

## 教案讨论

### Bose-Einstein 凝结

#### 内容:

1. 凝结
2. 理论
3. 实验

#### 要点:

1. 物理上, 说明产生凝结的原因是:
  - (1) 波粒二象性引起的聚集效应;
  - (2) 低能状态的稀少。
2. 数学上, 分析“相对粒子数”和化学势随温度的变化。
3. 方法上, 用图形帮助说明公式。

## 1. 凝结

### 1.1 热力学极限

在边长为  $L$  的立方容器 (体积  $V=L^3$ ) 中, 装有  $N$  个粒子, 密度为  $\rho = \frac{N}{V}$ .

无外场作用时, 空间分析均匀,  $\rho$  是常数. 对宏观体系,  $N$  极大,  $N \sim 10^{23}$ , 可取热力学极限:  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , 但保持密度  $\rho$  不变. 见图 1.1.

粒子的动量为  $\mathbf{p}$ , 自由粒子的动能为  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$ .

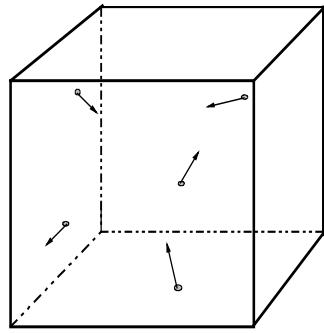


图 1.1

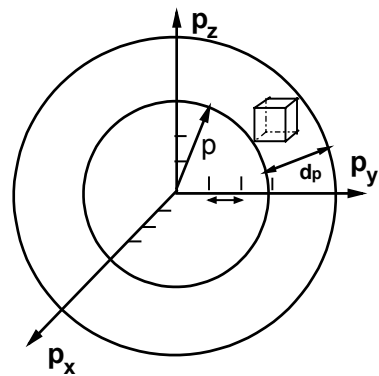


图 1.2

### 1.2 动量空间

粒子的状态由动量  $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$  表述. 在动量空间中, 每个状态对应于一点. 见图 1.2.

波粒二象性要求动量量子化:

$$p_i = n_i \frac{h}{L}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

能量最低的状态是  $\mathbf{p} = 0$ , 零动量是基态. 动量间隔为

$$\Delta p_i = \frac{h}{L}, \quad L \rightarrow \infty. \quad (1.2)$$

对三维体系, 动量空间中, 每个状态占据的体积是

$$\Delta v = \left(\frac{h}{L}\right)^3 = \frac{h^3}{V}. \quad (1.3)$$

由图 1.2 可知, 在动量空间中, 厚度为  $d$  的球壳层中的状态数目是

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{\Delta v} = \frac{4\pi p^2 dp}{(h/L)^3}, \quad (1.4)$$

所以，动量空间的态密度是

$$D(p) = \frac{dn}{dp} = \frac{4\pi p^2 V}{h^3}. \quad (1.5)$$

无外场时，粒子在坐标空间中的分布是均匀的。但是，在动量空间中，因为  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$ ，动量大的粒子具有较高能量。在温度为  $T$  的平衡态下，能量愈高，出现的几率愈小。因而，在动量空间中，粒子数按动量的分布  $a_p$  是不均匀的，动量愈大，粒子数  $a_p$  愈少。

### 1.3 经典分布

平衡态的统计理论已求得分布几率，对于经典统计（Boltzmann 分布），

$$a_p = A e^{-\varepsilon(\mathbf{p})/kT}, \quad (1.6)$$

其中  $A$  是归一化常数，由总粒子数  $N$  确定：

$$\sum_p a_p = N. \quad (1.7)$$

如果将  $A$  用另一个参数  $\mu$  表示成  $A \equiv e^{\mu/kT}$ ，

则(1.6)式可写成

$$a_p = e^{-[\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu]/kT}. \quad (1.8)$$

$\mu$  称为“化学势”，也由(1.7)式确定，此时可写成

$$e^{\mu/kT} \sum_p e^{-\varepsilon(\mathbf{p})/kT} = N. \quad (1.9)$$

将对  $\mathbf{p}$  的求和变为积分，即  $\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int d\mathbf{p}$ ，(1.9)式变为  $e^{\mu/kT} \int e^{-\varepsilon(\mathbf{p})/kT} \frac{V d\mathbf{p}}{h^3} = N$ ，或

$$e^{\mu/kT} = \frac{h^3 \rho}{\int e^{-\varepsilon(\mathbf{p})/kT} d\mathbf{p}}. \quad (1.10)$$

这说明  $\mu$  是温度  $T$  和密度  $\rho$  的函数，与  $N$  和  $V$  无直接关系。在热力学极限过程中，

$\mu$  不变。

由此可知, 虽然  $N \rightarrow \infty$ , 但每个状态上的粒子数  $a_p$  并不变. 这是因为, 在热力学极限下,  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Delta p = h/L$  减少, 状态数目在增加, 这导致  $N \rightarrow \infty$ .

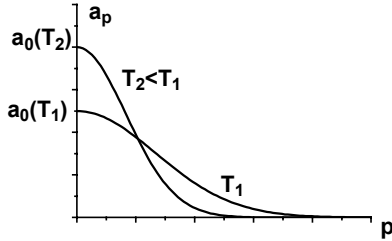


图 1.3

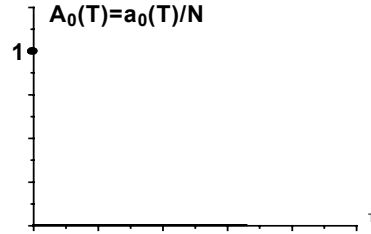


图 1.4

经典分布(1.8)式如图 1.3 所示, 具有下述特点:

- (1) 在任何温度  $T$  ( $T > 0 \text{ K}$ ) 下, 任何状态  $p$  上的粒子数目  $a_p$  都是有限的, 具有零动量的粒子数  $a_0 = e^{\mu/kT}$  也是有限的.
- (2) 当温度固定时, 取热力学极限, 即在保持密度  $\rho$  不变的条件下 (此时  $\mu$  不会改变), 让  $N \rightarrow \infty$ . 由于  $\mu$  不变,  $a_0$  则不变. 相对于总粒子数  $N$ , 零动量上粒子数的比例为  $A_0 \equiv a_0/N$ , 可称为“相对粒子数”. 因此在热力学极限下, 相对粒子数

$$A_0 = \frac{a_0}{N} \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

- (3) 当温度降低时, 比较图 1.3 中的两条曲线 ( $T_2 < T_1$ ), 粒子的分布向小动量区域集中,  $a_0$  愈来愈大, 但永远是有限的数目. 因而无论温度  $T$  ( $T > 0 \text{ K}$ ) 如何降低, 零动量上的相对粒子数  $A_0$  总是零. 此特征如图 1.4 所示.

### 结论:

对于经典统计, 当温度变化时, 零动量上相对粒子数  $A_0(T)$  总是零, 没有变化, 因而无相变.

只有当  $T \rightarrow 0$  时, 经典粒子全部停止运动, 此时  $A_0(0) = 1$ . 相变只在绝对零度上发生, 无实际意义.

### 1.4 化学势 $\mu$ 随温度的变化 (经典统计)

$\mu$  由总粒子数为  $N$  的条件(1.9)式确定. 此式可写成

$$\sum_p e^{-[\varepsilon(p)-\mu]/kT} = N. \quad (1.12)$$

根据此式, 不难证明, 当  $T$  降低时,  $\mu$  将增加: 观察(1.12)式左边的指数  $[\varepsilon(p)-\mu]/kT$ , 当  $T$  降低时, 分母变小. 为了使求和保持为  $N$ , 分子  $\varepsilon(p)-\mu$  也得相应地变小, 由于  $\varepsilon(p)$  不随  $T$  而变, 只能是  $\mu$  变大.

