橢球體退極化因子的計算

一、 題設、方程和邊界條件

設介電係數為ε_1的橢球形電介質放在介電係數為ε_2的無限大均勻介質中，空間中存在場強為$\boldsymbol{E}_0$的勻強電場中。設橢球方程為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

其中a，b，c滿足$a>b>c$

設橢球內外的電勢分別為φ_1和φ_2，則他們滿足的方程為

$$\nabla^2\varphi_1=0$$

$$\nabla^2\varphi_2=0$$

邊界條件為

$$\varphi_1|_{\text{橢球表面}}=\varphi_2|_{\text{橢球表面}}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\bigg|_{\text{橢球表面}}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\bigg|_{\text{橢球表面}}$$

$$\varphi_2|_{\text{原點}}\text{有限}$$

解上面的定解問題，就能求出橢球內部的電場，進而求出橢球體的退極化因子。

二、 橢球坐標系

欲解上面的問題，首先想到的是所謂“廣義球坐標系”。但不幸的是，廣義球坐標系不是正交坐標系，如果使用這種坐標系計算這個問題，拉普拉斯算子將出現多餘的項，求解起來十分複雜。

因此這裡使用橢球坐標系來計算這個問題。

1、橢球坐標(λ,μ,ν)以直角坐標(x,y,z)定義為

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$

$$y^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$

$$z^2=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

其中橢球坐標滿足

$$\lambda>-c^2>\mu>-b^2>\nu>-a^2$$

2、坐標面

變量λ的坐標面是橢球面

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

變量μ的坐標面是單葉雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1$$

變量ν的坐標面是雙葉雙曲面

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1$$

3、度規係數

$$h_\lambda^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\nu}\right)^2=\left(\frac{x}{2(a^2+\lambda)}\right)^2+\left(\frac{y}{2(b^2+\lambda)}\right)^2+\left(\frac{z}{2(c^2+\lambda)}\right)^2$$
$$=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

設函數$S(\sigma)$定義為

$$S(\sigma)=(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)$$

經過頗爲複雜的代數運算（計算過程中我不得不求助於 Mathematica），度規係數可以表示為

$$h_\lambda=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{S(\lambda)}}$$

$$h_\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{S(\mu)}}$$

$$h_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{S(\nu)}}$$

注意到(λ,μ,ν)的取值範圍，可以得到

$$S(\lambda)>0，S(\mu)<0，S(\nu)>0$$

4、橢球坐標系下的 Laplace 方程的形式

根據一般正交曲綫坐標系的 Laplace 算子的形式

$$\nabla^2 u=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

可以得到在橢球坐標系下，Laplace 算子具有下面的形式

$$\nabla^2 u=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial u}{\partial\lambda}\right)\right.$$
$$\left.+(\lambda-\nu)\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right]$$

三、 橢球體極化問題的解

設坐標原點處為電勢零點，則外場的電勢為

$$\varphi_0=-\boldsymbol{E_0}\cdot\boldsymbol{r}=-E_{0x}x-E_{0y}y-E_{0z}z=\varphi_{0x}+\varphi_{0y}+\varphi_{0z}$$

其中φ_{0x}，φ_{0y}，φ_{0z}分別為 *x*，*y*，*z* 三個方向電場分別產生的電勢。

$$\varphi_{0x}=-E_{0x}\sqrt{\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}$$

$$\varphi_{0y}=-E_{0y}\sqrt{\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}$$

$$\varphi_{0z} = -E_{0z}\sqrt{\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}$$

設橢球體上的極化電荷在球內和球外產生的電勢分別為φ'_1和φ'_2，則同樣有

$$\varphi'_1 = \varphi'_{1x} + \varphi'_{1y} + \varphi'_{1z}$$

$$\varphi'_2 = \varphi'_{2x} + \varphi'_{2y} + \varphi'_{2z}$$

球內總電勢

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi'_1 = \varphi_{0x} + \varphi'_{1x} + \varphi_{0y} + \varphi'_{1y} + \varphi_{0z} + \varphi'_{1z}$$

