Topic: 计算介质中的极磁化的能量

推导过程参照了 Jackson 书上的 1.11，4.7，6.2。

对于真空中的静电能量，因为场的能量等于建立场所做的总功，考虑构造由元电荷的逐渐积累而产生的静电势能：

① 点电荷情况：总势能为

$$W=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}$$

求和中略去 $i=j$ 的项；上式是以电荷位置表示的静电势能。

② 连续电荷分布：类比得到总势能为

$$W=\frac{1}{2}\int\int\frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}d^3\vec{r}d^3\vec{r}'=\frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

对于介质中的静电能量，把自由电荷移进来要做功，对介质中的极化电荷也要做功；考虑全空间中的宏观电荷密度 ρ 改变了 $\delta\rho$，导致了能量改变 δW：

$$\delta W=\int\delta\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r})d^3\vec{r}$$

由于

$$\delta\rho=\nabla\cdot(\delta\vec{D})\text{ 以及 }\vec{E}=-\nabla\varphi$$

从而

$$\delta W=\int\varphi(\vec{r})\nabla\cdot(\delta\vec{D})d^3\vec{r}$$
$$=\int\{\nabla\cdot[\varphi(\vec{r})\delta\vec{D}]-\delta\vec{D}[\nabla\varphi(\vec{r})]\}d^3\vec{r}=\int\vec{E}\cdot\delta\vec{D}d^3\vec{r}$$

令 $\vec{D}$ 从 0 变到终值 $\vec{D}$，而假设介质是线性的，则总静电能：

$$W=\int d^3\vec{r}\int_0^{D}\vec{E}\cdot\delta\vec{D}=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d^3\vec{r}$$

场源不动的电场中放入线性介质物体，介电常数在体积 V_1 内取值 ε_1，V_1 外取值 ε_0，则初始电能和放入介质物体以后的电能分别是：

$$W_0=\frac{1}{2}\int\vec{E_0}\cdot\vec{D_0}d^3\vec{r}\text{ 和 }W_1=\frac{1}{2}\int\vec{E}\cdot\vec{D}d^3\vec{r}$$

二者的能量差为

$$W=\frac{1}{2}\int(\vec{E}\cdot\vec{D}-\vec{E_0}\cdot\vec{D_0})d^3\vec{r}$$
$$=\frac{1}{2}\int(\vec{E}\cdot\vec{D_0}-\vec{D}\cdot\vec{E_0})d^3\vec{r}+\frac{1}{2}\int(\vec{E}+\vec{E_0})\cdot(\vec{D}-\vec{D_0})d^3\vec{r}$$

上式中的第二个积分分部积分以后（源电荷密度不改变满足绝缘体）：

$$I=-\frac{1}{2}\int\nabla\varphi'\cdot(\vec{D}-\vec{D_0})d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\int\varphi'\nabla\cdot(\vec{D}-\vec{D_0})d^3\vec{r}$$

故能量变化

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int(\vec{E}\cdot\vec{D_0}-\vec{D}\cdot\vec{E_0})d^3\vec{r}\\&=-\frac{1}{2}\int_{V_1}(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\vec{E}\cdot\vec{E_0}d^3\vec{r}=-\frac{1}{2}\int_{V_1}\vec{P}\cdot\vec{E_0}d^3\vec{r}\end{aligned}$$

相当于只在V_1内积分。即能量密度为

$$w=-\frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E_0}$$

磁场能量。考虑一个载有稳恒电流I 的简单电路，若通过电路的磁通量发生变化，那么电流源为保持电流恒定就需要做功以抵消感生电动势的效果。其功率：

$$\frac{dW}{dt}=-IE=I\frac{d\Phi}{dt}$$

即磁通量变化$\delta\Phi$ 电流源做功

$$\begin{aligned}\delta W&=I\delta\Phi=\vec{j}\sigma\int_S\delta\vec{B}\cdot d\vec{S}=\vec{j}\sigma\int_S(\nabla\times\delta\vec{A})\cdot d\vec{S}\\&=\vec{j}\sigma\oint_L\delta\vec{A}\cdot d\vec{l}=\int\delta\vec{A}\cdot\vec{j}d^3\vec{r}=\int\delta\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{H})d^3\vec{r}\\&=\int[\vec{H}\cdot(\nabla\times\delta\vec{A})+\nabla\cdot(\vec{H}\times\delta\vec{A})]d^3\vec{r}=\int\vec{H}\cdot\delta\vec{B}d^3\vec{r}\end{aligned}$$

其中$\vec{A}$是引入的矢势，并假定场的分布区域有限。

若介质线性，有

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{H}\cdot\vec{B}d^3\vec{r}$$

若将一个磁导率为μ_1的物体放入这个磁场中，类似之前的静电问题,求出：

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int(\vec{B}\cdot\vec{H_0}-\vec{H}\cdot\vec{B_0})d^3\vec{r}\\&=\frac{1}{2}\oint_{V_1}(\frac{1}{\mu_0}-\frac{1}{\mu_1})\vec{B}\cdot\vec{B_0}d^3\vec{r}=\frac{1}{2}\oint_{V_1}\vec{M}\cdot\vec{B_0}d^3\vec{r}\end{aligned}$$

而

$$w=\frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{B_0}$$

讨论：

1. 电磁不对称的原因是由于它们的本构关系的定义上的差异；
2. $\frac{1}{2}$的来源是介质线性所决定的（e.g. $\vec{E}\cdot\delta\vec{D}=\frac{1}{2}\delta(\vec{E}\cdot\vec{D})$）。