设  $\mu = 0$  对应的温度为  $T_0$ , 它由下式确定:

$$\sum_p e^{-\varepsilon(p)/kT_0} = N. \quad (1.13)$$

因此,  $\mu(T)$  随  $T$  的变化如图 1.5 所示.

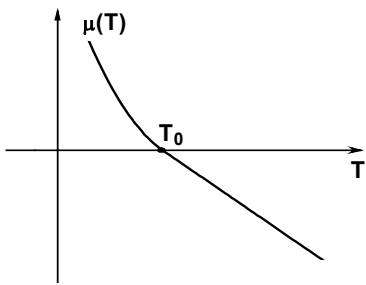


图 1.5

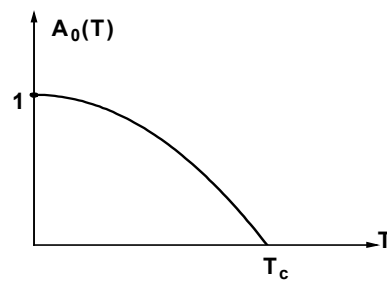


图 1.6

### 1.5 B-E 分布

量子体系与经典体系的差别在于全同粒子是否可以分辨. 当交换两个相同粒子时, 经典统计认为是不同的状态, 量子统计认为是同一状态. 由于此种差别, 对于 Bose 粒子, 其统计分布变为

$$a_p = \frac{1}{e^{[\varepsilon(p)-\mu]/kT} - 1}, \quad (1.14)$$

与经典分布(1.14)式的差别只是在分母上多了一项  $-1$ , 若略去此项, (1.14)式就回到经典统计.

Bose 和 Einstein 在 1924 年从理论上发现, 当温度降低时, 会发生一种相变, 称为 B-E 凝结.

### 1.6 B-E 凝结

对于经典体系, 前面已看到, 当  $T$  降低时, 具有零动量的相对粒子数  $A_0$  总

是零 (见图 1.4), 不存在相变, 粒子不会聚集到零动量状态上来.

对于 Bose 粒子, 零动量的相对粒子数  $A_0(T)$  不再总是零, 而是如图 1.6 所示: 存在一个临界温度  $T_c$ , 当  $T > T_c$  时,  $A_0(T) = 0$ , 当  $T < T_c$  时,  $A_0(T) > 0$ ; 当  $T \rightarrow 0$  时,  $A_0(T) \rightarrow 1$ .

这说明, 当温度降低到  $T_c$  时, 粒子开始向零动量状态上聚集. 温度愈低, 零动量状态上的粒子就愈多. 当  $T \rightarrow 0$  时, 全部粒子都聚集到零动量状态上, 这称为 B-E 凝结.

注意, 这是在动量空间的凝结. 由于动量为零的波函数在坐标空间是常数, 所以在坐标空间中, 粒子分布仍是均匀的, 不发生凝结.

动量空间的凝结表示大量粒子都集中到一个量子态 (基态) 上, 这些粒子都具有相同的位相, 是一种相干态. 因为粒子总数  $N$  是宏观量, 所以 B-E 凝结是一种宏观的量子效应. 实际上它是超流和超导 (Cooper 对的凝结) 的机理.

## 2. 理论

### 2.1 凝结的物理原因

在介绍 B-E 凝结的理论之前, 先说明一下凝结的物理原因, 这来源于微观粒子的波粒二象性.

在经典统计中, 粒子是定域的, 任一时间都有确定的位置, 因而每个粒子都有各自的轨道. 对于全同粒子, 虽然它们的所有属性完全相同, 但是, 仍可根据各自的轨道将它们辨别出来. 所以经典统计中的全同粒子仍是可辨别的, 交换两个粒子就出现新的状态.

在量子统计中, 微观粒子具有波粒二象性, 没有轨道, 各个粒子的波函数相互交叠, 不能用轨道来辨认粒子. 因此, 量子统计与经典统计的根本差别就是: 全同粒子是不可辨别的, 交换两个粒子不出现新的状态.

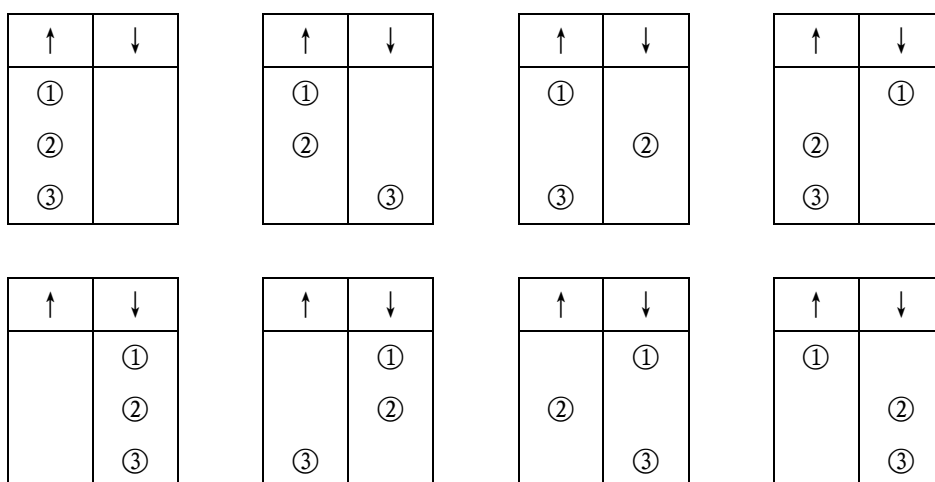
对于 Bose 粒子 (同一状态上可存在许多粒子), 全同粒子的不可辨别性, 就带来了聚集的倾向, 这可以从两方面来说明.

#### 1. 几率的对比

下面通过一个例子来说明这一道理. 设粒子具有自旋 ( $S=1$ ), 只能处于  $S_{\uparrow}=+1$  或  $S_{\downarrow}=-1$  两个状态.

(a) 先讨论 3 个粒子的简单情况.

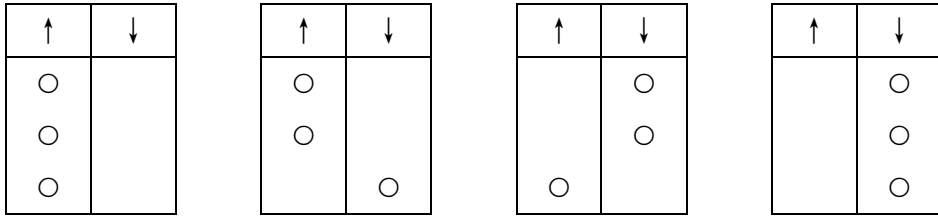
※ 对于经典统计, 体系有下述  $8(2^3)$  个状态 (一种分布可有几个不同的状态):



3 个粒子聚集在一起 ( $\uparrow$  态或者  $\downarrow$  态) 的几率为  $p^C = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ . 非聚集的几率为

$$q^C = 1 - p^C = \frac{3}{4}.$$

※ 对于 Bose 统计, 体系只有 4 个状态 (一种分布只有一个状态).



聚集在一起的几率为  $p^Q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ , 非聚集的几率为  $q^Q = 1 - p^Q = \frac{1}{2}$ .

将量子情况与经典情况加以比较, 可以看到: 聚集的几率增加了一倍 (从经典下的  $\frac{1}{4}$  增加为量子下的  $\frac{1}{2}$ ), 非聚集的几率则下降了 (从经典下的  $\frac{3}{4}$  减少为量子下的  $\frac{1}{2}$ ), 这说明全同粒子的不可分辨性产生了聚集性.

(b) 再讨论对不同的聚集和离散程度, 几率的变化.