球外總電勢

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi'_2 = \varphi_{0x} + \varphi'_{2x} + \varphi_{0y} + \varphi'_{2y} + \varphi_{0z} + \varphi'_{2z}$$

顯然上面所有的項中，任何一項都滿足 Laplace 方程。

先考慮 x 方向電場產生的電勢φ'_{1x}和φ'_{2x}。

根據對稱性，可以設φ'_{1x}和φ'_{2x}具有下面的形式

$$\varphi'_{1x}(\lambda，\mu，\nu) = \varphi_{0x}(\lambda，\mu，\nu)F_1(\lambda)$$

$$\varphi'_{2x}(\lambda，\mu，\nu) = \varphi_{0x}(\lambda，\mu，\nu)F_2(\lambda)$$

其中$\varphi_{0x}(\lambda，\mu，\nu)$滿足 Laplace 方程，即

$$(\mu-\nu)\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\lambda}\right) + (\lambda-\nu)\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\mu}\right)$$

$$+(\lambda-\mu)\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\nu}\right) = 0$$

將φ'_{1x}代入 Laplace 方程得到

$$(\mu-\nu)\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{S(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\varphi_{0x}F_1)\right] + (\lambda-\nu)\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-S(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}(\varphi_{0x}F_1)\right]$$

$$+(\lambda-\mu)\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{S(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}(\varphi_{0x}F_1)\right] = 0$$

考慮到F_1僅為λ的函數，以及φ_{0x}滿足的方程，上面的方程可以化簡為

$$\frac{d^2F_1}{d\lambda^2} + \left(\frac{2}{\varphi_{0x}}\frac{\partial\varphi_{0x}}{\partial\lambda} + \frac{1}{\sqrt{S(\lambda)}}\frac{d}{d\lambda}\sqrt{S(\lambda)}\right)\frac{dF_1}{d\lambda} = 0$$

或者寫作

$$\frac{d^2F_1}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda}\left[\ln\left(\sqrt{S(\lambda)}(a^2+\lambda)\right)\right]\frac{dF_1}{d\lambda} = 0$$

解此方程得到

$$\frac{dF_1}{d\lambda} = \frac{A}{\sqrt{S(\lambda)}(a^2+\lambda)}$$

或者

$$\frac{dF_1}{d\lambda} = 0$$

所以這個方程的解為

$$F_1 = A\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}$$

或者

$$F_1 = C\text{（常數）}$$

根據邊界條件 3：$\varphi_2|_{\text{原點}}$有限，可得F_1應取

$$F_1(\lambda) = C_0$$

F_2滿足的方程與F_1是相同的，根據$\varphi'_2|_{r\to\infty} = 0$，$F_2$應取

$$F_2(\lambda) = C_2 \int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}$$

所以

$$\varphi_{1x} = \varphi_{0x} + \varphi'_{1x} = (1 + C_0)\varphi_{0x} = C_1\varphi_{0x}$$

$$\varphi_{2x} = \varphi_{0x} + \varphi'_{2x} = \left(1 + C_2 \int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}\right)\varphi_{0x}$$

根據邊界條件 1 和 2

$$\varphi_{1x}|_{\lambda=0,\mu=0,\nu=0} = \varphi_{2x}|_{\lambda=0,\mu=0,\nu=0}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_{1x}}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0,\mu=0,\nu=0} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_{2x}}{\partial\lambda}\bigg|_{\lambda=0,\mu=0,\nu=0}$$

注意到

$$\frac{d}{d\lambda}\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)} = -\frac{1}{\sqrt{S(\lambda)}(a^2+\lambda)}$$

設常數

$$n_x = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}$$

解得係數

$$C_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}，C_2 = -\frac{1}{2}abc\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$

