第 14 讲 Note

杨晟鑫

09300190014

1. 建立多重球壳结构的磁标势解法的转移矩阵方法

将多重球壳从外到内分别标记为球壳 1、2、3、4……，半径分别为R_1、R_2、R_3、R_4……，将空间从外到内分割为区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ……，每个区域的磁导率分别为μ_1、μ_2、μ_3、μ_4……将每个区域内的磁标势φ按本征函数展开，保留一次项，且没有磁荷项，因此可将任一区域n的磁标势函数写成 $\varphi_n = \left(C_n r + \frac{D_n}{r^2}\right)\cos\theta \ \ (R_{n-1} < r < R_n) \qquad (n = 1,2,3 \ldots\ldots, R_0 = \infty)$.

则对于任一球壳n两边区域的磁标势φ_n和φ_{n+1}，它们的边界条件由以下条件给出：

$$\begin{cases} \varphi_n = \varphi_{n+1} & r = R_n \\ \mu_n \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial r} = \mu_{n+1} \dfrac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial r} & r = R_n \end{cases}$$

根据以上边界条件，可得$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_n + 2\mu_{n+1}}{3\mu_{n+1}} & 2\frac{(\mu_{n+1} - \mu_n)}{3\mu_{n+1} {R_n}^3} \\ \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{3\mu_{n+1}} {R_n}^3 & \frac{\mu_{n+1} + 2\mu_n}{3\mu_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$

令$\begin{pmatrix} \frac{\mu_n + 2\mu_{n+1}}{3\mu_{n+1}} & 2\frac{(\mu_{n+1} - \mu_n)}{3\mu_{n+1} {R_n}^3} \\ \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{3\mu_{n+1}} {R_n}^3 & \frac{\mu_{n+1} + 2\mu_n}{3\mu_{n+1}} \end{pmatrix} = T_{n+1,n}$，称为转移矩阵。

则$\begin{pmatrix} C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{pmatrix} = T_{n+1,n} \begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix}$

于是$\begin{pmatrix} C_n \\ D_n \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^{n-1} A_{k+1,k} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \end{pmatrix}$.

只要知道待定系数C_n，$D_n(n = 1,2,3 \ldots\ldots)$中的任意两个数值，就能利用转移矩阵求出所有$C_n$，$D_n$。一般情况下，最外层和最内层的系数课根据下面的边界条件确定。

$$\begin{cases} \varphi_1 \to \text{外加磁场贡献} & \mathrm{r} \to \infty \\ \varphi\text{有限} & \mathrm{r} \to 0 \end{cases}$$

2.　运用转移矩阵的方法，双层球壳把空间分成三个区域，引入磁标势

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1 = 0 & r > R' \\ \nabla^2\varphi_2 = 0 & R < r < R' \\ \nabla^2\varphi_1 = 0 & r < R\end{cases}$$

设$\begin{cases}\varphi_1 = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r^2}\right)\cos\theta \\ \varphi_2 = \left(C_2 r + \frac{D_2}{r^2}\right)\cos\theta \\ \varphi_3 = \left(C_3 r + \frac{D_3}{r^2}\right)\cos\theta\end{cases}$，由边界条件$\begin{cases}\varphi_1 \to -H_0 \mathrm{r}\cos\theta & \mathrm{r}\to\infty \\ \varphi_3\text{有限} & \mathrm{r}\to 0\end{cases}$

得 $\begin{cases}C_1 = -H_0 \\ D_3 = 0\end{cases}$。根据转换矩阵法，$\begin{pmatrix}C_3\\D_3\end{pmatrix} = T_{3,2}T_{2,1}\begin{pmatrix}C_1\\D_1\end{pmatrix}$，即

$$\begin{pmatrix}C_3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\mu_1+2\mu_2}{3\mu_2} & 2\frac{(\mu_2-\mu_1)}{3\mu_2\mathrm{R}^3} \\ \left(\frac{\mu_2-\mu_1}{3\mu_2}\right)\mathrm{R}^3 & \frac{\mu_2+2\mu_1}{3\mu_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mu+2\mu_1}{3\mu_1} & 2\frac{(\mu_1-\mu)}{3\mu_1\mathrm{R}'^3} \\ \frac{\mu_1-\mu}{3\mu_1}\mathrm{R}'^3 & \frac{\mu_1+2\mu}{3\mu_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-H_0\\D_1\end{pmatrix}$$，解得，

$$D_1 = \frac{(\mu_1-\mu)(\mu_2+2\mu_1)\mathrm{R}'^3 + (\mu_2-\mu_1)(\mu+2\mu_1)\mathrm{R}^3}{(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1+2\mu)\mathrm{R}'^3 + 2\mathrm{R}^3(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)}H_0\mathrm{R}'^3$$

因此问体系的有效偶极子为

$$\vec{m} = 4\pi D_1\hat{e_z} = 4\pi\frac{(\mu_1-\mu)(\mu_2+2\mu_1)\mathrm{R}'^3 + (\mu_2-\mu_1)(\mu+2\mu_1)\mathrm{R}^3}{(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1+2\mu)\mathrm{R}'^3 + 2\mathrm{R}^3(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)}H_0\mathrm{R}'^3\hat{e_z}$$

当$\mu = \mu_1\frac{(\mu_2+2\mu_1)\mathrm{R}'^3 + 2(\mu_2-\mu_1)\mathrm{R}^3}{(\mu_2+2\mu_1)\mathrm{R}'^3 - (\mu_2-\mu_1)\mathrm{R}^3}$ 时，$\vec{m} = 0$，有效磁偶极距消失。