1[-x]];
a = 1;
ps = {{Black, Thick}, {Red, Thick}, {Blue, Thick}};
Manipulate[
 ga = Plot[{f1[x], 1/2 f1[x - a t], 1/2 f1[x + a t]},
   {x, -7.5, 7.5}, PlotRange → {{-4, 8}, {-1, 1}}, PlotStyle → ps];
 gb = Plot[{f1[x], 1/2 g1[x - a t], 1/2 g1[x + a t]}, {x, -7.5, 7.5},
   PlotRange → {{-4, 8}, {-1, 1}}, PlotStyle → ps,
   RegionFunction → Function[{x, y}, x > 0]];
 Grid[{{ga, gb}}],
 {t, 0, 10, 0.01}]
```



可以看到，左行的波在遇到固定边界时被反射，反射波与左行入射行波之间相位差为 π（见右图 $x=0$ 处红蓝波形。）

这种反射波相对于入射波在相位上突变 π 的现象，物理上成为半波损失。

在 $x=0$ 处，反射波与入射波之和 $u(0,t)=0$。在时间足够长时，就只剩向右传播的波形。

思考：(1. 3) 式表明当 $x-a\,t<0$ 时，$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+a\,t)-\phi(a\,t-x)]$ 是否表明存在一左行波一右行波 ？

如果是，这与在时间足够长时 ，只剩下向右传播的波形是否矛盾 ？

2. 第二类齐次边条——偶延拓

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\,u_{xx} & x\ge 0\ （出现边界\ x=0，在\ x=0\ 需要边条） \\ u(x,0)=\phi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & \\ u_x(0,t)=0 & 相当于一端自由的半无限长细杆纵振动 \end{cases} \tag{1.4}$$

类似于第一类齐次边条，但这里要作偶延拓。

半无界 II 类齐次边条的延拓：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u_x(0,t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{延拓}} \begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} & -\infty < x < +\infty \\ U(x,0) = \Phi(x) \\ U_t(x,0) = \Psi(x) \\ U_x(0,t) = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

利用D'Alembert公式可得：

$$U(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-a\,t) + \Phi(x+a\,t)] + \frac{1}{2\,a}\int_{x-a\,t}^{x+a\,t} \Psi(\xi)\,d\xi$$

现要求在 $x = 0$ 时，$U_x(0,t) = 0$ 以满足 (1.4) 式中的第四行。

$$U_x(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi'(x-a\,t) + \Phi'(x+a\,t)] + \frac{1}{2\,a}[\Psi(x+a\,t) - \Psi(x-a\,t)]$$

$$U_x(0,t) = \frac{1}{2}[\Phi'(-a\,t) + \Phi'(a\,t)] + \frac{1}{2\,a}[\Psi(a\,t) - \Psi(-a\,t)],$$

显然，只要 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 为偶函数即可 （偶函数的导数为奇函数 ）。

因此，我们就确定了(1.5) 式的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & x \geq 0 \\ \phi(-x) & x < 0 \end{cases}, \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

因为把原来给定的在 $x \geq 0$ 区域的初始条件做偶函数延拓至 $-\infty < x < +\infty$ 区域，故称为偶延拓。

可以看到，左行的波在遇到固定边界时被反射，反射波与左行入射行波之间没有相位差，不存在半波损失。

试自己作动态图形理解。

3. 例题：非齐次边条

例 2. Dirichlet 非齐次边条

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \geq 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) \\ u(0,t) = f(t) \neq 0 \end{cases}$$

解：利用叠加原理：$u = v + w$，v 和 w 分别满足

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 u_{xx} & x \geq 0 \\ v(x,0) = 0, \\ v_t(x,0) = 0 \\ v(0,t) = f(t) \end{cases} \text{和} \begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} & x \geq 0 \\ w(x,0) = \phi(x), \\ w_t(x,0) = \psi(x) \\ w(0,t) = 0 \end{cases}$$
，则 $v + w$ 满足原定解问题

w 可通过奇延拓再利用 D'Alembert 公式 求解。如何求解 $v(x,t)$？ 因为解是唯一的，故可从物理上的考虑 。

(a) 从 v 的定解条件知：开始时，无初位移也无初速度 ，振动完全由 $x = 0$ 处的扰动 $f(t)$ 导致。

因而只能是向右传播的波 ：$v(x,t) = G(x - a\,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ 取第二种形式仅仅是为了求解方便 。

(b) 由边条，在 $x = 0$，$v(0,t) = f(t) = F(t)$ $\forall\, t \geq 0$, （在自变量大于 0 时 f 函数与 F 函数相同）

此处可看出右行波为何要取为 $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ 而非 $G(x - a\,t)$，思考：$F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ 是否也表示右行波 ？

因而 $v(x,t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$ $\forall\ t - \frac{x}{a} \geq 0$, 即：对 $t \geq \frac{x}{a}$, 有 $v(x,t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$

(c) 对任意一点 x，当 $t < \frac{x}{a}$ 时，开始于 $x = 0$ 的扰动尚未传到 ，该点位移为 0，

所以 ，对 $t < \frac{x}{a}$，有 $v(x,t) = 0$

综上：$v(x,t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a}\right), & t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a} \end{cases}$

写成：$v(x,t)=f\left(t-\frac{x}{a}\right)H\left(t-\frac{x}{a}\right)$, $H(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ —— Heaviside 阶跃函数