上面的例子比较简单, 只有一种聚集状态和一种离散状态. 现在来讨论  $n$  个粒子的情况, 可有多种不同程度的聚集和离散. 具体看一下, 当以不同程度聚集时, 几率增加多少; 不同离散程度的非聚集下, 几率降低多少.

设粒子的数目  $n$  是偶数, 分布  $[n|0]$  就是完全聚集; 分布  $[n-1|1]$ ,  $[n-2|2]$  等就是程度不同的不完全聚集. 同样, 分布  $[n/2|n/2]$  是最离散的非聚集, 分布  $[n/2-1|n/2+1]$ ,  $[n/2-2|n/2+2]$  是离散程度不同的非聚集.

对每一种分布, 都可在经典和量子情况下, 算出其几率. 将两者比较, 就可看出, 不同聚集程度下, 几率增加了多少; 同样, 对不同的离散程度, 几率减少多少.

※ 经典情况

总状态数  $M = 2^n$ , 分布为  $[n-m|m]$  的状态数为  $C_n^m$ , 此种分布的几率为  $p^C = C_n^m / 2^n$ .

※ 量子情况

每种分布就是一种状态, 总状态数为  $n+1$ , 各种分布的几率都是  $p^Q = \frac{1}{n+1}$  因此从经典变为量子, 几率的变化为

$$\frac{p^Q}{p^C} = \frac{2^n}{(n+1)C_n^m}. \quad (2.1)$$

对于聚集情况,  $m \ll n$ , 此比值大于1, 而且随着聚集程度的增加 ( $m$  减少),



此比值急速变大. 这表明量子统计增加了聚集. 对于离散情况,  $m \sim \frac{n}{2}$ , 此比值小于1, 而且, 离散程度愈大 ( $m$  更接近  $\frac{n}{2}$ ), 比值变得更小. 因此量子统计减少了离散.

当  $n=10$  时, 下表列出了具体的数值

分布 $n-m m$	$10 0$	$9 1$	$8 2$	$7 3$	$6 4$	$5 5$
经典几率 $p^c = C_n^m / 2^n$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{102.4}$	$\frac{1}{22.76}$	$\frac{1}{8.53}$	$\frac{1}{4.88}$	$\frac{1}{4.06}$
量子几率 $p^q = 1/(n+1)$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$
几率变化 $p^q/p^c$	93.09	9.31	2.07	0.78	0.44	0.37

由上表可见, 前三个分布是程度不同的聚集, 几率都有所增加, 聚集程度愈大, 几率也增加得愈多.  $10|0$  是完全聚集, 几率增加得最多, 达到93倍. 后三种分布是程度不同的离散, 几率都下降了; 离散程度愈大, 下降得愈厉害. 此例子定量表明了全同粒子不可分辨性增加了聚集, 减小了离散.

## 2. 碰撞的作用

要达到热平衡, 必须通过粒子之间的碰撞, 即使是理想气体, 碰撞也必须考虑, 否则不能达到平衡分布, 只有在达到平衡分布后, 正碰和反碰的效果相互抵消, 分布不再改变. 考虑到碰撞, 将更清楚地看出, 全同粒子不可分辨性会导致聚集.

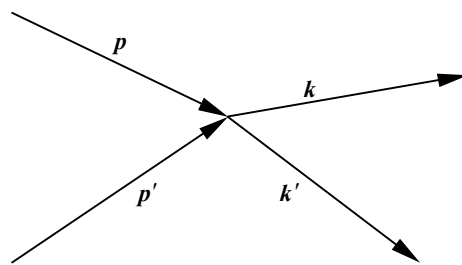


图 2.1

当粒子相互碰撞时, 动量为  $p$  和  $p'$  的两个粒子, 在碰撞后, 动量变为  $k$  和  $k'$ , 见图 2.1. 如果, 在碰撞前, 动量为  $p$  和  $p'$  上的粒子数分别为  $a_p$  和  $a_{p'}$ , 经过碰撞, 体系的状态要变化.

对于经典粒子, 碰撞所引起的状态变化几率  $W_C$  正比于碰撞前的粒子数  $a_p$  和  $a_{p'}$ , 与碰撞后的粒子数无关, 即

$$W_C \propto a_p a_{p'}. \quad (2.2)$$

对于量子情况, 如前所述, 由于全同粒子不可能分辨, 对粒子不能加以编号, 一种状态就是一种分布, 可写为  $\psi_i = |\dots a_p \dots a_{p'} \dots a_k \dots a_{k'} \dots\rangle$ , 它表示在动量为  $p$ ,  $p'$ ,  $k$  和  $k'$  上的粒子数分别为  $a_p$ ,  $a_{p'}$ ,  $a_k$  和  $a_{k'}$  个, 其它动量上的粒子数未明显写出.  $\psi_i$  是碰撞前的状态. 当两个粒子发生碰撞时, 动量从  $p$  和  $p'$  变为  $k$  和  $k'$ , 其状态变为  $\psi_f = |\dots a_p - 1 \dots a_{p'} - 1 \dots a_k + 1 \dots a_{k'} + 1 \dots\rangle$ . 该碰撞过程相当于, 动量为  $p$  和  $p'$  的粒子各减少了一个, 动量为  $k$  和  $k'$  的粒子各增加了一个. 用  $\hat{b}$  表示湮灭算符, 用  $\hat{b}^+$  表示产生算符, 上述的碰撞过程可写成  $\langle \psi_f | \hat{b}_k^+ \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_p \hat{b}_{p'} | \psi_i \rangle$ . 粒子碰撞引起状态变化, 几率  $W_Q$  正比于上述矩阵元的平方, 即  $W_Q \propto \left| \langle \psi_f | \hat{b}_k^+ \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_p \hat{b}_{p'} | \psi_i \rangle \right|^2$ . 对于 Bose 粒子, 有  $\hat{b}_p |\dots a_p \dots\rangle = \sqrt{a_p} |\dots a_p - 1 \dots\rangle$ ,  $\hat{b}_k^+ |\dots a_k \dots\rangle = \sqrt{a_k + 1} |\dots a_k + 1 \dots\rangle$ , 于是

$$W_Q \propto \left| \langle \psi_f | \hat{b}_k^+ \hat{b}_{k'}^+ \hat{b}_p \hat{b}_{p'} | \psi_i \rangle \right|^2 = a_p a_{p'} (a_k + 1) (a_{k'} + 1). \quad (2.3)$$

此式说明, 当碰撞引起状态变化时, 变化几率  $W_Q$  不但正比于碰撞前的粒子数  $a_p a_{p'}$ , 而且正比于碰撞后的粒子数  $(a_k + 1)(a_{k'} + 1)$ . 这就是说, 如果在某动量  $k$  上的粒子数比其他动量上的粒子数多, 则碰到该动量上的几率就大于碰到其它动量上的几率, 于是, 在该动量上会聚集愈来愈多的粒子, 这就是全同粒子不可分辨性 (量子效应) 所带来的聚集倾向.

上面只考虑了量子效应而没有考虑温度. 考虑到温度后, 由于热运动, 在高温下, 粒子可进入能量高的状态, 基态上的粒子不多. 温度降低时, 愈来愈多的粒子进入低能量状态, 降到某一温度  $T_c$ , 零动量上就发生了凝结.

