轉移矩陣法求解多層磁（電）介質在外場中的響應問題

一、球坐標下轉移矩陣的形式

在均勻外場的情況下，我們可以設通解具有下面的形式

$$\varphi_l = \left(c_l r + \frac{d_l}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\varphi_{l+1} = \left(c_{l+1} r + \frac{d_{l+1}}{r^2}\right)\cos\theta$$

在$r = R_l$處的邊界條件為

$$\varphi_l\big|_{r=R_l} = \varphi_{l+1}\big|_{r=R_l}$$

$$\mu_l \frac{\partial\varphi_l}{\partial r}\bigg|_{r=R_l} = \mu_{l+1}\frac{\partial\varphi_{l+1}}{\partial r}\bigg|_{r=R_l}$$

即

$$c_l R_l + \frac{d_l}{R_l^3} = c_{l+1}R_l + \frac{d_{l+1}}{R_l^3}$$

$$\mu_l\left(c_l - \frac{2d_l}{R_l^3}\right) = \mu_{l+1}\left(c_{l+1} - \frac{2d_{l+1}}{R_l^3}\right)$$

寫為矩陣形式即為

$$\begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l^2} \\ \mu_l & -\frac{2\mu_l}{R_l^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l^2} \\ \mu_{l+1} & -\frac{2\mu_{l+1}}{R_l^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix}$$

或者

$$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l^2} \\ \mu_{l+1} & -\frac{2\mu_{l+1}}{R_l^3} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l^2} \\ \mu_l & -\frac{2\mu_l}{R_l^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{\mu_l}{3\mu_{l+1}} & \left(\frac{2}{3} - \frac{2\mu_l}{3\mu_{l+1}}\right)\frac{1}{R_l^3} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_l}{3\mu_{l+1}}\right)R_l^3 & \frac{1}{3} + \frac{2\mu_l}{3\mu_{l+1}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$$

令

$$T_l = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{\mu_l}{3\mu_{l+1}} & \left(\frac{2}{3} - \frac{2\mu_l}{3\mu_{l+1}}\right)\frac{1}{R_l^3} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{\mu_l}{3\mu_{l+1}}\right)R_l^3 & \frac{1}{3} + \frac{2\mu_l}{3\mu_{l+1}} \end{pmatrix}$$

稱爲轉移矩陣。可以看到轉移矩陣實際上只與該層的半徑和相鄰兩層的磁導率之比有關。所以

$$\begin{pmatrix} c_{l+1} \\ d_{l+1} \end{pmatrix} = T_l\begin{pmatrix} c_l \\ d_l \end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \prod_{l=1}^{N-1} T_l\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

最外層和最內層的邊界條件為

$$\begin{cases}\varphi_1|_{r=\infty} = -H_0 r\cos\theta \\ \varphi_N|_{r=0}\text{有限}\end{cases}$$

所以

$$c_1 = -H_0$$
$$d_N = 0$$

令

$$T = \prod_{l=1}^{N-1} T_l = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

則有

$$\begin{pmatrix} c_N \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} -H_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

解出其中的c_N和d_1得

$$\begin{cases} c_N = \dfrac{PN - MQ}{Q} H_0 = -\dfrac{\det(T)}{Q} H_0 \\ d_1 = \dfrac{P}{Q} H_0 \end{cases}$$

應用到 Lect14 中的例 2（作爲驗證），可得

$$T_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\mu_r + 1}{3\mu_r} & \dfrac{2(\mu_r - 1)}{3\mu_r R'^3} \\ \dfrac{\mu_r - 1}{3\mu_r} R'^3 & \dfrac{\mu_r + 2}{3\mu_r} \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + \mu_r}{3} & \dfrac{2(1 - \mu_r)}{3R^3} \\ \dfrac{1 - \mu_r}{3} R^3 & \dfrac{1 + 2\mu_r}{3} \end{pmatrix}$$

所以

$$T = T_2 T_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{(2+\mu_r)(2\mu_r+1) - 2(\mu_r-1)^2(\frac{R'}{R})^3}{9\mu_r} & \dfrac{2(2+\mu_r)(\mu_r-1)}{9\mu_r}(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{R^3}) \\ \dfrac{(2\mu_r+1)(\mu_r-1)}{9\mu_r}(R'^3 - R^3) & \dfrac{(2+\mu_r)(2\mu_r+1) - 2(\mu_r-1)^2(\frac{R'}{R})^3}{9\mu_r} \end{pmatrix}$$

帶入上面的通式中，經過十分複雜的代數運算，可以得到

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{H_0(\mu_r - 1)(1 + 2\mu_r)(R'^3 - R^3)}{(1 + 2\mu_r)(2 + \mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\frac{R}{R'})^3} \\ c_3 = \dfrac{-9\mu_r H_0}{(1 + 2\mu_r)(2 + \mu_r) - 2(\mu_r - 1)^2(\frac{R}{R'})^3} \end{cases}$$