例 3. II 类非齐次边条 （Neumann 非齐次边条）

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2 u_{xx} & x\ge 0\\ u(x,0)=\phi(x), \\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u_x(0,t)=g(t)\neq 0 \end{cases}$$

解：利用叠加原理：$u=v+w$，v 和 w 分别满足

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2 v_{xx} & x\ge 0\\ v(x,0)=0, \\ v_t(x,0)=0 \\ v_x(0,t)=g(t) \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} w_{tt}=a^2 w_{xx} & x\ge 0\\ w(x,0)=\phi(x), \\ w_t(x,0)=\psi(x) \\ w_x(0,t)=0 \end{cases}$$ ，则 $v+w$ 满足原定解问题

w 可通过偶延拓再利用 D’Alembert 公式 求解。如何求解 $v(x,t)$? 仍从物理上的考虑 。

(a) 从 v 的定解条件知：开始时，无初位移也无初速度，振动完全由 $x=0$ 处的扰动 $f(t)$ 导致。

因而只能是向右传播的波 ：$v(x,t)=G\left(t-\frac{x}{a}\right)$

(b) 由边条，在 $x=0$，$v_x(0,t)=g(t)=-\frac{1}{a}G'(t)=g(t)\ \ \forall\, t\ge 0$,

$$G(t)=-a\int_0^t g(s)\,ds+G(0)$$

$$\Longrightarrow\quad v(x,t)=G\left(t-\frac{x}{a}\right)=-a\int_0^{t-x/a} g(s)\,ds+G(0)\qquad \text{for}\ \ t\ge\frac{x}{a}$$

(c) 对任意一点 x，当 $t<\frac{x}{a}$ 时，开始于 $x=0$ 的扰动尚未传到，该点位移为 0，

所以，对 $t<\frac{x}{a}$, 有 $v(x,t)=0$

综上：$$v(x,t)=G\left(t-\frac{x}{a}\right)=\begin{cases} -a\int_0^{t-x/a} g(s)\,ds+G(0)\ , & t\ge\frac{x}{a}\\ 0, & t<\frac{x}{a}\end{cases}$$

给定一时刻 t, 在 $x=a\,t$, 位移应连续：$v(a\,t-0,t)=v(a\,t+0,t)$ 代入上式得：$G(0)=0$

物理上，也可认为在 $x=a\,t$, 扰动刚刚传到，还没来得及产生位移，故 $v(a\,t,t)=0=G\left(t-\frac{a\,t}{a}\right)=G(0)$

向有界区域过渡

从以上讨论得知，初始扰动激发的振动传到半无界区域的端点时，会产生反射。

对一维有限体系，有两个边界。振动将在两个边界间来回反射，从而形成驻波解，而一维驻波的基本形式为：

$$X(x)\cos(\omega\,t+\phi)=X(x)\,T(t)$$

一般的一维驻波解应该是这种基本形式的叠加（线性组合）。

从以上分析可隐约看出，一维体系的解，很可能是这样一些二元函数的叠加

这些二元函数可以写成空间和时间两个一元函数之积。

$$u(x,t)=\sum_k u_k(x,t)=\sum_k X_k(x)\,T_k(t)$$

如何求 $u_k(x,t)$?

既然它可写成两个不同变量的函数之积，也就是可分离变量，那么就可以用分离变量法，求解 $X_k(x)$ 和 $T_k(t)$。

那么这样的设想是否会漏掉一些解？

从物理表述上看，是否会漏掉一些模式。

而用数学语言表述，就是：是否会有一些解 $u_k(x, t)$，不能表为分离变量的形式　$X_k(x)\,T_k(t)$？

如果会遗漏，那么分离变量法只是求出不完整的解，还应该设法找出其余的解。

幸亏，数学定理保证了解的唯一性，只要求出的解满足定解条件，就是唯一正确解。

这就是为什么我们要先在第九章讨论定解条件的原因。

还有一个小问题：即使每一种解均能表为 $X_k(x)\,T_k(t)$ 形式，

那么，求解过程是否把这种形式的解都求全了。用数学语言描述，就是：

一般的求解过程求得的一系列 $X_k(x)\,T_k(t)$ 形式的解函数是否构成完备基。

这个问些将在后面的章节予以讨论。

10.2 分离变量法初步

本节通过一些例题，介绍一维体系的分离变量法，本节的方法可直接推广到直角坐标下二维、三维的体系。

即使是一维体系的分离变量，还分几种情况：

1. 齐次方程、齐次边条（边条还分三类：　Dirichlet, Neumann, Robin 边条，即 I、II、III 类边条）

2. 齐次方程、非齐次边条

3. 非齐次方程、非齐次边条　（非齐次方程、齐次边条不单列，直接并入此类）

齐次方程、齐次边条

1. 两端固定弦的横振动（Dirichlet 齐次边条）

定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0 & 0 \le x \le l \quad \text{齐次方程} \\ u(0,\ t) = 0, \quad u(l,\ t) = 0 & \text{I 类齐次边条} \\ u(x,\ 0) = \phi(x), \quad u_t(x,\ 0) = \psi(x) & \text{初条 （Cauchy 广义边条， 开表面）} \end{cases}$$

分离变量法先求基本振动模式（分离变量形式的解），这些振动模式可表为：$u_k(x, t) = X_k(x)\,T_k(t)$

为简单起见，先略去标识模式的下标 k，以 $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ 代入泛定方程，得：

$$X(x)\,T''(t) - a^2\,X''(x)\,T(t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2\,T(t)}$$

等式左边为 x 的函数，右边为 t 的函数，二者相等，必为常数

故：$\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = -\lambda$ （取负号视为讨论方便 ）

$$\Longrightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda\,X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda\,a^2\,T(t) = 0 \end{cases} \quad \text{偏微分方程化为 两个常系数常微分方程}$$

由边界条件：$\begin{cases} u(0,\ t) = 0 \\ u(l,\ t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(0)\,T(t) = 0 \\ X(l)\,T(t) = 0 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$ 只有齐次边条，才能导出关于单变量函数 $X(x)$ 的边条

故：关于 $X(x)$，有：$\begin{cases} X''(x) + \lambda\,X(x) = 0 \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \end{cases}$

接着，讨论 λ 不同情况的解

若 $\lambda < 0$：令 $\lambda = -\gamma^2 \longrightarrow X(x) = A\,e^{\gamma x} + B\,e^{-\gamma x}$，由 $X(0) = 0,\ \ X(l) = 0$ 得 $A = B = 0$ 平庸解

若 $\lambda = 0$：$\longrightarrow X(x) = A\,x + B$，由 $X(0) = 0,\ \ X(l) = 0$ 得 $A = B = 0$ 仍旧是平庸解

故：$\lambda > 0$, 令 $\lambda = \gamma^2$, $\longrightarrow X(x) = A\cos\gamma\,x + B\sin\gamma\,x$，

