算符 ∇ 既有微分性，又有矢量性，定义：

$$\nabla \equiv \vec{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv \vec{g}^k(\quad)_{,k}$$

其中 $\mathbf{g}^k$ 表示矢量性，$(\quad)_{,k}$表示对某个量进行求导

约定：k 为哑指标，指标重复，自动求和

㈠根据矢量运算性质，可以推导出附录中矢量运算的公式：

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\phi\varphi}) = \vec{g}^k(\phi\varphi)_{,k} = \vec{g}^k\left(\phi_{,k}\varphi + \phi\varphi_{,k}\right)$$

$\boldsymbol{\phi}$和$\boldsymbol{\varphi}$ 均为标量，可视为并矢，之间为数乘

$$= \varphi\left(\vec{g}^k\phi_{,k}\right) + \phi\left(\vec{g}^k\varphi_{,k}\right) = \boldsymbol{\varphi\nabla\phi} + \boldsymbol{\phi\nabla\varphi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\phi}\vec{\mathbf{A}}\right) = \vec{g}^k\left(\phi\vec{A}\right)_{,k} = \vec{g}^k\left(\phi_{,k}\vec{A} + \phi\vec{A}_{,k}\right)$$

$\boldsymbol{\phi}$为标量，无矢量性，可置于$(\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{A}})$前面

$$= \left(\vec{g}^k\phi_{,k}\right)\vec{A} + \phi\left(\vec{g}^k\vec{A}_{,k}\right) = (\boldsymbol{\nabla\phi})\vec{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\nabla}\vec{\mathbf{A}})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\phi}\vec{\mathbf{A}}\right) = \vec{g}^k\cdot\left(\phi\vec{A}\right)_{,k} = \vec{g}^k\cdot\left(\phi_{,k}\vec{A} + \phi\vec{A}_{,k}\right)$$

$\boldsymbol{\phi}$为标量，无矢量性，可置于$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}})$前面

$$= \left(\vec{g}^k\phi_{,k}\right)\cdot\vec{A} + \phi\left(\vec{g}^k\cdot\vec{A}_{,k}\right) = (\boldsymbol{\nabla\phi})\cdot\vec{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\phi}\vec{\mathbf{A}}\right) = \vec{g}^k\times\left(\phi\vec{A}\right)_{,k} = \vec{g}^k\times\left(\phi_{,k}\vec{A} + \phi\vec{A}_{,k}\right)$$

$\boldsymbol{\phi}$为标量，无矢量性，可置于$(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})$前面

$$= \left(\vec{g}^k\phi_{,k}\right)\times\vec{A} + \phi\left(\vec{g}^k\times\vec{A}_{,k}\right) = (\boldsymbol{\nabla\phi})\times\vec{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})$$

综上所述：（$\otimes$ 表示标积或者矢积）

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes\left(\boldsymbol{\phi}\vec{\mathbf{A}}\right) = (\boldsymbol{\nabla\phi})\otimes\vec{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\nabla}\otimes\vec{\mathbf{A}})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\,\vec{\mathbf{B}})=\vec{g}^k\cdot(\vec{A}\,\vec{B})_{,k}=\vec{g}^k\cdot(\vec{A}_{,k}\vec{B}+\vec{A}\,\vec{B}_{,k})$$

2 个矢量点乘，可以互换顺序，即 $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$

$$=(\vec{g}^k\cdot\vec{A}_{,k})\vec{B}+(\vec{g}^k\cdot\vec{A})\vec{B}_{,k}=(\vec{g}^k\cdot\vec{A}_{,k})\vec{B}+(\vec{A}\cdot\vec{g}^k)\vec{B}_{,k}=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{B}}+(\vec{\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{B}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\vec{\mathbf{A}}\,\vec{\mathbf{B}})=\vec{g}^k\times(\vec{A}\,\vec{B})_{,k}=\vec{g}^k\times(\vec{A}_{,k}\vec{B}+\vec{A}\,\vec{B}_{,k})$$