二、課件中留下的問題

根據上面關於轉移矩陣的定義，可以求出

$$T_1=\begin{pmatrix}\frac{2\mu_1+\mu}{3\mu_1} & \frac{2(\mu_1-\mu)}{3\mu_1 R'^3}\\ \frac{\mu_1-\mu}{3\mu_1}R'^3 & \frac{\mu_1+2\mu}{3\mu_1}\end{pmatrix}$$

$$T_2=\begin{pmatrix}\frac{2\mu_2+\mu_1}{3\mu_2} & \frac{2(\mu_2-\mu_1)}{3\mu_2 R^3}\\ \frac{\mu_2-\mu_1}{3\mu_2}R^3 & \frac{\mu_2+2\mu_1}{3\mu_2}\end{pmatrix}$$

所以

$T=T_2T_1$

$$=\begin{pmatrix}\frac{(2\mu_2+\mu_1)(2\mu_1+\mu)}{9\mu_1\mu_2}+\frac{2(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)}{9\mu_1\mu_2}\left(\frac{R'}{R}\right)^3 & \frac{2(2\mu_2+\mu_1)(\mu_1-\mu)}{9\mu_1\mu_2 R'^3}+\frac{2(\mu_2-\mu_1)(\mu_1+2\mu_2)}{9\mu_1\mu_2 R^3}\\ \frac{(\mu_2-\mu_1)(2\mu_1+\mu)}{9\mu_1\mu_2}R^3+\frac{(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1-\mu)}{9\mu_1\mu_2}R'^3 & \frac{2(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)}{9\mu_1\mu_2}\left(\frac{R}{R'}\right)^3+\frac{(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1+2\mu)}{9\mu_1\mu_2}\end{pmatrix}$$

所以有

$$d_1=\frac{P}{Q}H_0=\frac{(\mu_2-\mu_1)(2\mu_1+\mu)R^3+(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1-\mu)R'^3}{2(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)\left(\frac{R}{R'}\right)^3+(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1+2\mu)}H_0=\widetilde{d_1}H_0$$

所以在$r>R'$的區域内

$$\varphi_1=-H_0 r\cos\theta+d_1\frac{\cos\theta}{r^2}=-H_0 r\cos\theta+\widetilde{d_1}\frac{H_0\cos\theta}{r^2}$$

所以

$$\mathrm{H}=-\nabla\varphi_1=\mathrm{H}_0-\widetilde{\mathrm{d}_1}\nabla\left(\frac{\mathrm{H}_0\cdot\mathrm{r}}{\mathrm{r}^3}\right)=\mathrm{H}_0-\widetilde{\mathrm{d}_1}\frac{\mathrm{r}^2\mathrm{H}_0-3(\mathrm{H}_0\cdot\mathrm{r})\mathrm{r}}{\mathrm{r}^5}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}=\mu\boldsymbol{H_0}-\mu\widetilde{d_1}\frac{r^2\boldsymbol{H}_0-3(\boldsymbol{H_0}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$$

磁偶極子的磁場滿足

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r^2\boldsymbol{m}-3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}$$

對比可得，該體系的有效磁偶極矩為

$$\boldsymbol{m}=\frac{4\pi\mu\widetilde{d_1}}{\mu_0}\boldsymbol{H_0}=\frac{4\pi\mu}{\mu_0}\frac{(\mu_2-\mu_1)(2\mu_1+\mu)R^3+(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1-\mu)R'^3}{2(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\mu)\left(\frac{R}{R'}\right)^3+(\mu_2+2\mu_1)(\mu_1+2\mu)}\boldsymbol{H_0}$$

令$\boldsymbol{m}=0$得到

$$\mu=\frac{2(\mu_2-\mu_1)R^3+(\mu_2+\mu_1)R'^3}{(\mu_2+\mu_1)R'^3-(\mu_2-\mu_1)R^3}\mu_1=\frac{(R'^3+2R^3)\mu_2+(R'^3-2R^3)\mu_1}{(R'^3-R^3)\mu_2+(R'^3+R^3)\mu_1}\mu_1$$

三、柱坐標下轉移矩陣的形式

柱坐標下，拉普拉斯方程的解具有下面的形式

$$\varphi=a_0+b_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\rho^n+\frac{b_n}{\rho^n}\right)\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\rho^n+\frac{d_n}{\rho^n}\right)\sin n\theta$$