$$\begin{cases} 由\ X(0)=0,\ 得：A=0, \\ 由\ X(l)=0,\ 得：B\sin\gamma\, l=0,\ 为避免平庸解，B\neq 0,\quad 故：\gamma_n=\dfrac{n\pi}{l} \end{cases}$$

从而：$X_n(x)=B_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\quad \lambda=\gamma_n^2=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2$

再看 $T(t)$：有：$T''(t)+\gamma_n^2 a^2\,T(t)=0 \quad\longrightarrow\quad T_n=C_n\cos\gamma_n a\,t+D_n\sin\gamma_n a\,t$

综合 $X(x)$ 和 $T(t)$：$u_n(x,t)=X_n(x)\,T_n(t)=[C_n\cos\gamma_n a\,t+D_n\sin\gamma_n a\,t]\sin\dfrac{n\pi}{l}x,\quad n=1,2,3,\ldots$

对任意正整数 n，$u_n(x,t)$ 均满足泛定方程和边界条件，因而，这些解的线性组合

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[C_n\cos\gamma_n a\,t+D_n\sin\gamma_n a\,t]\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 也满足泛定方程和边界条件。

最后一步是它应该满足初条。由初条确定 C_n 和 D_n

$\phi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x \longrightarrow C_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx$，其中利用了 $\int_0^l\sin\dfrac{m\pi}{l}x\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx=\dfrac{l}{2}\delta_{mn}$

$\psi(x)=u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n a\,D_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x \longrightarrow D_n=\dfrac{2}{\gamma_n a\,l}\int_0^l\psi(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx,$

每一个模式：$u_n(x,t)=A_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}a\,t+\delta_n\right)\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 的确都是驻波解。

$u_n(x,t)$ 模式有 $n+1$ 个节点，其本证角频率为：$\omega_n=\dfrac{n\pi}{l}a$

物理意义：两端固定的弦，给一扰动，可激发其一系列分立的本征模式的振动，这些本征模式有各自的本征频率。

弹吉他或拉小提琴时，弦振动的一系列本征频率中只有部分频率引起腔体共振，发出声音，其它频率不共振，声音弱。

调节弦的长度 l，可改变本征频率，从而在激发不同频率的腔体共振（腔体也有一系列本征频率），发出不同的音调及音色。

下面是一段对二十世纪最为优秀的小提琴家之一 Heifetz 的一段评述

小提琴的音准取决于演奏者手指按弦的位置是否准确，
半毫米之差音已经大不相同，
因此小提琴演奏中出现杂音、错音是再所难免的。
然而，这条定律在海菲兹身上却失去了作用。
海菲兹的演奏以高度的精确和完美作为其艺术特征。

2. Neumman齐次边条

定解问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0 & 0\le x\le l\quad 齐次方程 \\ u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0 & \text{II 类齐次边条} \\ u(x,0)=\phi(x) & 初条 \end{cases}$$

此定解问题相当于一长度为 l 的细杆，两端和侧面绝热，给定初温 $\phi(x)$，求杆温度分布 $u(x,t)$ 随时间变化。

分离变量，以 $u(x,t)=X(x)\,T(t)$ 代入泛定方程，得：

$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2\,T(t)}$ 左边为 x 的函数，右边为 t 的函数，二者相等，必为常数

故：$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T'(t)}{a^2\,T(t)}=-\lambda$（取负号视为讨论方便）$\longrightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T'(t)+\lambda a^2\,T(t)=0 \end{cases}$ 两个常系数常微分方程

由边界条件：$\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(l,t)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0)\,T(t)=0 \\ X'(l)\,T(t)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases}$ 只有齐次边条，才能导出关于 $X(x)$ 的边条

故：关于 $X(x)$，有：$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x)=A_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x,\quad \lambda=\gamma_n^2=\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,2,3,\ldots$

$\lambda=\gamma_n^2$ 代入 $T(t)$ 的方程：$T'(t)+\lambda a^2\,T(t)=0 \longrightarrow T(t)=B_n e^{-\gamma_n^2a^2t} \implies u_n(x,t)=A_n\cos\left(\dfrac{n\pi}{l}x\right)e^{-\gamma_n^2a^2t}$

$$u(x,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t},\quad \text{利用}\quad \int_0^l \cos\frac{m\,\pi}{l}\,x \cos\frac{n\,\pi}{l}\,x\,dx = \begin{cases} \dfrac{l}{2}\,\delta_{mn} & n \neq 0 \\ l & n = m = 0 \end{cases} \quad \text{及}$$

$$t = 0\text{时},\ u(x,\,0) = \phi(x) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) = \phi(x) \longrightarrow A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\cos\frac{n\,\pi}{l}\,x\,dx,\ \ n \neq 0,\ \ A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \phi(x)\,dx$$

