

对谐振腔 TM_{mnp} 共振模式的讨论及模式简并度的讨论

09300190010 周之光

对 TM 波在谐振腔中, 可以认为 \vec{E}_z 由入射波与反射波合成, 设谐振腔为 $a \cdot b \cdot d$, 可写为:

$$E_z = [E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) e^{ik_z z} + E'_0 \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) e^{-ik_z z}] e^{-i\omega t} \quad (1)$$

由边界条件:

$$\begin{aligned} \vec{e}_n \times \vec{E} \Big|_{z=0,d} &= 0 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{B} \Big|_{z=0,d} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

可以导出:

$$\begin{aligned} E_x \Big|_{z=0,d} &= 0 \\ E_y \Big|_{z=0,d} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

将 E_x , E_y 代入边界条件, 可以得到:

$$\begin{aligned} E_0 &= E'_0 \\ \sin ik_z d &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

由 (4) 式中的第二式, 可以得到:

$$k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

因此有电场分布:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -2 \frac{m\pi}{a} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \cos(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{d}) \\ E_{0y} &= -2 \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k_c^2} E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a}) \cos(\frac{n\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{d}) \\ E_{0z} &= 2E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \cos(\frac{p\pi z}{d}) \end{aligned} \quad (6)$$

由 (6) 式最后一式中可以看出, p 可以等于零, 但 m 和 n 不能为零, 结合课件中 TE 波的结论, m, n, p 三者之中只有一个可以等于 0。

接下来对 TM_{mnp} 的共振模式的简并度进行讨论:

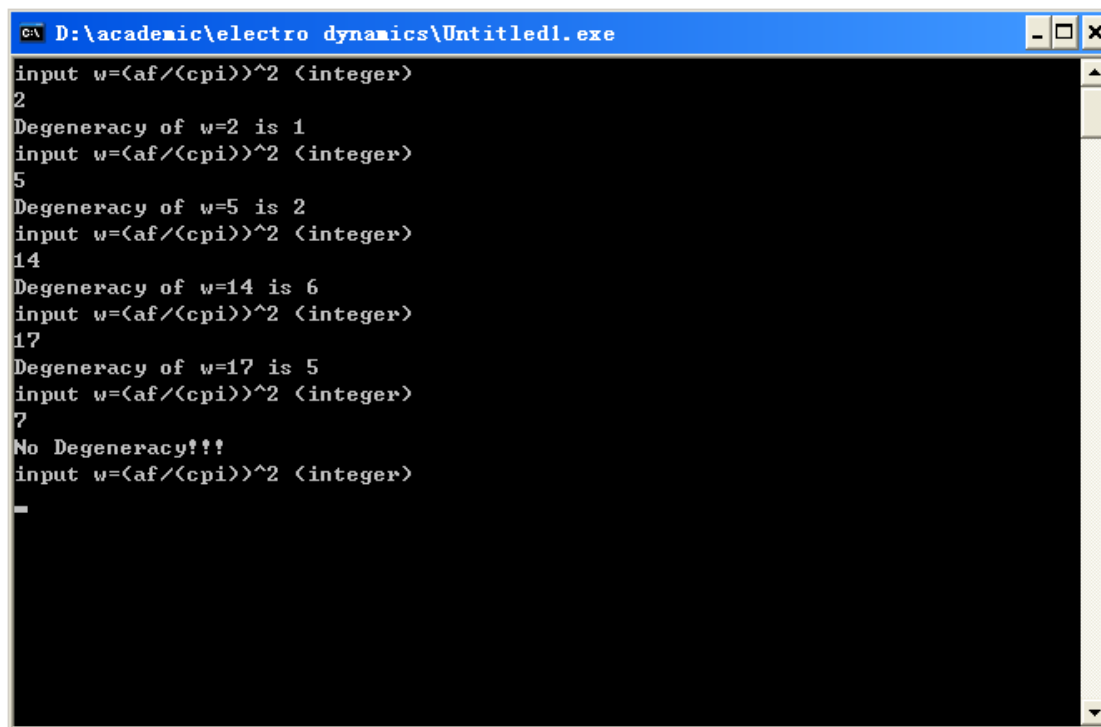
对于 TM_{mnp} 入射的谐振腔, 其允许存在的频率为:

$$\omega = c\pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (7)$$

对于立方体谐振腔， $a = b = d$ ，(7) 可改写为：

$$\omega = \frac{c\pi}{a} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (8)$$

因此要求其简并度，需要以 $(0,0,0)$ 为原点，以 $\frac{\omega a}{c\pi}$ 为半径作球，第一象限在球面上的整数点的个数就是其简并度，类似态密度的计算。当然态密度的计算在 m, n, p 很小时很难计算，因此通过一个小程序，我们可以获得在某一个 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 值情况下获得对应频率是否是允许的频率，如果是，其简并度又是多少。部分运行结果如下：



```
D:\academic\electro dynamics\Untitled1.exe
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
2
Degeneracy of w=2 is 1
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
5
Degeneracy of w=5 is 2
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
14
Degeneracy of w=14 is 6
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
17
Degeneracy of w=17 is 5
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
7
No Degeneracy!!!
input w=(af/<cpi>)^2 <integer>
-
```

选择 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 为 2 时，其简并度为 1，选择 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 为 5 时，其简并度为 2，选择 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 为 14 时，其简并度为 6，选择 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 为 17 时，其简并度为 5，选择 $(\frac{\omega a}{c\pi})^2$ 为 7 时，其简并度为 0，也即对应不为允许的频率。以上结果与实际计算值完全一致。