2 个矢量叉乘，互换顺序要变号，即 $\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}=-\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{A}}$

$$=(\vec{g}^k\times\vec{A}_{,k})\vec{B}+(\vec{g}^k\times\vec{A})\vec{B}_{,k}=(\vec{g}^k\times\vec{A}_{,k})\vec{B}-(\vec{A}\times\vec{g}^k)\vec{B}_{,k}$$

$$=(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{B}}-(\vec{\mathbf{A}}\times\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{B}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})=\vec{g}^k(\vec{A}\cdot\vec{B})_{,k}=\vec{g}^k(\vec{A}_{,k}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}_{,k})=\vec{g}^k(\vec{B}\cdot\vec{A}_{,k})+\vec{g}^k(\vec{A}\cdot\vec{B}_{,k})$$

利用 $(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}}=\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})+(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}$

$$=\vec{B}\times(\vec{g}^k\times\vec{A}_{,k})+(\vec{B}\cdot\vec{g}^k)\vec{A}_{,k}+\vec{A}\times(\vec{g}^k\times\vec{B}_{,k})+(\vec{A}\cdot\vec{g}^k)\vec{B}_{,k}$$

$$=\vec{\mathbf{B}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})+(\vec{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{A}}+\vec{\mathbf{A}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})+(\vec{\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{B}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})=\vec{g}^k\cdot(\vec{A}\times\vec{B})_{,k}=\vec{g}^k\cdot(\vec{A}_{,k}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}_{,k})$$

行列式互换 2 行，符号改变，即为 $\vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})=\vec{\mathbf{C}}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})=-\vec{\mathbf{B}}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{C}})$

$$=\vec{g}^k\cdot(\vec{A}_{,k}\times\vec{B})+\vec{g}^k\cdot(\vec{A}\times\vec{B}_{,k})=\vec{B}\cdot(\vec{g}^k\times\vec{A}_{,k})-\vec{A}\cdot(\vec{g}^k\times\vec{B}_{,k})$$

$$=\vec{\mathbf{B}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{A}})-\vec{\mathbf{A}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})=\vec{g}^k\times(\vec{A}\times\vec{B})_{,k}=\vec{g}^k\times(\vec{A}_{,k}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{B}_{,k})$$

利用 $\vec{\mathbf{A}}\times(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})=(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}})\vec{\mathbf{B}}-(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{C}}$

$$=(\vec{g}^k\cdot\vec{B})\vec{A}_{,k}-(\vec{g}^k\cdot\vec{A}_{,k})\vec{B}+(\vec{g}^k\cdot\vec{B}_{,k})\vec{A}-(\vec{g}^k\cdot\vec{A})\vec{B}_{,k}$$

$$=(\vec{B}\cdot\vec{g}^k)\vec{A}_{,k}-(\vec{g}^k\cdot\vec{A}_{,k})\vec{B}+(\vec{g}^k\cdot\vec{B}_{,k})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{g}^k)\vec{B}_{,k}$$

$$=(\vec{\mathbf{B}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{A}}-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{A}})\vec{\mathbf{B}}+(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}})\vec{\mathbf{A}}-(\vec{\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\nabla})\vec{\mathbf{B}}$$

㈡结合课件，举例说明：

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{E}-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \qquad (2.1.3)$$

试图将上式改写成对时间、空间的全微分形式，因为所有的守恒律都满足类似电荷（流）守恒的一个公式。注意到矢量运算恒等式

$$\boxed{\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)-\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)}$$

Tips：这个公式可以通过类比矢量混合积 $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$*，以及注意到微分运算必须对括号内的所有量都进行，得到。*

可得

$$\vec{j}\cdot\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\vec{B}\times\vec{E}\right)+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 \qquad (2.1.4)$$

第 5 讲——截图 1

①证明$(\nabla\times\vec{B})\cdot\vec{E}=\nabla\cdot(\vec{B}\times\vec{E})+\vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E})$:

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{B}})\cdot\vec{\mathbf{E}}=\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})=\vec{E}\cdot(\vec{g}^k\times\vec{B}_{,k})=-\vec{g}^k\cdot(\vec{E}\times\vec{B}_{,k})$$