$$\text{当}\ t \to \infty\ \text{时},\ \lim_{t\to\infty} e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t} = \delta_{n0} \longrightarrow u(x,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{l}\,x\right) e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t} = A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \phi(x)\,dx,$$

物理意义：时间足够长时，杆处处温度相等且等于平均温度 。

3. Dirichlet 与 Neumman 混合齐次边条

对一维振动或扩散问题，分离变量后，空间函数 $X(x)$ 总满足微分方程：$X''(x) + \lambda\,X(x) = 0$，对应于不同的齐次边条，可得：

$$(1)\ \begin{cases} u(0,\,t) = 0 \\ u(l,\,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x) = \sin\frac{n\,\pi}{l}\,x,\quad \gamma_n = \frac{n\,\pi}{l},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$(2)\ \begin{cases} u(0,\,t) = 0 \\ u_x(l,\,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x) = \sin\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l}\,x,\quad \gamma_n = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$(3)\ \begin{cases} u_x(0,\,t) = 0 \\ u(l,\,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x) = \cos\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l}\,x,\quad \gamma_n = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{l},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

$$(4)\ \begin{cases} u_x(0,\,t) = 0 \\ u_x(l,\,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \longrightarrow X_n(x) = \cos\frac{n\,\pi}{l}\,x,\quad \gamma_n = \frac{n\,\pi}{l},\quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

上表中的 γ_n 称为本征值，所对应的 $X_n(x)$ 称为本征函数。边条不同，本征值与本征函数可均不同。

4. Robin 齐次边条

长 l 的杆侧面绝热，$x = 0$ 端保持 0 度，$x = l$ 端与温度为 0 的环境按牛顿冷却定律热交换，杆初温为 $f(x)$，求杆温度 $u(x,\,t)$。

定解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2\,u_{xx} = 0 & 0 \le x \le l\quad \text{齐次方程} \\ u(0,\,t) = 0 & \text{I 类齐次边条} \\ u_x(l,\,t) + h\,u(l,\,t) = 0 & \text{III 类齐次边条},\ \ h = K/k,\ \text{来自：}-k\,u_x(l,\,t) = K[u(l,\,t) - 0] \\ u(x,\,0) = f(x) & \text{初条} \end{cases}$$

分离变量，以 $u(x,\,t) = X(x)\,T(t)$ 代入泛定方程，得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2\,T(t)}\quad \text{左边为 } x \text{ 的函数，右边为 } t \text{ 的函数，二者相等，必为常数}$$

$$\text{故：}\ \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2\,T(t)} = -\lambda\quad \text{（取负号视为讨论方便）} \longrightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda\,X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda\,a^2\,T(t) = 0 \end{cases}\quad \text{两个常系数常微分方程}$$

$$\text{由边界条件：}\begin{cases} u(0,\,t) = 0 \\ u_x(l,\,t) + h\,u(l,\,t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(0)\,T(t) = 0 \\ [X'(l) + h\,X(l)]\,T(t) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(l) + h\,X(l) = 0 \end{cases}$$

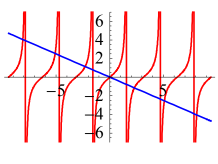
注意：依旧是只有齐次边条才能化为空间函数 $X(x)$ 的边条。

故：关于 $X(x)$，有：$\begin{cases} X''(x) + \lambda\,X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ \ X'(l) + h\,X(l) = 0 \end{cases}$，同理可导出，只有 $\lambda > 0$，才有非平庸解 。

故设：$\lambda = \gamma^2 \longrightarrow X(x) = A\cos\gamma\,x + B\sin\gamma\,x$，因 $X(0) = 0 \longrightarrow A = 0 \longrightarrow X(x) = B\sin\gamma\,x$

应用 III 类齐次边条：$X'(l) + h\,X(l) = 0 \longrightarrow \gamma\cos\gamma\,l + h\sin\gamma\,l = 0 \longrightarrow \mathrm{tg}\,\gamma\,l = -\gamma/h$ ——关于 γ 的超越方程

该超越方程有许多解 γ_n，从而 $\lambda = \gamma_n^2 \longrightarrow \begin{cases} X_n(x) = \sin\gamma_n\,x \\ T_n(t) = e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t} \end{cases}$



红色：$\mathrm{tg}\,\gamma\,l$
蓝色：$-\gamma/h$

$u_n(x,\,t) = \sin\gamma_n\,x\ e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t}$，$\gamma_n$ 是超越方程 $\mathrm{tg}\,\gamma\,l = -\gamma/h$ 的解，如上图红蓝线交点

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\gamma_n\,x\ e^{-\gamma_n^2\,a^2\,t}\qquad \text{由初条}\ \ u(x,\,0) = f(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\gamma_n\,x = f(x),\quad \text{如何求 } B_n\,?$$

利用：$\int_0^l \sin(\gamma_n x) \sin(\gamma_m x)\, dx = \eta_m \delta_{mn}$, —— 不同本正值对应的本征函数正交 (1.6)

