负折射的简单讨论

一、从 Maxwell 方程和本构关系出发讨论负折射的性质。

a) Maxwell 方程：

Maxwell 的方程形式：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

本构关系：

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\epsilon\vec{E}$$

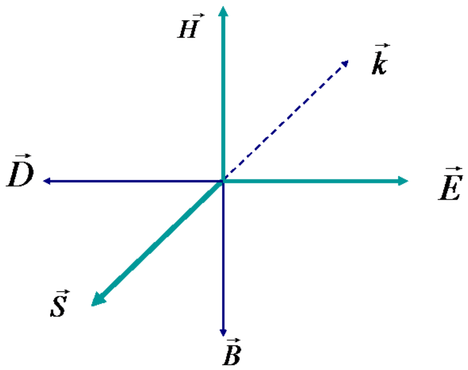
麦克斯韦方程仍然不会改变，但是 μ 和 ϵ 变成 $-\mu$ 以及 $-\epsilon$ 之后，可见本构关系变为：

$$\vec{B}=-\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=-\epsilon\vec{E}$$

从上面可以看出$\vec{B}$和$\vec{H}$的方向完全相反，$\vec{D}$和$\vec{E}$的方向也完全相反。

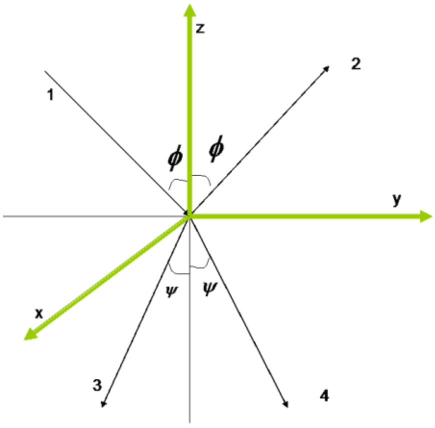
而能流表达式$\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}$ 不会改变，$\vec{k}\times\vec{H}=-\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$（或者$\vec{k}\times\vec{E}=\frac{\omega}{c}\vec{B}$）也不会改变。这时候，他们在空间中是这样的状态：



b） 左手系与右手系：从上图可以看出：$\vec{S}$，$\vec{E}$，$\vec{H}$三个矢量仍然保持右手系，而 $\vec{k}$，$\vec{E}$和$\vec{H}$这三个矢量却构成左手系。设 G=$\begin{pmatrix}\hat{E}\\ \hat{H}\\ \hat{k}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}$,矩阵 G 用来表征这三个矢量构成的坐标系是左手系还是右手系，如果是右手系，det（G）=1，否则，det（G）=-1 。

二、边界条件

不论是在左手系的介质中，还是在右手系的介质中，Maxwell 方程成立，保证了边界条件成立，所以始终有：$E_{t1} = E_{t2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$（1）



$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \qquad \mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} \qquad (2)$$

边界条件（1）保证了无论在左手系还是右手系中，$\vec{E}$和$\vec{H}$的 x,y 方向的分量都是不改变的。边界条件（2）则说明如果变成上面的介质是右手系，而下面的介质是左手系，则 E_{n1} 和 E_{n2} 符号相反（因为介电常数的符号相反），H_{n1} 和 H_{n2} 亦然。而这个时候，因为折射波在左手系的介质中，则有 $\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$ 中，$\vec{k}$，$\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 构成左手系。将 $\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$ 表示成 $\vec{k} = -a\vec{E} \times \vec{H}$ （a 为正数）。写成分量形式为

$$k_{2i} = -a\varepsilon_{ijk}E_{2j}H_{2k}$$

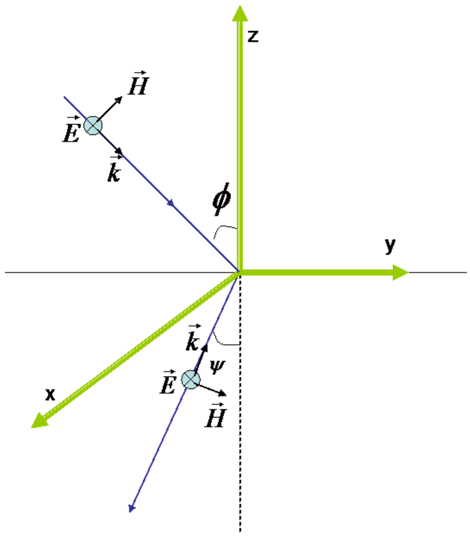
在入射介质（右手系介质）中的分量是：$k_{1i} = b\varepsilon_{ijk}E_{1j}H_{1k}$ （b 是正数）

1）$i = z$：E_{2j} 与 E_{1j}，H_{1k} 与 H_{2k} 的符号都相同，由于系数符号改变，k_{1z} 与 k_{2z} 的符号相反。

2）$i = x, y$：E_{2j} 与 E_{1j}，H_{1k} 与 H_{2k} 两组中有一组的符号不同，由于系数符号改变，k_{1x} 与 k_{2x} 的符号，k_{1y} 与 k_{2y} 的符号相同。

所以 $\vec{k}$ 的变化规律与 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 相同。

用以上数学关系讨论简单情况：$\vec{E}$ 波垂直于入射面，如右图所示。



另外，由于对于折射定律 $\frac{\sin\phi}{\sin\psi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$，由于角度$\psi$ 是负值（相对发现与普通折射偏转方向不同），但右边却始终是正的实数。故根据之前对左右手系统的讨论，我们可以重新将折射定律修正为

$\frac{\sin\phi}{\sin\psi} = \frac{\det(G_2)}{\det(G_1)}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}}$，此时左边的式子适用于任何不同或者相同左右手系的介质中

的折射现象