问题：（选作，写成 Note）首先推导出 TM_{mnp} 模式的波场；然后详细讨论一个立方体谐振腔中每一个共振模式的简并度（即有多少波场不同的模式对应同样一个共振频率？）；最后证明{m,n,p}中只能有一个为 0。

（一）对 TM 波:

$E_Z=[E_0\ \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{ikzZ}]\ e^{-i\omega t}$

加上 PEC 端面后，端面对电磁波进行反射，因此波导内的场现在由两部分叠加而成：一是沿着 z 方向传播的前进波；二是沿着 -z 方向的反射波。因此一般来说，有

$E_Z=E_{0z}+E'_{0z}=E_0\ \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{ikzZ}\ e^{-i\omega t}+E'_0\ \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-ikzZ}\ e^{-i\omega t}$

其中$E_{0z}=E_0\ \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{ikzZ}\ e^{-i\omega t}$，$E'_{0z}=E'_0\ \sin(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-ikzZ}\ e^{-i\omega t}$

两个系数应由在新加上的 2 个端面上的边界条件

$\overrightarrow{e_n}\times\vec{E}|_{z=0,d}=0$，$\overrightarrow{e_n}\cdot\vec{B}|_{z=0,d}=0$ $\Rightarrow E_x|_{z=0,d}=E_y|_{z=0,d}=0$ 决定（其他四个界面上的边界条件已经满足）。

E 场横向分量用纵向分量表达 $E_x=\frac{i}{k_c{}^2}(k_0\partial_y(cB_z)+k_z\partial_x E_z)$ $E_y=-\frac{i}{k_c{}^2}(k_0\partial_x(cB_z)-k_z\partial_y E_z)$

而B_z=0，所以 $E_x=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\partial_x E_z$，$E_y=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\partial_y E_z$。根据 E_z 的表达式，只要满足 $E_x=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\partial_x E_z$即可。

$E_x=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\partial_x E_z=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\partial_x E_{0z}+\frac{i}{k_c{}^2}(-k_z)\partial_x E'_{0z}$(因为前进波和反射波的波矢方向相反，$k_z$符号相反)

$=\frac{i}{k_c{}^2}k_z\frac{m\pi}{a}\ [E_0\ \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{ikzZ}-E'_0\ \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-ikzZ}]\ e^{-i\omega t}$

由 $E_x|_{z=0}=0$ 得 $E'_0=E_0$

由 $E_x|_{z=d}=0$ 得 $E_x|_{z=d}=2\frac{i}{k_c{}^2}k_z\frac{m\pi}{a}\ E_0\ \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(k_z d)\ e^{-i\omega t}=0$

则$\sin(k_z d)=0$ 所以$k_z=\frac{p\pi}{d}$，p=0,1,2,3⋯

最后得矩形谐振腔内场为

$$\begin{cases} E_x=-2\frac{k_z}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{d})e^{-i\omega t} \\ E_y=-2\frac{k_z}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{d})e^{-i\omega t} \\ E_z=-2E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{p\pi z}{d})\,e^{-i\omega t} \\ B_x=-2i\frac{c^2w}{k_c^2}\frac{n\pi}{b}E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{p\pi z}{d})e^{-i\omega t} \\ B_y=-2i\frac{c^2w}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{p\pi z}{d})e^{-i\omega t} \\ B_z=0 \end{cases}$$

B 场表达式中之所以出现虚数单位 i 是因为 B 场横向分量用纵向分量表达式

$cB_x=-\frac{i}{k_c{}^2}(k_0\partial_y E_z-k_z\partial_x(cB_z))$， $cB_y=\frac{i}{k_c{}^2}(k_0\partial_x E_z+k_z\partial_y(cB_z))$中与$\partial E_z$相乘的是 k_0，而 k_0 符号不因波的方向改变。

谐振腔允许的谐振频率和波长分别为

$$\begin{cases} w = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{d^2}} \\ \lambda = 2/\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{d^2}} \end{cases}$$(m,n,p 为正整数或零)

（二）对立方体谐振腔（a=b=d）TM_{mnp}波的形式为

$$\begin{cases} E_x = -2\frac{k_z}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ E_y = -2\frac{k_z}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ E_z = -2E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ B_x = -2i\frac{c^2 w}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ B_y = -2i\frac{c^2 w}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}E_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ B_z = 0 \end{cases}$$

TE_{mnp}波的形式为

$$\begin{cases} B_x = -2i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}B_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ B_y = -2i\frac{k_z}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}B_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ B_z = 2iB_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ E_x = 2\frac{w}{k_c^2}\frac{n\pi}{a}B_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ E_y = -2\frac{w}{k_c^2}\frac{m\pi}{a}B_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \\ E_z = 0 \end{cases}$$

以上两种模式下，谐振腔允许的谐振频率和波长相同，分别为

$$\begin{cases} w = \frac{c\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2+p^2} \\ \lambda = 2a/\sqrt{m^2+n^2+p^2} \end{cases}$$

对TM_{mnp}波，$E_z = -2E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{a})\cos(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \neq 0$，所以 m≥ 1，n≥ 1，p无其它限制，p≥ 0。此时谐振腔的最低价模式为TM_{110}。

对TE_{mnp}波，$B_z = 2iB_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{a})\sin(\frac{p\pi z}{a})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\mathrm{t}} \neq 0$，所以 m≥ 0，n≥ 0，p≥ 1。若 m,n 均为 0，则 E_x 和 E_y 同时为 0，所以谐振腔内不存在电磁波，不符要求。所以 m,n 只能有一个为 0。此时谐振腔的最低价模式为$\mathrm{T}E_{011}$或$\mathrm{T}E_{101}$。

综上，谐振腔的最低价模式简并度为 3，分别为TM_{110}、$\mathrm{T}E_{011}$或$\mathrm{T}E_{101}$，所以 m,n,p 最多只能有一个为 0。只要满足 m≥ 1，n≥ 1，p≥ 0（TM_{mnp}波）和 m,n 只能有一个为 0，p≥ 1

（对TE_{mnp}波），m,n,p 就可以组成谐振腔的一个模式。令$m^2+n^2+p^2$相等的模式属于同一简并，简并数就等于令以上平方和相等的 m,n,p 的组数。