Sturm–Liouville 微分方程理论证明了这一性质。证明过程甚至不需知道 γ_n 的值。

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\gamma_n x = f(x)$ 两边同乘以 $\sin(\gamma_m x)$ 并对 x 积分，即得：$B_m = \frac{1}{\eta_m} \int_0^l f(x) \sin(\gamma_m x)\, dx$

5. 小结

- 分离变量法需要齐次边条，才能将 $u(x, t)$ 的边界条件化为 $X(x)$ 在边界所满足的条件，进而确定分离变量引入的常数 λ；
- 利用非平庸解确定分离变量常数 λ 的过程称为求解微分方程的本征值，确定本征值后，所求得的函数 $X_n(x)$ 称本征函数；
- 在齐次边界条件下，对应于不同本征值的本征函数正交。

  (1.6) 式就是对应于不同本征值的本征函数正交的一种具体表达式。

  这种正交关系由 Sturm – Liouville 在一般情况下给予了证明（详见以后章节）。
- 分离变量法其实是将偏微分方程的解写成本征函数的线性组合，也即以本征函数为基函数展开，展开系数由初条确定。

  注意本征函数由边界条件确定，初始条件仅用于确定展开系数。

齐次方程、非齐次边条

长 l 的杆侧面绝热，$x = 0$ 端保持 u_0，$x = l$ 端有热流强度 q_0 的热量流入，杆的初温为 u_0，求杆温度分布随时间的变化 $u(x, t)$。

定解问题：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & 0 \le x \le l \quad \text{齐次方程} \\ u(0, t) = u_0 & \text{I 类非齐次边条} \\ u_x(l, t) = h = q_0/k & \text{II 类非齐次边条，来自：} \vec{q} = q_0(-\vec{e}_x) = -k\nabla u \xrightarrow{\text{两边同点乘 } \vec{e}_x} q_0 = k\, u_x(l, t) \\ u(x, 0) = u_0 & \text{初条} \end{cases}$$

注意此处是非齐次边条。分离变量，以 $u(x, t) = X(x)\, T(t)$ 代入泛定方程，得：

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2\, T(t)} = -\lambda \quad \text{仍有} \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + \lambda a^2\, T(t) = 0 \end{cases}$$

然而，边界条件：$\begin{cases} u(0, t) = u_0 \\ u_x(l, t) = h \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(0)\, T(t) = u_0 \\ X'(l)\, T(t) = h \end{cases}$

无法导出 $X(x)$ 函数在 $\begin{cases} x = 0 \\ x = l \end{cases}$ 的条件，即：无法导出 $\begin{cases} X(0) = 0 \text{ 或其它常数} \\ X'(l) = 0 \text{ 或其它常数} \end{cases}$

为此，要将边条齐次化，与行波法中对初条齐次化类似，利用线性方程的叠加原理：$u = v + w$，

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0, t) = u_0 \\ v_x(l, t) = h \\ v(x, 0) = \text{未定} \end{cases} \qquad \begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0, t) = 0 \\ w_x(l, t) = 0 \\ w(x, 0) = u_0 - v(x, 0) \end{cases} \qquad \text{可验证 } v + w \text{ 满足 } u \text{ 的定解条件}$$

设计这样的 v 可得到满足齐次边条的 w，因而 w 容易求解。但如何求解 v?

注意 v 满足的条件并不构成定解条件，因为初条不确定。

也正因为不构成定解问题，才有自由度，可试着猜解。

猜：$v = A\,x + B$，显然，v 满足泛定方程，由 v 的边条确定出：$A = h$，$B = u_0$，$v = h\,x + u_0$

故：w 的定解条件为：$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,\, t) = 0 \\ w_x(l,\, t) = 0 \\ w(x,\, 0) = u_0 - v(x,\, 0) = -h\, x \end{cases}$

齐次边条 问题：$\begin{cases} w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \sin \gamma_n\, x\, e^{-\gamma_n^2 a^2 t}, \;\; \gamma_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{\pi}{l} \\ \text{由初条及 } \sin\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \dfrac{\pi\, x}{l} \text{ 的正交特性确定系数 } A_n \end{cases}$

再来看杆强迫纵振动问题。

定解问题：$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & 0 \le x \le l \quad \text{齐次方程} \\ u(0,\, t) = 0 & \text{I 类齐次边条 （齐次 Dirichlet 边条）} \\ u(l,\, t) = A_0 \sin \omega\, t & \text{I 类非齐次边条 （非齐次 Dirichlet 边条） （一端强迫振动 ）} \\ u(x,\, 0) = 0, \;\; u_t(x,\, 0) = 0 & \text{齐次初条 ， 但齐次初条对求解偏微分方程帮助不大 。} \end{cases}$

边条齐次化： $u = v + w$。

需要：v 与 w 都满足相同的泛定方程 ， v 满足 u 的边条， 使得 w 退化为齐次边条。

$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,\, t) = ? \\ v(l,\, t) = ? \\ v(x,\, 0) = \text{未定},\;\; v_t(x,\, 0) = \text{未定} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,\, t) = 0 \\ w(l,\, t) = 0 \\ w(x,\, 0) = -v(x,\, 0), \;\; w_t(x,\, 0) = -v_t(x,\, 0) \end{cases}$

物理分析： 想象一根细杆， 一端固定， 另一端以角频率 ω 振动

时间足够长时， 可以猜想， 整根细杆都以角频率 ω 振动。

因此， 令：$v = A(x) \sin \omega\, t$， 代入泛定方程即得 ：

$$-\omega^2 A(x) - a^2 A''(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad A(x) = A_1 \sin \frac{\omega\, x}{a} + B_1 \cos \frac{\omega\, x}{a}$$

再令：$v(0,\, t) = A(0) \sin \omega\, t = 0, \;\; v(l,\, t) = A(l) \sin \omega \mathrm{t} = A_0 \sin \omega\, t$

$$\Longrightarrow \quad A(x) = A_0 \sin \frac{\omega\, x}{a} \Big/ \sin \frac{\omega\, l}{a}$$