波粒二象性只产生了聚集的倾向，要从聚集的倾向而产生凝结还要一个条件：低能状态的数目要足够少，这将在后面（二维体系）看到。

## 2.2 玻色分布的化学势

前面已看到，全同粒子的不可辨别性给经典的统计分布带来了修改，在分布的分母上多出了一项  $-1$ ，即

$$a_p = \frac{1}{e^{[\varepsilon(p)-\mu]/kT} - 1}, \quad (2.4)$$

其中化学势  $\mu(T)$  由总粒子数  $N$  确定：

$$\sum_p \frac{1}{e^{[\varepsilon(p)-\mu]/kT} - 1} = N. \quad (2.5)$$

前面已讨论过经典统计下  $\mu(T)$  随  $T$  的变化，当温度降低时， $\mu$  不断增加，从负变为正。现在来分析 Bose 统计下， $\mu(T)$  随  $T$  的变化情况：

1. 在任何温度下， $\mu(T) \leq 0$ 。

因为零动量态的能量  $\varepsilon(\mathbf{p}=0) = 0$ ，从(2.4)式可知，零动量态上的粒子数目为

$$a_0 = \frac{1}{e^{-\mu/kT} - 1}, \quad (2.6)$$

如果  $\mu > 0$ ，则  $a_0$  变为负数，失去物理意义。所以，在任何温度下， $\mu(T)$  都不能是正的。

2. 当温度降低时， $\mu(T)$  要增加。

设在温度  $T_1$  下，由(2.5)式定出的化学势为  $\mu_1$ ，即  $\sum_p \frac{1}{e^{[\varepsilon(p)-\mu_1]/kT_1} - 1} = N$ 。当温度降低时 ( $T < T_1$ )， $\mu$  是大于  $\mu_1$ ，还是小于  $\mu_1$ ？当  $T$  降低时，比值  $[\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu]/kT$  中的分母减小了，为了使同样的求和保持为  $N$ ，比值中的分子  $\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu$  也需相应地减小，由于粒子的能谱  $\varepsilon(\mathbf{p})$  不随  $T$  而变，只能是  $\mu$  变大。因此，当温度降低时，化学势  $\mu(T)$  增加。

于是  $\mu(T)$  曲线的走势如图 2.2 所示，具体的曲线可用数值计算，从(2.5)式中求出。

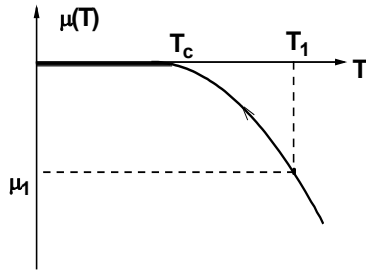


图 2.2

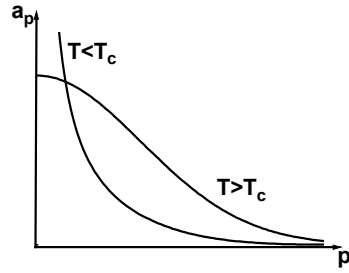


图 2.3

3. 当温度降为  $T_c$  时,  $\mu = 0$ .

当  $T$  降低时,  $\mu(T)$  曲线向左上方走, 何时  $\mu$  达到 0? 在(2.5)式中, 令  $\mu = 0$ , 就可求出  $T_c$ . 将对  $p$  的求和改为积分  $\sum_p \rightarrow \frac{V}{h^3} \int dp = \frac{V}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp$ , (2.5)式可写成

$$\frac{1}{h^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{p^2/2mkT_c} - 1} = \frac{N}{V}. \quad (2.7)$$

为了便于积分, 作变数变换  $p^2/2mkT_c = x$ , 则  $p = \sqrt{2mkT_c x}$ , 且  $p dp = mkT_c dx$ , (2.7)式变为

$$\frac{2\pi}{h^3} (2mkT_c)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = \frac{N}{V}. \quad (2.8)$$

因为  $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1} = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , 其中  $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2.612\dots$ , 且  $\frac{N}{V} = \rho$ , 是粒子体密度, 由(2.8)式得到

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left[ \frac{\rho}{\zeta(3/2)} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (2.9)$$

4. 当  $T < T_c$  时,  $\mu(T) = 0$ .

前面已看到, 当  $T$  继续降低时,  $\mu$  不能减小, 同时,  $\mu$  又不能变为正的. 因此, 当温度低于  $T_c$  后,  $\mu$  只能保持为零.

上述四步求得了  $\mu(T)$  的变化曲线, 如图 2.2 所示. 此图是 Bose 体系最重要

的特征，它决定了该体系的各种性质，也是说明 B-E 凝结的关键。  $\mu(T)$  的理论计算可参考北京大学章立源，林宗涵，卫崇德和包科达教授所著《量子统计物理学》中的 3.4 节。

5.  $\mu(T)$  在  $T_c$  附近的临界行为。

在  $T_c$  附近，对于  $T \geq T_c$ ，函数  $\mu(T)$  的形式是

$$\mu(T) = B(T - T_c)^\alpha, \quad (2.10)$$

$\alpha$  是一种临界指数。因为  $s = -\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_p$ ， $c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -T\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_p$ ，由  $\alpha$  的数值可确定相变的级数。当  $2 < \alpha < 3$  时，是二级相变。对于 B-E 凝结，数值计算结果是  $\alpha = 2.1$ 。

附带指出，(2.5) 式是确定函数  $\mu(T)$  的方程。由于此函数是单值的，它也是确定  $T = T(\mu)$  的方程。将  $\mu$  作为自变量时，可以看出：对于  $\mu \leq 0$ ，都可以从 (2.5) 式解出  $T$ ；但是，当  $\mu > 0$  时，(2.5) 式无解。所以  $\mu = 0$  是函数  $T = T(\mu)$  的奇点。

### 2.3 单个动量状态上的粒子数

1. 当  $T > T_c$  时， $\mu$  为负值，不同动量上的粒子数分布为 (2.4) 式。对于任何动量（包括零动量）， $\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu$  都是正的，于是， $a_p$  都是有限的，其分布如图 2.3 中的  $T > T_c$  曲线所示。零动量上的粒子数  $a_0$  最多；动量愈大，其上的粒子数目愈小。这类似于经典情况图 1.3。

如果考虑相对粒子数  $A_p = a_p/N$ ，由于  $a_p$  是有限的（包括零动量状态），因而在热力学极限下，即使是零动量， $a_0$  的相对粒子数  $A_0$  也趋于零：

$$A_0 \rightarrow 0 \quad (T > T_c). \quad (2.11)$$

因此，当温度高于  $T_c$  时，尽管零动量状态上的粒子数很多，它大于任何其它状态上的粒子数，但是数目是有限的，零动量上的相对粒子数  $A_0$  为零。这与经典统计的情况一样，没有凝结。

2. 当  $T < T_c$  时， $\mu = 0$ ，Bose 分布为

$$a_p = \frac{1}{e^{\varepsilon(p)/kT} - 1}, \quad (2.12)$$

如图 2.3 中的  $T < T_c$  曲线所示.

对于非零动量,  $\varepsilon(p) > 0$ ,  $a_p$  是有限的, 其上的相对粒子数

$$A_p = a_p/N \rightarrow 0 \quad (p \neq 0). \quad (2.13)$$

但是, 对于零动量状态,  $\varepsilon(0) = 0$ , 由(2.12)可知,  $a_0 \rightarrow \infty$ , 在热力学极限下, 零动量状态上的相对粒子数不再为零:

$$A_0 = a_0/N \neq 0 \quad (T < T_c). \quad (2.14)$$

下面将定量求出  $A_0(T)$  随  $T$  的变化关系, 定出图 1.6 上的曲线.

3. 由于零动量上的粒子数  $a_0(T)$  有特殊性, 有必要特别看一下  $a_0(T)$  的变化.

对于零动量,  $\varepsilon(0) = 0$ , 由图 2.2 看到, 随着温度的降低,  $|\mu|$  愈来愈小, 因而, 当  $T$  降低时,  $a_0(T)$  增加. 当  $T \rightarrow T_c$  时, 由于  $\mu \rightarrow 0$ , 于是  $a_0$  趋向无穷大.  $a_0(T)$  的变化如图 2.4 所示.