利用 $(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}_{,k})=(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})_{,k}-(\vec{\mathbf{A}}_{,k}\times\vec{\mathbf{B}})$

$$=-\vec{g}^k\cdot\left[(\vec{E}\times\vec{B})_{,k}-(\vec{E}_{,k}\times\vec{B})\right]=-\vec{g}^k\cdot(\vec{E}\times\vec{B})_{,k}+\vec{g}^k\cdot(\vec{E}_{,k}\times\vec{B})$$

$$=\vec{g}^k\cdot(\vec{B}\times\vec{E})_{,k}+\vec{B}\cdot(\vec{g}^k\times\vec{E}_{,k})=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{E}})+\vec{\mathbf{B}}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}})$$

$$-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)+\varepsilon_0\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\varepsilon_0\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right) \qquad (2.2.3)$$

带入（2.2.2）式后，再考虑所有与电场有关的项：

$$\begin{aligned}&\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\vec{E}\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)\vec{E}-\left[\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\nabla\right)\vec{E}\right]\\&=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\left(\frac{1}{2}E^2\right)=\nabla\cdot(\vec{E}\vec{E})-\nabla\cdot(\frac{1}{2}E^2\overleftrightarrow{I})\end{aligned} \qquad (2.2.4)$$

注：这里用到了重要的并矢运算公式$\nabla\cdot\left(\vec{A}\vec{B}\right)=\vec{B}\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B}$.

证明如下$\partial_i(A_iB_j)\hat{e}_j=B_je_j\left(\partial_iA_i\right)+A_i\left(\partial_iB_j\right)e_j$。

第 5 讲——截图 2

②证明$(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}-\vec{E}\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla\cdot(\vec{E}\,\vec{E})-\frac{1}{2}\nabla\cdot(E^2\vec{I})$:

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{E}})\vec{\mathbf{E}}-\vec{\mathbf{E}}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}})=(\vec{g}^k\cdot\vec{E}_{,k})\vec{E}-\vec{E}\times(\vec{g}^k\times\vec{E}_{,k})$$

$$=(\vec{g}^k\cdot\vec{E}_{,k})\vec{E}-(\vec{E}\cdot\vec{E}_{,k})\vec{g}^k+(\vec{E}\cdot\vec{g}^k)\vec{E}_{,k}$$

利用 $(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})_{,\mathbf{k}}=(\vec{\mathbf{A}}_{,\mathbf{k}}\times\vec{\mathbf{B}})+(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}_{,\mathbf{k}})$

$$=(\vec{g}^k\cdot\vec{E}_{,k})\vec{E}-\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E})_{,k}\vec{g}^k+(\vec{E}\cdot\vec{g}^k)\vec{E}_{,k}$$

$$=\vec{g}^k\cdot(\vec{E}_{,k}\vec{E})-\frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E})_{,k}\vec{g}^k+\vec{g}^k\cdot(\vec{E}\,\vec{E}_{,k})$$

$$=\vec{g}^k\cdot(\vec{E}_{,k}\vec{E})+\vec{g}^k\cdot(\vec{E}\,\vec{E}_{,k})-\frac{1}{2}\vec{g}^k(\vec{E}\cdot\vec{E})_{,k}$$

$$=\vec{g}^k\cdot(\vec{E}\,\vec{E})_{,k}-\frac{1}{2}\vec{g}^k(\vec{E}\cdot\vec{E})_{,k}=\nabla\cdot(\vec{E}\,\vec{E})-\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\cdot\vec{E})$$

利用$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\phi}\,\vec{\mathbf{I}})=\vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{k}}\cdot(\boldsymbol{\phi}\vec{\mathbf{I}})_{,\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{k}}\cdot(\boldsymbol{\phi}_{,\mathbf{k}}\,\vec{\mathbf{I}})=\vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{I}}\,(\boldsymbol{\phi}_{,\mathbf{k}})=\vec{\mathbf{g}}^{\mathbf{k}}\,\boldsymbol{\phi}_{,\mathbf{k}}=\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\phi}$

$$=\nabla\cdot(\vec{E}\,\vec{E})-\frac{1}{2}\nabla(E^2)=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\vec{\mathbf{E}}\,\vec{\mathbf{E}})-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}^{\mathbf{2}}\vec{\mathbf{I}})$$