故：$\boxed{v\,(x,\, t) = A_0 \dfrac{\sin \frac{\omega\, x}{a}}{\sin \frac{\omega\, l}{a}} \sin \omega\, t} \quad \Longrightarrow \quad v(l,\, t) = A_0 \sin \omega\, t$

w 满足：$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,\, t) = 0 \\ w\,(l,\, t) = A_0 \sin \omega\, t - v(l,\, t) = 0 \\ w(x,\, 0) = -v(x,\, 0) = 0 \\ w_t(x,\, 0) = -v_t(x,\, 0) = -\omega\, A_0 \sin \dfrac{\omega\, x}{a} \Big/ \sin \dfrac{\omega\, l}{a} \end{cases}$ $\qquad$ 齐次方程、齐次边条

故可直接写出 ： $w(x,\, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin \dfrac{n\, \pi\, x}{l} \sin \dfrac{n\, \pi\, a\, t}{l}$ $\quad$ 已利用了 ： $w(x,\, 0) = 0$，

再利用 $w_t(x,\, 0) = -\omega\, A_0 \dfrac{\sin \frac{\omega\, x}{a}}{\sin \frac{\omega\, l}{a}}$ $\quad$ 及

$$\int_0^l \sin \frac{\omega\, x}{a} \sin \frac{n\, \pi\, x}{l} = -\frac{(-1)^n a^2\, n\, \pi\, l}{a^2 n^2 \pi^2 - \omega^2 l^2} \sin\left(\frac{\omega\, l}{a}\right) \quad \text{可得}$$

$\boxed{w(x,\, t) = -\dfrac{2\, \omega\, A_0}{a\, l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\, \pi}{l}\right)^2} \sin \dfrac{n\, \pi\, x}{l} \sin \dfrac{n\, \pi\, a\, t}{l}}$ $\qquad$ $\boxed{v\,(x,\, t) = A_0 \dfrac{\sin \frac{\omega\, x}{a}}{\sin \frac{\omega\, l}{a}} \sin \omega\, t}$

$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$

```
Clear["Gloabal`*"]
t = Integrate[Sin[ω x/a] Sin[n π x/l], {x, 0, l}];
Simplify[t, n ∈ Integers]
```

```
-((-1)^n a^2 l n π Sin[l ω/a])/(a^2 n^2 π^2 - l^2 ω^2)
```

物理意义：

- $v(x, t)$ 为外力导致的振动，其振动频率与外界激发的频率相同，是稳恒振动。

  由于初位移与初速度均为 0：$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$,

  从 $t = 0$ 时开始施加外力，使得 $x = l$ 端简谐振动：$A_0 \sin \omega t$

  必然同时也激发起杆的所有本征模式的振动，这些本征振动由 $w(x, t)$ 描述，振动频率为 $\omega_n = \frac{n \pi a}{l}$

  在存在阻尼的情况下，这些本振振动会衰减，最后只剩下频率 ω 与激发频率相同的稳恒振动项 $v(x, t)$

  这个包含杆的各种体系本征模式的振动过程（本征模式衰减的过程）称为瞬态过程 (transient)。

- 由 $w(x, t)$ 的表达式可见，若果外界刺激频率与体系的某本征频率相同，

  即：$\omega = \omega_m = \frac{m \pi a}{l}$, 这时对应的本征振动振幅将很大

  （公式中的分母为 0 是忽略阻尼的理想情况，在计及阻尼时分母不为 0）。这时称为共振。

  若外界激发很快消失，其他非共振的本征模式振幅小，会很快衰减，只剩下振幅较大的共振模式。

  当然，杆纵振动的本征模式及本征频率由杆的长度和材料特性决定。

- 作为练习，试用分离变量法分析存在阻尼时的强迫振动。

  即：将本例的泛定方程改为：$u_{tt} + \beta u_t - a^2 u_{xx} = 0$, 其中 $\beta > 0$ 表征阻尼。

从以上两例可看出，对非齐次边条，需先做边条齐次化才能应用分离变量法，必须构造 $v(x, t)$，使得它既满足同样的泛定方程，又满足原来的非齐次边条。这一过程靠“猜”、经验或物理分析，尚无普适方法。

齐次边条、非齐次方程

两端固定弦的强迫振动

定解问题：
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t) & 0 \le x \le l \quad \text{非齐次方程} \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 & \text{I 类齐次边条} \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) & \end{cases}$$

现在方程为非齐次，先看齐次方程。

I 类齐次边条：$X_n(x) = \sin \frac{n \pi}{l} x$ 称为 Dirichlet 齐次边条的本征函数，$\lambda_n = \left(\frac{n \pi}{l}\right)^2$ 称为本征值。

换一种理解：

对齐次方程：$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$,

我们设 $u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = T_n(t) \sin \frac{n \pi}{l} x$ 代入齐次泛定方程：$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$

得到关于 $T_n(t)$ 的常微分方程：$T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=0$，进一步解得 $T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi a t}{l}\right)$。

$u(x,t)=\sum_n u_n(x,t)=\sum_n T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$，再由初条得系数：$A_n$ 与 B_n

对非齐次方程，直接设 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$，

做法的本质都在于将方程的解写成 齐次方程、齐次边条的本征函数的线性组合 。

因此，令：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 实际上是假定非齐次方程的解 也可以展开为齐次方程、齐次边条的本征函数

能否如此行，就目前的理解，当然要视最后能否得到满足所有定解条件的解 （解的唯一性）。

从数学观点来看，就需要证明这些本征函数是完备的 。—— 这一点将在 Sturm – Liouville 本征值问题中介绍 。

因此，将非齐次方程的解展开为齐次方程的本征函数的方法也称为 本征函数法。

以本征函数展开代入原泛定方程得 ：$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left[T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\right]}_{\text{对齐次方程相当于这部分为0}}\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$

对非齐次方程，$f(x,t)\neq 0$, 紫色部分为多少 ?