因为  $a_0(T) \leq N$ , 所以只有在热力学极限下 ( $N \rightarrow \infty$ ),  $a_0(T)$  才会发散. 后面将证明

$$a_0(T)/N = 1 - (T/T_c)^{3/2}. \quad (2.15)$$

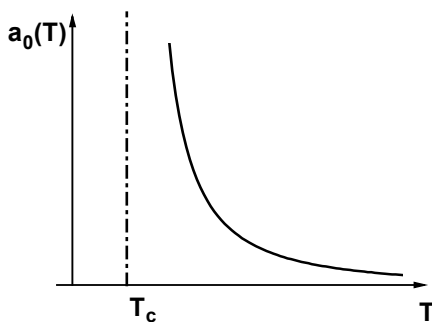


图 2.4

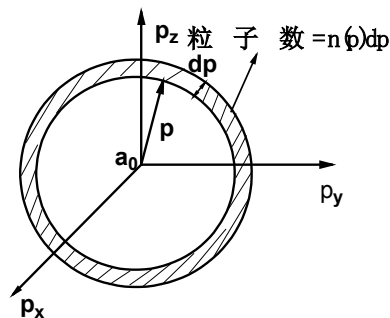


图 2.5

## 2.4 动量空间中的粒子数分布

由于零动量的特殊性, 对不同的动量状态求和时, 需将零动量状态分开来, 于是总粒子数条件可写成

$$a_0 + \sum_{p \neq 0} a_p = N. \quad (2.16)$$

在热力学极限下, 上式左边第二项的求和可改写成积分  $\sum_{p \neq 0} \rightarrow \int_{+0}^{\infty} D(p) dp$ , 其中

$D(p) = 4\pi p^2 V / h^3$  是动量空间中的状态密度, 于是(2.16)式变为

$$a_0 + \int_{+0}^{\infty} a_p D(p) dp = N. \quad (2.17)$$

将上式中的被积函数记为  $n(p)$ , 即

$$n(p) = a_p D(p) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi p^2}{e^{(p^2/2m-\mu)/kT} - 1}, \quad (2.18)$$

注意  $n(p)$  还是  $T$  的函数, 则(2.17)式变为

$$a_0 + \int_{+0}^{\infty} n(p) dp = N. \quad (2.19)$$

现在来说明一下  $n(p)$  的物理意义. 设在动量空间中有一层球壳, 见图 2.5, 其内半径为  $p$ , 壳层的厚度为  $dp$ . (2.19)式中的积分表示各种非零动量状态上的粒子数之和, 因而,  $n(p)dp$  就是壳层  $dp$  中的粒子数 (注意,  $a_p$  是一个动量态上的粒子数). 所以  $n(p)$  是动量空间中的粒子数按动量  $p$  的分布.

看一下不同温度下的  $n(p)$ :

1.  $T > T_c$ , 此时  $\mu < 0$ .

对于确定的  $T$ , (2.18)式的分子随  $p$  而增加, 分母随  $p$  而很快减小,  $n(p)$  如图 2.6 所示. 此时, 由于  $a_0$  是有限的数目, 而(2.19)式中的其它两项都是  $N$  量级, 因而,  $a_0$  可略去, 总粒子数条件为

$$\int_0^{\infty} n(p) dp = N, \quad (2.20)$$

表明图 2.6 中的曲线下的面积等于  $N$ .

2.  $T \leq T_c$ , 此时  $\mu = 0$ .

$$n(p) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi p^2}{e^{p^2/2mkT} - 1}, \quad (2.21)$$

当  $p$  很小时,  $p^2/2mkT \ll 1$ , 上式可展开成

$$n(p) = \frac{V}{h^3} \frac{4\pi p^2}{p^2/2mkT + (p^2/2mkT)^2/2 + \dots} \approx \frac{V}{h^3} \frac{8\pi mkT}{1 + p^2/4mkT}, \quad (2.22)$$

它随  $p$  的增大而减小. 此情况下,  $n(p)$  如图 2.7 所示. 此曲线的起点数值为

$$n_0(T) = \frac{V}{h^3} 8\pi mkT, \quad (2.23)$$

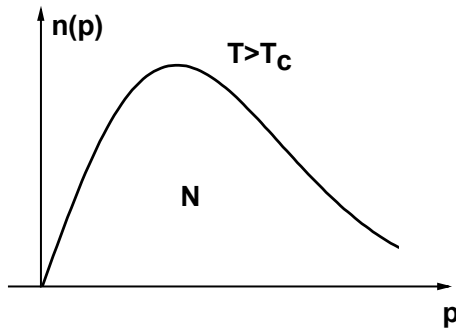


图 2.6

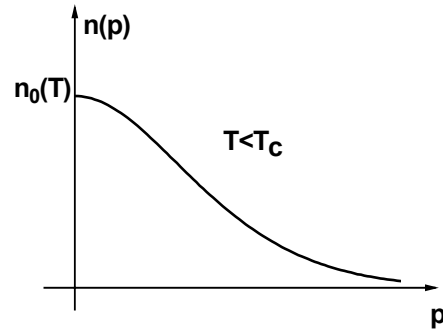


图 2.7

它随  $T$  的降低而变小, 同时, 此曲线下的面积也随  $T$  的降低而减小.

## 2.5 零动量上的相对粒子数

当  $T \leq T_c$  时, 零动量上的绝对粒子数  $a_0(T)$  是发散的, 但相对粒子数  $A_0(T)$  是有限的, 可根据总粒子数条件(2.19)式求出  $a_0(T)$  和  $A_0(T)$ .

动量空间中的粒子分布  $n(p|T)$  由(2.21)式给出. 值得注意的是, 温度为  $T$  时的分布  $n(p|T)$  可以由  $T_c$  时的分布  $n(p|T_c)$  得到, 其过程如下:

从(2.21)式容易得到

$$n(p|T) = \frac{T}{T_c} n(\sqrt{T_c/T} p | T_c), \quad (2.24)$$

此关系告诉我们如何得到  $T$  时  $p$  上的  $n(p|T)$ : 在已知的  $T_c$  曲线上, 取动量为  $\sqrt{T_c/T} p$  (它大于  $p$ ) 上的数值  $n(\sqrt{T_c/T} p | T_c)$ , 再乘上  $T/T_c$ . 因此, 只要画出  $T_c$  时的分布曲线  $n(p|T_c)$ , 任何  $T < T_c$  的分布曲线  $n(p|T)$  可照上述方法按比例缩小



得到. 图 2.8 给出了两种不同温度下的分布曲线, 一条是在  $T_c$ , 另一条是在  $T_c$  下的某一温度  $T$ . 后者比前者要低, 因而  $T$  曲线下的面积小于  $T_c$  曲线下的面积. 从图 2.8 可以看出, 当  $T$  降低时, 曲线  $n(p|T)$  下的面积要减小, 而曲线下的面积表示所有非零动量状态上的

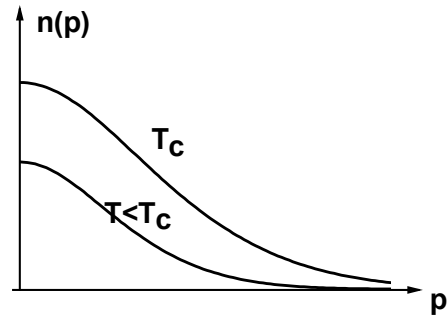


图 2.8

粒子数  $N'(T)$ . 这说明, 当  $T$  降低时,  $N'(T)$  减小, 多余的粒子  $N - N'(T)$  就聚集到零动量上去了. 因此, 当  $T$  降低时, 愈来愈多的粒子凝结到零动量状态.

