电磁波入射旋光介质的一般性讨论

课件中所设的两个条件为（A）$\omega > \omega_p \gg \omega_B$ 故$\epsilon_1 \gg \epsilon_2 > 0$（B）$\vec{K} = K\overrightarrow{e_Z}$故$\vec{K} \cdot \overrightarrow{E_0} = 0$。本文中，我将会把这两个条件去掉，做更为一般性的讨论。

1. 去条件（A）

①$\omega_p > \omega \gg \omega_B$故$\epsilon_1 < 0$ 且$-\epsilon_1 \gg \epsilon_2 > 0$、

而原先方程的本征值形式未变，仍为$K_+ = \frac{\omega}{C}\sqrt{\epsilon_1 + \epsilon_2}$，$K_- = \frac{\omega}{C}\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2}$ 。

K_+和 K_-都是纯虚数，设它们分别为$i\alpha_+$和 $i\alpha_-$ ，

考虑$\vec{E} = \overrightarrow{E_0}e^{i(K\cdot r - \omega t)} = \overrightarrow{E_0}e^{-\alpha\cdot r}e^{-i\omega t}$ ，此处的$e^{-\alpha\cdot r}$是衰减因子，它表明，电磁波在入射后将会迅速衰减，当$r = \frac{1}{\alpha}$时，振幅衰减到 $r = 0$ 处的$\frac{1}{e}$ ，$\frac{1}{\alpha}$称为透入深度。

②$\omega > \omega_p$仍然成立，但 $\omega_p \gg \omega_B$不再成立

$$\overrightarrow{E_0} = -\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\overleftrightarrow{\varepsilon_r}^{-1} \cdot (\vec{K} \times \overrightarrow{H_0})$$

介质为旋电介质而非旋磁介质，因此$\overrightarrow{H_0}$不变并且垂直于$\vec{K}$ 。$\overrightarrow{K_+}$平行于$\overrightarrow{K_-}$ ，因此，$\frac{E_0^+}{E_0^-} = \frac{K_+}{K_-} = \sqrt{\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{\epsilon_1-\epsilon_2}}$ 。当$\omega_p \gg \omega_B$时，$\epsilon_1 \gg \epsilon_2$，$\frac{E_0^+}{E_0^-} \approx 1$ ，现在此条件不再满足，则左旋光和右旋光的振幅不再相同，射出介质的光实际上为椭圆偏振光。椭圆长轴和短轴之比即为$\sqrt{\frac{\epsilon_1+\epsilon_2}{\epsilon_1-\epsilon_2}}$ 。

③ 考虑一种特殊情况：$(\omega - \omega_B)\omega < \omega_p^2 < (\omega + \omega_B)\omega$ ，此时$\epsilon_1 + \epsilon_2 > 0$，$\epsilon_1 - \epsilon_2 < 0$ ，K_+为实数，K_-为虚数。左旋光进入介质后迅速衰减，右旋光则不会衰减。线偏振光通过介质后变为了右旋圆偏振光。

同 理 ， $\omega < \omega_B$且$\omega_p^2 > (\omega + \omega_B)\omega$ 时 ， $\epsilon_1 + \epsilon_2 < 0$，$\epsilon_1 - \epsilon_2 > 0$ ，K_+为虚数，K_-为实数。右旋光进入介质后迅速衰减。线偏振光通过介质后变为了左旋圆偏振光。

2. 去条件（B）

电磁波不再沿磁场方向入射时，$\vec{K} \cdot \overrightarrow{E_0} \neq 0$，方程变为

$$K^2E_0 = {K_0}^2\overleftrightarrow{\varepsilon_r} \cdot \overrightarrow{E_0} + (\vec{K} \cdot \overrightarrow{E_0})\vec{K}$$

设$\vec{K}=\left(K_x, K_y, K_z\right)=\left(K\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Cos}\varphi, K\mathrm{Sin}\theta\mathrm{Sin}\varphi, K\mathrm{Cos}\theta\right)$

则上述方程化为

$$\begin{pmatrix} \epsilon1(\mathrm{k0})^2+k^2\mathrm{Sin}^2[\theta]\mathrm{Cos}^2[\phi]-k^2 & i\epsilon2(\mathrm{k0})^2+k^2\mathrm{Sin}^2[\theta]\mathrm{Sin}[\phi]\mathrm{Cos}[\phi] & k^2\mathrm{Sin}[\theta]\mathrm{Cos}[\theta]\mathrm{Cos}[\phi] \\ -i\epsilon2(\mathrm{k0})^2+k^2\mathrm{Sin}^2[\theta]\mathrm{Sin}[\phi]\mathrm{Cos}[\phi] & \epsilon1(\mathrm{k0})^2+k^2\mathrm{Sin}^2[\theta]\mathrm{Sin}^2[\phi]-k^2 & k^2\mathrm{Sin}[\theta]\mathrm{Cos}[\theta]\mathrm{Sin}[\phi] \\ k^2\mathrm{Sin}[\theta]\mathrm{Cos}[\theta]\mathrm{Cos}[\phi] & k^2\mathrm{Sin}[\theta]\mathrm{Cos}[\theta]\mathrm{Sin}[\phi] & \epsilon3(\mathrm{k0})^2-k^2\mathrm{Sin}^2[\theta] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix}$$

$$=0$$

要使方程有非 0 解，矩阵行列式为 0

解得 $K^2=$

$$\mathrm{k0}^2\frac{-\mathrm{Sin}^2[\theta](\epsilon2^2-\epsilon1^2+\epsilon1\epsilon3)+2\epsilon1\epsilon3\pm\sqrt{(\epsilon2^2-\epsilon1^2+\epsilon1\epsilon3)^2\mathrm{Sin}^4[\theta]+4\epsilon2^2\epsilon3^2\mathrm{Cos}^2[\theta]}}{2\epsilon1\mathrm{Sin}^2[\theta]+2\epsilon3\mathrm{Cos}^2[\theta]}$$

将$\theta=0$ 代入此解，可得$K^2={K_0}^2$（$\epsilon_1\pm\epsilon_2$），与垂直入射时的解相吻合。

其后应求本征矢量，得到两支电磁波的偏振态，但计算量过于巨大，虽求助于软件 Mathematica 亦未能得到足够简洁的表达式，更无法探知其物理意义。