因为本征函数是正交的，故上一等式两边同乘以 $\sin\frac{m\pi x}{l}$ 在对 x 积分，

并利用：$\int_0^l \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{l}{2}\delta_{mn}$ 可得：

$$T_m''(t)+a^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 T_m(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx=f_m(t),$$

故，下一步就是求解 非齐次常微分方程：$T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t)$

可看出若泛定偏方程是齐次的，则有 $f_n(t)=0$，此方程易解：$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a t}{l}+B_n\sin\frac{n\pi a t}{l}$

先确定 求解非齐次常微分方程 所需的条件，可由 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 的初条得到：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x)\ \longrightarrow\ T_n(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\phi_n$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)\ \longrightarrow\ T_n'(0)=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\psi_n$$

所以关于 $T_n(t)$，有：$\begin{cases}T_n''(t)+a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t)\\ T_n(0)=\phi_n,\quad T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$ 这是标准的二阶线性常系数常微分方程问题 ，应该可以解出 。

利用 常数变易法 可得：

$$y_3=y_2\int\frac{f(x)\,y_1(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx-y_1\int\frac{f(x)\,y_2(x)}{W[y_1,y_2]}\,dx,$$

y_1 和 y_2 为齐次方程的两线性无关解 ，$W[y_1,y_2]$ 为Wronskian行列式 。

$y_1=\cos\frac{n\pi a t}{l},\quad y_2=\sin\frac{n\pi a t}{l},\quad W[y_1,y_2]=\frac{n\pi a}{l}$ 可导出

$$\begin{aligned}T_n(t)&=\frac{l}{n\pi a}\left[\sin\frac{n\pi a t}{l}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{n\pi a\tau}{l}\,d\tau-\cos\frac{n\pi a t}{l}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\tau}{l}\,d\tau\right]+c_1\cos\frac{n\pi a t}{l}+c_2\sin\frac{n\pi a t}{l}\\&=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau+c_1\cos\frac{n\pi a t}{l}+c_2\sin\frac{n\pi a t}{l}\end{aligned}$$

利用 $T_n(0)=\phi_n$ 与 $T_n'(0)=\psi_n$ 得：$c_1=\phi_n$，　$c_2=\dfrac{l\,\psi_n}{n\,\pi\,a}$,

小结：求解非齐次方程的本征函数法。

- 先解齐次方程，得本征函数，把非齐次方程的解表示为本征函数 $X_n(x)$ 的线性组合，展开系数设为：$T_n(t)$

  $$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\,X_n(x)$$

- 展开式带入原偏微分方程，利用本证函数 $X_n(x)$ 的正交特性得到并求解关于 $T_n(t)$ 的非齐次方程
- 利用常数变易法求解关于 $T_n(t)$ 的二阶线性常系数非齐次微分方程，更简单地，也可用积分变换法求解之。

例：求解下列定解问题。

定解问题：$\begin{cases} u_t-a^2\,u_{xx}=A\sin\omega\,t & 0\le x\le l \\ u_x(0,\ t)=0,\quad u_x(l,\ t)=0 & \text{II 类齐次边条} \\ u(x,\ 0)=B \end{cases}$

解：Neumann 齐次边条：$X_n(x)=\cos\dfrac{n\,\pi}{l}x$,　$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

本征函数展开：$u(x,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\dfrac{n\,\pi}{l}x$　代入原泛定方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n'(t)+a^2\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2T_n(t)\right]\cos\frac{n\,\pi}{l}x=A\sin\omega\,t,\quad \text{利用}\ \int_0^l\cos\frac{m\,\pi}{l}x\cos\frac{n\,\pi}{l}x\,dx=\begin{cases}\frac{l}{2}\delta_{mn} & n\neq0\\ l & n=m=0\end{cases}\quad\text{得}$$

$$T_n'(t)+a^2\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2T_n(t)\ =A\sin\omega\,t\,\delta_{n\,0},$$

由初条 $u(x,\ 0)=B$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\dfrac{n\,\pi}{l}x\ =B\ \xrightarrow{\text{再次利用本证函数正交得}}\ T_n(0)=B\,\delta_{n\,0}$

由关于 $T_n(t)$ 的一阶常微分方程及 $T_n(0)$ 可解得：$T_0(t)=-\dfrac{A\cos\omega\,t}{\omega}+B+\dfrac{A}{\omega}$

从而：$u(x,\ t)=T_0(t)=\dfrac{A}{\omega}(1-\ \cos\omega\,t)+B$

非齐次边条、非齐次方程

对边条、方程皆为非齐次。我们一般先齐次化边条，一旦能将边条齐次化，即使方程是非齐次的，也能用本征函数法求解。

我们仅以一些简单实例作一些初浅的讨论。设定解问题如下（Dirichlet　边条）：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\,u_{xx}=f(x,\ t) & 0\le x\le l\\ u(0,\ t)=u_1(t),\quad u(l,\ t)=u_2(t)\\ u(x,\ 0)=\phi(x),\quad u_t(x,\ 0)=\psi(x)\end{cases}\tag{1.7}$$

通常的做法是：

(1) 令：$u(x,\ t)=v(x,\ t)+w(x,\ t)$ 使得 $v(x,\ t)$ 满足 $u(x,\ t)$ 的边界条件：

$v(0,\ t)=u_1(t)$,　$v(l,\ t)=u_2(t)$，则 $w(x,\ t)$ 就满足齐次边条 。

为此，常设 $v(x,\ t)=A(t)\,x+\ B(t)\ \longrightarrow\ v(x,\ t)=\dfrac{x}{l}[u_2(t)-u_1(t)]+u_1(t)$，从而 $w(0,\ t)=0,\ \ w(l,\ t)=0$

(2) 但这样假设的 $v(x,\ t)$ 常常不满足 $u(x,\ t)$ 的泛定方程，

即：$v_{tt}-a^2\,v_{xx}\neq0$，从而为保证 $u(x,\ t)\ =w+v$ 仍满足原泛定方程