下面来计算低于  $T_c$  的任意温度  $T$  下, 零动量上的粒子数  $a_0(T)$ . 先算非零动量上的粒子数  $N'(T)$ , 这可从  $T_c$  时的粒子数分布而得到.  $T_c$  时,

$$\int_{+0}^{\infty} n(p|T_c) dp = N, \quad (2.25)$$

低于  $T_c$  的温度  $T$  时,  $\int_{+0}^{\infty} n(p|T) dp = N'(T)$ . 根据(2.24)式, 作变换  $p = \sqrt{T/T_c} p'$ ,

$$N'(T) = \frac{T}{T_c} \int_{+0}^{\infty} n(\sqrt{T_c/T} p | T_c) dp = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \int_{+0}^{\infty} n(p' | T_c) dp'. \quad (2.26)$$

定积分与积分变量无关, 利用(2.25)式得到

$$N'(T) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} N. \quad (2.27)$$

由  $a_0(T) + N'(T) = N$ ,

$$A_0(T) = a_0(T)/N = 1 - (T/T_c)^{3/2} \quad (T \leq T_c). \quad (2.28)$$

有时会提出下述佯谬. 前面在第 2.3 节中, 讲到  $a_0(T)$  随  $T$  的变化时, 因为零动量的能量  $\varepsilon(0) = 0$ , 其上的粒子数为  $a_0(T) = \frac{1}{e^{-\mu/kT} - 1}$ , 当  $T \rightarrow T_c$  时,  $\mu \rightarrow 0$ , 零动量上的粒子数  $a_0(T_c)$  是发散的; 另一方面, 根据(2.28)式, 当  $T \rightarrow T_c$  时,  $a_0(T_c)$  似乎又是零. 两者是否矛盾?

如果将  $N$  看成是一个定数, 这两者是矛盾的. 但是, 在理解凝结时, 要考虑热力学极限. 此时,  $N \rightarrow \infty$ , 矛盾即可消失. 观察(2.28)式, 右边当  $T \rightarrow T_c$  时

趋于零, 而  $N$  在热力学极限下趋于  $\infty$ , 因而  $a_0(T_c)$  是  $0 \times \infty$ . 这说明  $a_0(T_c)$  是一个不确定的数值, 可以是发散的. 例如  $a_0(T_c) \sim N^\alpha$  ( $\alpha < 1$ ), 它是发散的. 同时,  $A_0(T_c) = a_0(T_c)/N \rightarrow 0$ , 它又满足(2.28)式.

## 2.6 Bose-Einstein 相变

上节求得了零动量上的相对粒子数  $A_0(T)$ , 它随  $T$  的变化如图 1.6 所示. 此结果表明:

- (1) 当  $T > T_c$  时, 零动量上的粒子数  $a_0(T)$  是有限的, 其上相对粒子数  $A_0(T) = 0$ .
- (2) 当  $T$  降至  $T_c$  后, 零动量上的绝对粒子数  $a_0$  不再是有限数目, 相对粒子数  $A_0$  从零开始增大, 出现了凝结.
- (3) 当  $T$  进一步降低时,  $A_0(T)$  不断增大.
- (4) 当  $T \rightarrow 0$  时,  $A_0$  趋于 1, 全部粒子凝结至零动量状态.

这是一种相变, 称为 Bose-Einstein 相变,  $A_0(T)$  就是该相变的序参量,

$$A_0(T) = \begin{cases} 0, & T > T_c \\ 1 - (T/T_c)^{3/2}, & T \leq T_c \end{cases} \quad (2.29)$$

在相变点  $T_c$  上, 序参量是连续的.

注意, 该种凝结是发生在动量空间中的, 不是发生在坐标空间中的, 在坐标空间中粒子分布仍是均匀的. 这不同于气体至液体的凝结, 该凝结是发生在坐标空间中的.

## 2.7 B-E 凝结与维度性

近年来出现了许多新材料和新体系, 它们具有层状或链状结构, 例如, 高温超导体、纳米管、薄膜和表面等. 这些体系不是三维的, 而是二维或一维的.

由于超导是 Cooper 对的凝结, 超流也与凝结有关, 因而氧化物超导与薄膜超流就与低维体系的凝结有关. 本节将讨论维度性对凝结的影响.

### 1. 二维的 $T_c$

前面讲的是三维空间的情况. 本节讨论一下在二维空间 (面积  $A = L^2$ ) 会发生什么情况.

在二维动量空间中，在厚度为  $dp$  的圆环中的状态数目是  $dn = \frac{2\pi p dp}{(h/L)^2}$ ，于是

动量空间中的状态密度是

$$D(p) = \frac{dn}{dp} = \frac{2\pi p A}{h^2}. \quad (2.30)$$

总粒子数条件为  $\sum_p \frac{1}{e^{[\varepsilon(p)-\mu]/kT} - 1} = N$ 。在零动量上未发生凝结时，可将上述求和

改写成积分  $\frac{1}{h^2} \int_0^\infty \frac{2\pi p dp}{e^{(p^2/2m-\mu)/kT} - 1} = \frac{N}{A}$ 。在高温下，从上式可知  $\mu < 0$ 。

现在来确定  $T_c$ 。在上式中令  $\mu \rightarrow 0$ ，确定  $T_c$  方程为

$$\frac{1}{h^2} \int_0^\infty \frac{2\pi p dp}{e^{p^2/2mkT_c} - 1} = \frac{N}{A}. \quad (2.31)$$

作变数变换  $p^2/2mkT_c = x$ ，上式变为

$$\frac{\pi}{h^2} (2mkT_c) \int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} = \frac{N}{A}, \quad (2.32)$$

其中  $\frac{N}{A} = \sigma$ ，是粒子面密度。因为积分  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - 1} \rightarrow \infty$ （该积分在下限 0 处对数发

散），所以  $T_c = 0$ 。因此，在二维情况下，只有在绝对零度下， $\mu$  才趋向于零；

对任意非零温度， $\mu < 0$ 。 $\mu(T)$  曲线如图 2.9 所示。在任意温度下， $\mu$  都是负的，

只有在  $T = 0$  时，才发生凝结。

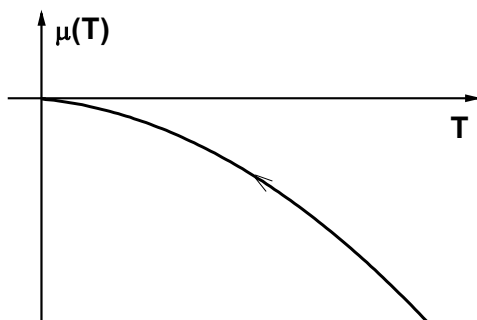


图 2.9

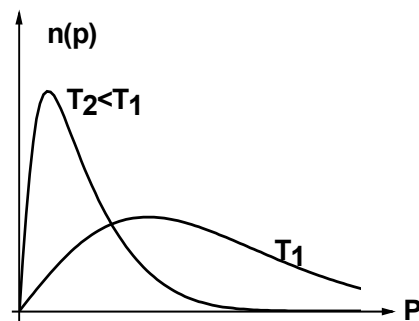


图 2.10

由于在任何非零温度下,  $\mu < 0$ , 因而零动量上的粒子数  $a_0 = \frac{1}{e^{-\mu/kT} - 1}$  都是有限的, 只有在绝对零度下, 粒子才会集中到零动量状态上去. 这说明二维体系不会在非零温度下发生凝结, 或者简单地说, 二维体系没有 B-E 凝结.