在均勻外場下，容易知道，解一定具有下面的形式

$$\varphi_l = \left(a_1^{(l)}\rho + \frac{b_1^{(l)}}{\rho}\right)\cos\theta$$

簡便起見，將$a_1^{(l)}$和$b_1^{(l)}$記為a_l和b_l，所以

$$\varphi_l = \left(a_l\rho + \frac{b_l}{\rho}\right)\cos\theta$$

$$\varphi_{l+1} = \left(a_{l+1}\rho + \frac{b_{l+1}}{\rho}\right)\cos\theta$$

在$r = R_l$處，邊界條件為

$$\varphi_l|_{r=R_l} = \varphi_{l+1}|_{r=R_l}$$

$$\mu_l \frac{\partial\varphi_l}{\partial r}\bigg|_{r=R_l} = \mu_{l+1}\frac{\partial\varphi_{l+1}}{\partial r}\bigg|_{r=R_l}$$

即

$$a_l R_l + \frac{b_l}{R_l} = a_{l+1}R_l + \frac{b_{l+1}}{R_l}$$

$$\mu_l\left(a_l - \frac{b_l}{R_l^2}\right) = \mu_{l+1}\left(a_{l+1} - \frac{b_{l+1}}{R_l^2}\right)$$

寫為矩陣形式

$$\begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l} \\ \mu_l & -\frac{\mu_l}{R_l^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_l \\ b_l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l} \\ \mu_{l+1} & -\frac{\mu_{l+1}}{R_l^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{l+1} \\ b_{l+1}\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_{l+1} \\ b_{l+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l} \\ \mu_{l+1} & -\frac{\mu_{l+1}}{R_l^2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} R_l & \frac{1}{R_l} \\ \mu_l & -\frac{\mu_l}{R_l^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_l \\ b_l\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) & \frac{1}{2R_l^2}\left(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) \\ \frac{R_l^2}{2}\left(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_l \\ b_l\end{pmatrix}$$

令

$$T_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) & \frac{1}{2R_l^2}\left(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) \\ \frac{R_l^2}{2}\left(1-\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu_l}{\mu_{l+1}}\right)\end{pmatrix}$$

即為柱坐標下的轉移矩陣。他也只與該層的半徑和相鄰兩層的磁導率之比有關。
所以

$$\begin{pmatrix} a_{l+1} \\ b_{l+1}\end{pmatrix} = T_l\begin{pmatrix} a_l \\ b_l\end{pmatrix}$$

所以

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N\end{pmatrix} = \prod_{l=1}^{N-1} T_l\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1\end{pmatrix}$$

最外層和最內層的邊界條件為

$$\begin{cases} \varphi_1|_{r=\infty} = -H_0 r\cos\theta \\ \varphi_N|_{r=0}\text{有限} \end{cases}$$

所以

$$a_1 = -H_0$$
$$b_N = 0$$

設

$$T = \prod_{l=1}^{N-1} T_l = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

將有

$$\begin{pmatrix} a_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

得出

$$\begin{cases} a_N = \dfrac{PN-MQ}{Q}H_0 = -\dfrac{\det(T)}{Q}H_0 \\ b_1 = -\dfrac{P}{Q}H_0 \end{cases}$$

四、磁導率連續變化磁介質在均勻磁場中的相應

如果磁導率是連續變化的（簡便起見，這裡只考慮球對稱（球坐標）或者軸對稱（柱坐標））的情況。此時$\mu = \mu(r)$，拉帕拉斯方程變爲

$$\nabla\cdot\big(\mu(r)\nabla\varphi(r,\theta)\big) = 0$$

即

$$\nabla\mu(r)\cdot\nabla\varphi(r,\theta) + \mu(r)\nabla^2\varphi(r,\theta) = 0$$

它在球坐標下的分量形式為

$$\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\mu}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

分離變量，設$\varphi(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$，並在方程兩端乘以$\frac{r^2}{\mu R\Theta}$得到

$$\frac{d\mu}{dr}\frac{r^2R'}{\mu R} + \frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2R') + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') = 0$$
$$\frac{d\mu}{dr}\frac{r^2R'}{\mu R} + \frac{1}{R}\frac{d}{dr}(r^2R') = -\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') = l(l+1)$$

得到

$$\frac{d}{dr}(r^2R') + \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}r^2R' - l(l+1)R = 0$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\,\Theta') + l(l+1)\Theta = 0$$

第二個方程就是 Legendre 方程，如果已知$\mu(r)$的形式，方程 1 也可以解出，但有可能形式複雜，並且在帶入邊界條件時遇到困難。

可以通過將磁介質等分爲 N 份（N 足夠大）然後通過轉移矩陣的方法來數值解除這個問題的解。並且這個過程一定可以通過計算機編程來實現，從而避免複雜的方程 1 的求解和邊界條件的尋找和帶入。