$w(x,\ t)$ 应满足：$w_{tt}-a^2\,w_{xx}=f(x,\ t)-v_{tt}+a^2\,v_{xx}$，这样即使原来 $u(x,\ t)$ 满足齐次方程，$w(x,\ t)$ 也满足非齐次方程 。

(3) 相应的，$w(x,\ t)$ 满足的初始条件也与 $u(x,\ t)$ 不同

因此，如简单地假设

$$v(x,\ t) = A(t)\,x + B(t) \ \longrightarrow\ v(x,\ t) = \frac{x}{l}[u_2(t) - u_1(t)] + u_1(t)$$

原求 $u(x,\ t)$ 的定解问题 (1.7) 就化为求解如下的 $w(x,\ t)$ 的定解问题

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,\ t) - v_{tt} + a^2 v_{xx} & 0 \le x \le l \\ w(0,\ t) = 0, \quad w(l,\ t) = 0 \\ w(x,\ 0) = \phi(x) - v(x,\ 0),\ w_t(x,\ 0) = \psi(x) - v_t(x,\ 0) \end{cases} \tag{1.8}$$

原来的齐次方程可能变为非齐次方程，但数学上，非齐次方程的求解问题已经解决了，尽管会增加许多麻烦。
对较为简单的问题，才能做到在齐次化边条的同时，保持泛定方程的齐次性不变。

例：求解下列定解问题。

定解问题：
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = A\, e^{-\alpha x} & 0 \le x \le l \\ u(0,\ t) = 0, \quad u(l,\ t) = 0 \\ u(x,\ 0) = B \end{cases}$$

解：边条已是齐次，可直接利用本征函数法求解。但也可通过一些变换，使得方程齐次化，同时边条也保持齐次。

$u = v + w$，注意边条与时间无关，可设 v 与时间无关。设 v 满足非齐次泛定方程及齐次边条

$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = A\, e^{-\alpha x} \\ v(0,\ t) = 0,\ \ v(l,\ t) = 0 \end{cases}$ 这样在使得 $w(x,\ t)$ 的方程齐次化的同时，又不破坏 $w(x,\ t)$ 的边条齐次特性

关于 v 的条件不是定解条件（这样才能有猜的自由度）。

令：$v(x,\ t) = C\, e^{-\alpha x} + D$ 代入微分方程 $\longrightarrow\ C = -\dfrac{A}{\alpha^2 a^2}$

但若设 $v(x,\ t) = -\dfrac{A}{\alpha^2 a^2} e^{-\alpha x} + D$，仅含一个参数，不可能同时满足 $v(x,\ t)$ 的两个边条。为此，再增加一个参数，

令：$v(x,\ t) = C\, e^{-\alpha x} + D_1 x + D_2$，加上这一线性项并不影响 v 满足的微分方程（对 x 是二阶偏导 v_{xx}）

但多了一个参数，可满足 v 的两个边条。

因此，由 v 的微分方程和两个边条确定：$v(x,\ t) = -\dfrac{A}{\alpha^2 a^2} e^{-\alpha x} - \dfrac{A\left(1 - e^{-\alpha l}\right)}{a^2 \alpha^2 l} x + \dfrac{A}{\alpha^2 a^2}$

这样“设计”出来的 v 可以使得 w 满足齐次方程并且仍满足齐次边条，但初条会变。

即：$w(x,\ t)$ 满足：
$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 & 0 \le x \le l \\ w(0,\ t) = 0, \quad w(l,\ t) = 0 \\ w(x,\ 0) = B - v(x,\ 0) \end{cases}$$
齐次方程、齐次边条，容易求解

例：求解下列定解问题。

定解问题：
$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = A & 0 \le x \le l \\ u(0,\ t) = 0, \quad u(l,\ t) = B \\ u(x,\ 0) = 0, \quad u_t(x,\ 0) = 0 \end{cases}$$

解：简单的非齐次方程、非齐次边条，令 $u = v + w$

要求 v 满足：$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = A \\ v(0,\ t) = 0,\ \ v(l,\ t) = B \end{cases}$

设：$v = c_2 x^2 + c_1 x + c_0 \ \longrightarrow\ \begin{cases} c_2 = -A/2\,a^2 \\ c_1 = \left(B + A\,l/2\,a^2\right)/l \\ c_0 = 0 \end{cases}$

$w(x,\ t)$ 满足：
$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,\ t) = 0, \quad w(l,\ t) = 0 \\ w(x,\ 0) = -v(x,\ 0),\ \ w_t(x,\ 0) = v_t(x,\ 0) = 0 \end{cases}$$
齐次方程、齐次边条，容易求解

以上例题均局限于边界条件与时间无关，对这类问题，尚可以找出一个 $v(x,\ t)$（常设为不含时），

使得 $w(x, t) = u(x, t) + v(x, t)$ 的定解条件同时具有齐次方程与齐次边条。

若给定问题的边界条件也是时间的函数，要"凑"这样一个 $v(x, t)$，

使得 w 满足齐次方程与齐次边条，但未必都能做得到。

不过，正如前面所讲的，我们总可以把边条齐次化，即使方程变为非齐次方程，仍可以用本征函数法解之。

因此，这个问题，在数学上属于已经完全解决的问题。有标准的思路可循。

高维体系的分离变量

例：边长为 b 的方形膜，边界固定，膜振动方程如下，解膜振动的本征频率。

$$u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \qquad 0 < x < b, \quad 0 < y < b$$

解：高维体系的分离变量法 ：$u(x, y, t) = X(x)\, Y(y)\, T(t)$ 代入方程得

$$X\, Y\, T'' - a^2\, X''\, Y\, T - a^2\, X\, Y''\, T = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{T''}{a^2\, T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}$$

上一个等式左边为 t 的函数，右边第一项为 x 的函数，第二项为 y 的函数，要相等，均应为常数

$$\frac{X''}{X} = \mu, \quad \frac{Y''}{Y} = \nu, \quad \frac{T''}{a^2\, T} = \mu + \nu$$

方形膜边界固定，即：$X(0) = X(b) = 0 \quad \longrightarrow \quad X_m = \sin \frac{m\, \pi}{b} x, \quad \mu = \left(\frac{m\, \pi}{b}\right)^2$

类似地，$Y(0) = Y(b) = 0 \quad \longrightarrow \quad Y_n = \sin \frac{n\, \pi}{b} x, \quad \nu = \left(\frac{n\, \pi}{b}\right)^2$

$$\frac{T''}{a^2\, T} = \mu + \nu \quad \longrightarrow \quad T_{mn}(t) = A_{mn} \cos \omega_{mn}\, t + B_{mn} \sin \omega_{mn}\, t, \quad \omega_{mn}^2 = \left(\frac{a\, m\, \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{a\, n\, \pi}{b}\right)^2$$

本征角频率：$\omega_{mn} = \frac{\pi\, a}{b} \left(m^2 + n^2\right)^{1/2}$，　本征频率 $f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\, \pi} = \frac{a}{2\, b} \left(m^2 + n^2\right)^{1/2}$