这个结论也可以从动量空间的粒子分布  $n(p)$  而看到. 对二维体系,

$$n(p) = a_p D(p) = \frac{A}{h^2} \frac{2\pi p}{e^{(p^2/2m - \mu)/kT} - 1}. \quad (2.32)$$

由于  $\mu < 0$ , 该函数在任何温度下都没有奇性, 如图 2.10 所示. 该图与三维情况  $T > T_c$  曲线图 2.6 类似, 只是在  $p \rightarrow 0$  时, 三维  $n(p) \sim p^2$ , 二维  $n(p) \sim p$ . 该曲线下的面积为  $N$ . 当  $T$  降低时, 曲线的形状有所改变, 峰的位置向小动量方向移动, 同时峰高增大, 但曲线下的面积不变. 因此, 对于任意温度 ( $T > 0$ ), 非零动量的状态都能容纳下  $N$  个粒子, 零动量上的粒子数  $a_0(T)$  都是有限的.

为什么三维体系有凝结, 而二维体系就没有? 为了理解其物理原因, 要先看一下状态数目按能量的分布—态密度.

## 2. 按能量的态密度

前面已看到, 在三维动量空间中, 厚度为  $dp$  中的状态数目为  $dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(h/L)^3}$ . 现

在通过  $\varepsilon = p^2/2m$ , 将上式中的  $p$  换成  $\varepsilon$ :  $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ ,  $dp = \sqrt{m/2\varepsilon} d\varepsilon$ , 于是

$dn = \left(\frac{L}{h}\right)^3 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon$ . 这说明, 按能量的态密度为

$$D_3(\varepsilon) = \left(\frac{L}{h}\right)^3 2\pi(2m)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.33)$$

该密度正比于  $\sqrt{\varepsilon}$ .

同样可计算二维情况下, 按能量的态密度. 在二维动量空间中, 厚度为  $dp$  的

园环中的状态数目为  $dn = \frac{2\pi p dp}{(h/L)^2}$ . 将  $p$  换成  $\varepsilon$ ,  $dn = \left(\frac{L}{h}\right)^2 \pi(2m) d\varepsilon$ , 所以

$$D_2(\varepsilon) = \left(\frac{L}{h}\right)^2 2\pi m, \quad (2.34)$$

它是一个常数，与能量  $\varepsilon$  无关。

在图 2.11 中，同时画出了三维和二维的态密度  $D(\varepsilon)$ 。对二维，当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $D(\varepsilon)$  并不趋向零，保持一个常数。对三维，当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时， $D(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$  也趋向零。这说明，在低能量部分（ $\varepsilon \rightarrow 0$ ），三维的状态数目很稀少，二维的状态数目比较多。这个差别就导致三维有凝结，而二维没有。

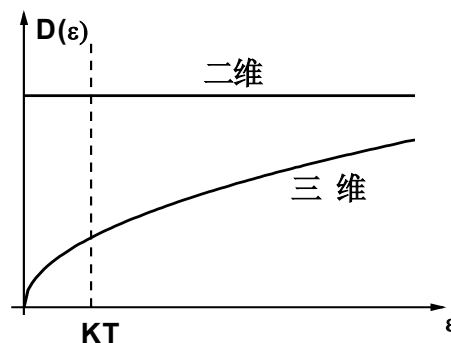


图 2.11

### 3. 产生凝结的物理条件

在本章第一节中已说明，全同粒子的不可辨别性使 Bose 粒子有聚集的倾向；此倾向要产生凝结，还需要一定的条件。对于三维体系和二维体系，Bose 粒子都有聚集的倾向。但是二维体系和三维体系的态密度  $D(\varepsilon)$  不同，这使得三维体系能满足凝结的要求，而二维则不能。现在来看一下该物理条件。

当温度为  $T$  时，能量大于  $kT$  的粒子数目很少，可以近似地认为粒子都在能量  $kT$  以下。当温度降低时，高能量状态上的粒子数目愈来愈少，粒子都向低能量（ $\varepsilon < kT$ ）状态（零动量和小动量）上转移。对于非零动量的低能量状态，每个状态上的粒子数  $a_p$  是有限的，这些低能量状态上所能容纳的粒子数目应该是  $a_p$  乘上状态的数目，因而与状态密度  $D(\varepsilon)$  成正比。 $D(\varepsilon)$  大，低能量的状态数目就多，能容纳的粒子数目就大。对于零动量状态，当  $T < T_c$  时，其上的粒子数是发散的，也就是说，再多的粒子它也能容纳。因此，在低温下，当大量的粒子涌入低能量状态（小动量状态和零动量状态）时，如果小动量（非零）的状态数目比较多，这部分状态就能容纳下大量的粒子。反过来，小动量（非零）的状态数目很少，这部分状态容纳不下很多粒子，而零动量状态的容量是无限的，于是大量的粒子就只好进入零动量状态，这就产生了凝结。

由图 2.11 看到，对于三维体系，低能量（ $\varepsilon < kT$ ）的态密度很小，非零的小动量状态容纳不了大量的粒子，余下的粒子只好进入零动量而形成凝结。对于二维体系，低能量的态密度并不小，非零动量的状态数目足够地多，能容下大量的

粒子, 就不会产生凝结.

因此, 要产生凝结, 除了 Bose 子有聚集的倾向外, 还要有一定的条件, 低能量上的状态数要稀少.

### 3. 准二维体系

具有低维结构(层状或链状)的体系, 并不是严格的二维或一维体系. 例如, 高温超导体的铜氧层(超导性由此层中的 Cooper 对凝结而产生的), 每一层是二维体系, 但在层与层之间存在着一定的耦合, 因此铜氧层只是准二维体系. 又如表面上的过程是在衬底的基础上发生的, 与衬底有耦合. 准二维体系也可看成是各向异性的三维体系, 其中二个方向的耦合强, 一个方向耦合比较弱.

准二维体系与严格的二维体系有很大的差别, 后者不能有 B-E 凝结, 而前者是可以存在 B-E 凝结的, 只是  $T_c$  要降低. 下面来说明这一事实.

在三维动量空间,  $dp$  层中状态数为  $D_3(p)dp = \left(\frac{L}{h}\right)^3 4\pi p^2 dp$ ,  $D_3(p) \sim p^2$ ; 对二维,  $D_2(p)dp = \left(\frac{L}{h}\right)^2 2\pi p dp$ ,  $D_2(p) \sim p$ . 于是, 动量空间的态密度

$$D_d(p) \sim p^{d-1}, \quad (2.35)$$

其中  $d$  是空间的维度. 对于准二维体系,  $d$  介于 2 和 3 之间. 可设  $d = 2(1 + \delta)$  ( $\delta < 1/2$ ),  $\delta$  决定于层间的耦合, 耦合愈弱,  $\delta$  愈小,  $\delta = 0$  就是严格的二维. 根据(2.35)式, 准二维体系在  $dp$  层中的状态数目

$$D_{2(1+\delta)}(p)dp \sim p^{1+2\delta} dp. \quad (2.36)$$

将  $p$  换成  $\varepsilon$ , 可得  $D_{2(1+\delta)}(p)dp \sim \varepsilon^\delta d\varepsilon$ , 所以, 按能量的态密度为

$$D_{2(1+\delta)}(\varepsilon) \sim \varepsilon^\delta. \quad (2.37)$$

对于三维,  $\delta = 1/2$ ,  $D(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ . 对于二维,  $\delta = 0$ ,  $D(\varepsilon)$  为常数. 这就是图 2.11 中画出的两条线. 对准二维体系,  $0 < \delta < 0.5$ . 层间耦合愈弱,  $\delta$  愈小. 只要存在耦合,  $\delta$  都不是零. 由(2.37)式可知, 只要有层间耦合 ( $\delta \neq 0$ ),  $D(\varepsilon) \rightarrow 0$ , (当  $\varepsilon \rightarrow 0$ ). 于是准二维的态密度如图 2.12 所示, 它与三维类似, 低能量的状