所以 x 方向電場強度激發的空間電勢分佈為

$$\varphi_{1x} = C_1\varphi_{0x} = \frac{-\varepsilon_2 E_{0x} x}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2x} &= \left(1 + C_2 \int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}\right)\varphi_{0x} \\ &= -E_{0x}x\left[1 - \frac{abc}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}\right]\end{aligned}$$

同理可得φ_{1y}、φ_{1z}、φ_{2y}、φ_{2z}。

所以

$$\varphi_1 = \frac{-\varepsilon_2 E_{0x} x}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} + \frac{-\varepsilon_2 E_{0y} y}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} + \frac{-\varepsilon_2 E_{0z} z}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad (\lambda < 0)$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 = &-E_{0x}x\left[1 - \frac{abc}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}\right] \\ &+ -E_{0y}y\left[1 - \frac{abc}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(b^2+\xi)}\right] \\ &+ -E_{0z}z\left[1 - \frac{abc}{2}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}\int_\lambda^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(c^2+\xi)}\right] \quad (\lambda > 0)\end{aligned}$$

其中

$$n_x = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(a^2+\xi)}$$

$$n_y = \frac{abc}{2}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(b^2+\xi)}$$

$$n_z = \frac{abc}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\sqrt{S(\xi)}(c^2+\xi)}$$

這三個係數只與橢球的幾何形狀（即a，b，c）有關，稱爲退極化因子。

四、　討論

1、由電勢可以得出橢球内的電場強度

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\varepsilon_2 E_{0x}}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\boldsymbol{i} + \frac{\varepsilon_2 E_{0y}}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\boldsymbol{j} + \frac{\varepsilon_2 E_{0z}}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\boldsymbol{k}$$

可見橢球内部的電場仍然是勻強電場。

退極化場$\boldsymbol{E}'$為

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_0 = \frac{-n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0x}\boldsymbol{i} + \frac{-n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0y}\boldsymbol{j} + \frac{-n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0z}\boldsymbol{k}$$

可見退極化場與外場之間有一夾角，不能直接定義退極化因子。

2、退極化場$\boldsymbol{E}'$與外場$\boldsymbol{E}_0$之間的夾角

$\cos\theta$

$$= -\frac{\frac{n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0x}^2 + \frac{n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0y}^2 + \frac{n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0z}^2}{\sqrt{E_{0x}^2+E_{0y}^2+E_{0z}^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0x}\right)^2 + \left(\frac{n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_y(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0y}\right)^2 + \left(\frac{n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + n_z(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}E_{0z}\right)^2}}$$

所以，只有當外場方向與橢球的某個主軸平行時，退極化場$\boldsymbol{E}'$的方向才與外場$\boldsymbol{E}_0$嚴格相反。在其他情況下有$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$。

3、退極化因子 L

設外場沿 x 主軸的方向，則$E_{0y} = 0$，$E_{0z} = 0$，並且$\varepsilon_2 = \varepsilon_0$。

此時$\boldsymbol{D} = \varepsilon_1\boldsymbol{E}_1 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{P}$，即

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon_1-\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_1 = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0)\varepsilon_0 E_{0x}}{\varepsilon_0 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{E}' = \frac{-n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}{\varepsilon_0 + n_x(\varepsilon_1-\varepsilon_0)}E_{0x}\boldsymbol{i} = -\frac{L}{\varepsilon_0}\boldsymbol{P}$$

得到當外場沿 x 主軸的方向時，退極化因子$L = n_x$。

同理，如果外場沿 y 主軸的方向，退極化因子$L = n_y$。如果外場沿 z 主軸的方向，退極化因子$L = n_z$。這也解釋了n_x，n_y，n_z也稱作退極化因子。

4、幾種極限情況（均勻介質球體和無限大平板）

均勻介質的球體滿足$a = b = c$，則

$$n_x = n_y = n_z = \frac{abc}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{(a^2+\xi)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{3}$$

無限大平板滿足$a = b \to \infty$，則

$$n_x = n_y = 0$$

$$n_z = 1$$