色散介质中的耗散与场能

0930019078 谢欣 （物理系）

能流密度 $\overrightarrow{S_p}=\vec{E}\times\vec{H}$ 在色散介质中仍然成立，这是因其在介质以外的真空中成立，在边界处$\vec{E}$与$\vec{H}$的切向分量连续，因而 $\overrightarrow{S_p}$具有连续的法向分量。

考虑单位体积内的能量变化率：

$$\nabla\cdot\overrightarrow{S_p}=\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial t}$$

对于非色散性介质，ε与μ为实常数，能量密度为$u=\frac{1}{2}(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E}+\mu\vec{H}\cdot\vec{H})$；然而色散介质是耗散的，会吸收能量，这个式子不再成立。

①. 单频情况：由于场强是恒定的，因而外界流入的能量平均值全部供给耗散。

单位体积和时间产生的热量随时间平均

$$<Q>=-<\nabla\cdot\overrightarrow{S_p}>=<\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}>$$

$$=<\frac{1}{2}\left(\vec{E}+\overrightarrow{E^*}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-i\omega\varepsilon\vec{E}+i\omega\varepsilon^*\overrightarrow{E^*}\right)+\frac{1}{2}\left(\vec{H}+\overrightarrow{H^*}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(-i\omega\mu\vec{H}+i\omega\mu^*\overrightarrow{H^*}\right)>$$

$$=\frac{i\omega}{4}(\varepsilon^*-\varepsilon)\vec{E}\cdot\overrightarrow{E^*}+(\mu^*-\mu)\vec{H}\cdot\overrightarrow{H^*}=\frac{\omega}{2}\left(\varepsilon''\left|\vec{E}\right|^2+\mu''\left|\vec{H}\right|^2\right)$$

其中$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\varepsilon''(\omega)$，$\mu(\omega)=\mu'(\omega)+i\mu''(\omega)$

②. 非单频情况：考虑$t\to\pm\infty$时迅速收敛的场，以及场的持续时间内的耗散，将$\vec{E}(t)$的连续谱进行傅里叶变换：

$$\vec{E}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\tilde{E}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

$$\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}=-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\varepsilon(\omega)\vec{\tilde{E}}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

以上两式的乘机对于时间积分得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}dt=-i\frac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\omega\varepsilon(\omega)\vec{\tilde{E}}(\omega)\cdot\vec{\tilde{E}}(\omega')d\omega d\omega'\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+\omega')t}dt$$

将$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+\omega')t}dt=2\pi\delta(\omega+\omega')$代入，对$\omega'$积分，利用$\vec{\tilde{E}}(-\omega)=\overrightarrow{\tilde{E}^*}(\omega)$，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\vec{E}(t)\cdot\frac{\partial\vec{D}(t)}{\partial t}dt=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\varepsilon(\omega)\left|\vec{\tilde{E}}(\omega)\right|^2d\omega$$

由于 $\varepsilon'(\omega)$是ω的偶函数，式中只剩下含$\varepsilon''(\omega)$的项，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}Qdt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left[\varepsilon''(\omega)\left|\vec{\tilde{E}}(\omega)\right|^2+\mu''(\omega)\left|\vec{\tilde{H}}(\omega)\right|^2\right]d\omega$$

两种情况中能量耗散都是由ε和μ的虚部决定的，它们必须为正的。

对于使ε''和μ''很小的频率范围（transparency ranges），能量的耗散可以忽略，因此引入场能的概念；单频场不会产生稳定的场能积聚，故考虑一种简单的非单频情况：场的频率分布在一个平均值ω_0附近的很小范围内，场强表示为

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}，\vec{H}(t) = \vec{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}$$

此时$\vec{E}_0(t)$与$\vec{H}_0(t)$不再是常数，而是时间的函数；但和因子$e^{-i\omega_0 t}$相比变化缓慢得多。

同样地，$-\nabla\cdot\overrightarrow{S_p}$中电场项对时间平均

$$<\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}>=\frac{1}{4}(\vec{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{D^*}}{\partial t}+\overrightarrow{E^*}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$$

为求出这种情况下的$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, 令$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\equiv\boldsymbol{f}\vec{E}$。当$\vec{E}_0$为常数时，明显有$\boldsymbol{f}\vec{E} = f(\omega)\vec{E} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}$。把$\vec{E}_0(t)$写成傅里叶变换形式$\overrightarrow{E_\xi}e^{-i\xi t}$。因$\xi \ll \omega_0$，故将$f(\omega_0+\xi)$在$\omega_0$附近展开

$$\boldsymbol{f}\overrightarrow{E_\xi}e^{-i(\omega_0+\xi)t} = f(\omega_0+\xi)\overrightarrow{E_\xi}e^{-i(\omega_0+\xi)t} \approx f(\omega_0)\overrightarrow{E_\xi}e^{-i(\omega_0+\xi)t}+\xi\frac{d\,f(\omega_0)}{dt}\overrightarrow{E_\xi}e^{-i(\omega_0+\xi)t}$$

对其求和，得到

$$\boldsymbol{f}\overrightarrow{E_0}e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)\overrightarrow{E_0}e^{-i\omega_0 t}+\xi\frac{d\,f(\omega_0)}{dt}\overrightarrow{E_0}e^{-i\omega_0 t} = f(\omega_0)\overrightarrow{E_0}e^{-i\omega_0 t}+i\frac{d\,f(\omega_0)}{dt}\frac{\partial\overrightarrow{E_0}}{\partial t}e^{-i\omega_0 t}$$

即对频率ω有

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}+\frac{d\,(\omega\varepsilon(\omega))}{dt}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

代入可消去$-i\omega\varepsilon(\omega)\vec{E}$项，

$$\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{D^*}}{\partial t}+\overrightarrow{E^*}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)=\frac{d\left(\omega\varepsilon(\omega)\right)}{dt}\left(\overrightarrow{E_0}^*\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E_0}}{\partial t}+\overrightarrow{E_0}\cdot\frac{\partial\overrightarrow{E_0}^*}{\partial t}\right)=\frac{d\left(\omega\varepsilon(\omega)\right)}{dt}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\cdot\overrightarrow{E^*})$$

同理求得磁场。能量密度随时间为变化率为$\frac{\partial u}{\partial t}$，所以可求得单位体积的场能（对于transparent medium）平均值（L. Brillouin, 1921）

$$<u>=\frac{1}{4}\left[\frac{d\left(\omega\varepsilon(\omega)\right)}{dt}\left(\vec{E}\cdot\overrightarrow{E^*}\right)+\frac{d\left(\omega\mu(\omega)\right)}{dt}\left(\vec{H}\cdot\overrightarrow{H^*}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{d\left(\omega\varepsilon(\omega)\right)}{dt}\left|\vec{E}\right|^2+\frac{d\left(\omega\mu(\omega)\right)}{dt}\left|\vec{H}\right|^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{d\left(\omega\varepsilon(\omega)\right)}{dt}<\vec{E}^2>+\frac{d\left(\omega\mu(\omega)\right)}{dt}<\vec{H}^2>\right]$$

假使外界流入的能量被切断，$<u>$就会全部转化为体系的内能，因此$<u>$大于 0，即$\frac{d\,(\omega\varepsilon(\omega))}{dt}$和$\frac{d\,(\omega\mu(\omega))}{dt}$均大于零。