态数仍旧是稀少的，与严格二维的  $D(\varepsilon)$  截然不同。这能满足产生零动量凝结的要求，所以准二维体系可以存在 B-E 凝结。

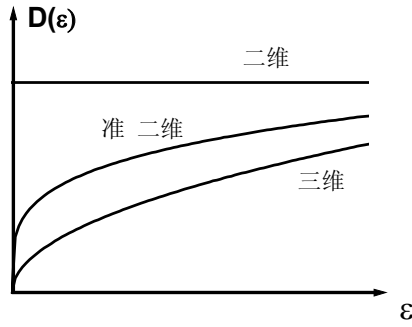


图 2.12

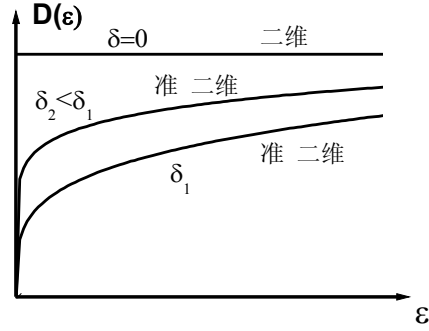


图 2.13

根据(2.37)式，当  $\delta$  变小时， $D(\varepsilon)$  曲线愈变愈陡，如图 2.13 所示。低能量上的状态数愈来愈多，实现 B-E 凝结愈来愈难， $T_c$  就要降低。所以，准二维体系的  $T_c$  要低于三维体系的  $T_c$ 。

$T_c$  随耦合的变弱而降低，这一事实也可从下述确定  $T_c$  的公式中看出。对于  $2(1+\delta)$  维体系，动量空间  $dp$  层中状态数为  $D_{2(1+\delta)}(p)dp = \left(\frac{L}{h}\right)^{2(1+\delta)} \frac{2\pi^{1+\delta} p^{1+2\delta} dp}{\Gamma(1+\delta)}$ ，于是决定  $T_c$  的公式变为

$$\left(\frac{L}{h}\right)^{2(1+\delta)} \frac{2\pi^{1+\delta}}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^\infty \frac{p^{1+2\delta} dp}{e^{p^2/2mkT_c} - 1} = N. \quad (2.38)$$

作变换  $p^2/2mkT_c = x$ ，得

$$\left(\frac{2\pi mkT_c}{h^2}\right)^{1+\delta} \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^\infty \frac{x^\delta dx}{e^x - 1} = \frac{N}{L^{2(1+\delta)}}. \quad (2.39)$$

因为  $\zeta(1+\delta) = \frac{1}{\Gamma(1+\delta)} \int_0^\infty \frac{x^\delta dx}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1+\delta}}$ ，且  $\frac{N}{L^{2(1+\delta)}} = \rho_{2(1+\delta)}$ ，是  $2(1+\delta)$  维粒子密度，得到

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi mk} \left[ \frac{\rho_{2(1+\delta)}}{\zeta(1+\delta)} \right]^{\frac{1}{1+\delta}}. \quad (2.40)$$

当  $\delta > 0$  时,  $\zeta(1+\delta)$  是收敛的, 并随  $\delta$  减小而迅速增大, 因而  $T_c$  降低. 当  $\delta \rightarrow 0$  时,  $\zeta(1+\delta) \rightarrow \infty$ , 于是  $T_c \rightarrow 0$ . 有关  $\Gamma$  函数和  $\zeta$  函数, 可参见王竹溪和郭敦仁先生所著《特殊函数概论》(北京大学出版社)中的第三章“伽马函数”.

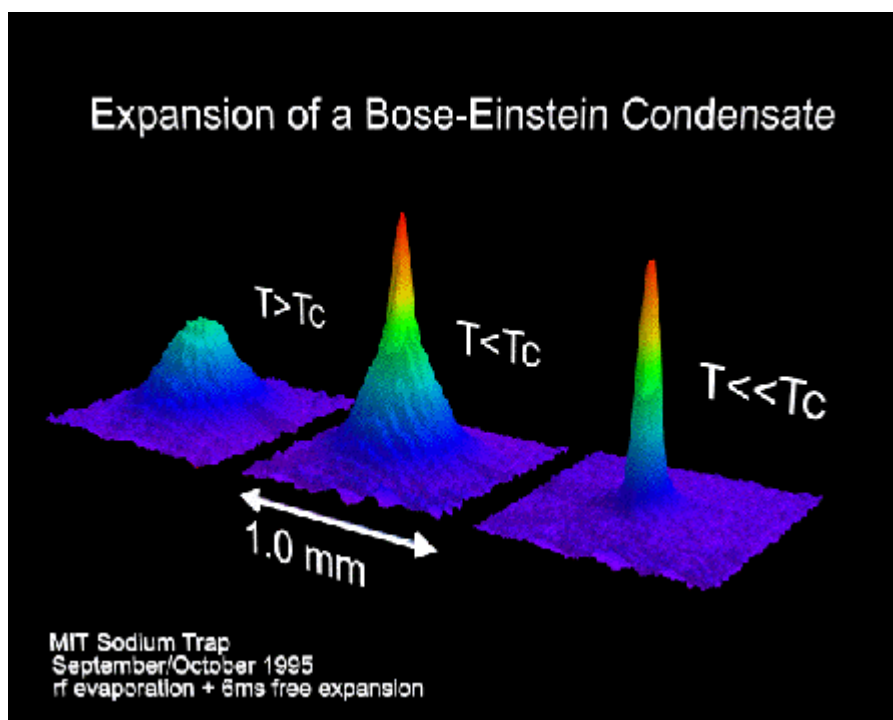
问题:

1. 如何用浅显的方法来说明, 量子情况下的碰撞几率不但正比于碰撞前的粒子密度  $a_p a_{p'}$ , 而且正比于碰撞后的粒子密度  $(a_k + 1)(a_{k'} + 1)$ ?
2. 如何用解析方法计算  $\mu(T) = B(T - T_c)^\alpha$  中的临界指数  $\alpha$ ? (应该已有这方面的理论, 例如用重正化群理论).



### 3. 实验

尽管 Bose 和 Einstein 从理论上预言了 B-E 凝结，然而实现 B-E 凝结的条件极为苛刻和“矛盾”：一方面希望达到极低的温度，另一方面还要求粒子体系处于气态。实现低温的传统手段是蒸发制冷；而朱棣文、Cohen-Tannoudj 和 Phillips 发展的激光冷却和磁阱技术是另一种有效的制冷方法，他们三人因此分享了 1997 年度诺贝尔物理学奖。1976 年，Nosanow 和 Stwalley 证明在任意低温下处于自旋极化的氢原子始终能保持气态，则为实现第二个要求提供了希望。



但遗憾的是, 众多的实验物理学家将自旋极化的氢原子气体降温, 并未观察到 B-E 凝结现象. 于是 Wieman 和 Cornell 开始将兴趣转向碱金属原子气体, 1995 年, 他们将铷原子限制在磁阱中进行激光冷却首次成功的观察到原子气的 B-E 凝结现象. 同年, MIT 的 Ketterle 也在钠原子气中实现了 B-E 凝结.

B-E 凝结的实现不仅在基础研究方面具有重大意义, 还可能在“原子芯片”和量子计算机等方面有广泛的应用前景. 因此, 1991 年的诺贝尔物理学奖授予 Wieman、Cornell 和 Ketterle 以表彰他们在 B-E 凝结实验方面的开创性工作. 瑞典皇家科学院认为, 三名科学家的成功发现, 犹如是找到了让原子“齐声歌唱”的途径, 这种控制物质的新途径必将给精密测量和纳米技术等领域带来“革命性的”变化.