对谐振腔TM_{mnp}共振模式的讨论及模式简并度的讨论

09300190010 周之光

对TM 波在谐振腔中，可以认为$\vec{E}_z$由入射波与反射波合成，设谐振腔为$a \cdot b \cdot d$ ，可写为：

$$E_z = [E_0 \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{ik_z z} + E_0' \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})e^{-ik_z z}]e^{-i\omega t} \quad (1)$$

由边界条件：

$$\vec{e}_n \times \vec{E}\Big|_{z=0,d} = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot \vec{B}\Big|_{z=0,d} = 0 \quad (2)$$

可以导出：

$$E_x\Big|_{z=0,d} = 0$$

$$E_y\Big|_{z=0,d} = 0 \quad (3)$$

将E_x， E_y代入边界条件，可以得到：

$$E_0 = E_0'$$

$$\sin k_z d = \quad (4)$$

由（4）式中的第二式，可以得到：

$$k_z = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0,1,2,3,\ldots) \quad (5)$$

因此有电场分布：

$$E_{0x} = -2\frac{m\pi}{a}\frac{k_z}{k_c^2}E_0\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{d})$$

$$E_{0y} = -2\frac{n\pi}{b}\frac{k_z}{k_c^2}E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{p\pi z}{d}) \quad (6)$$

$$E_{0x} = 2E_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\cos(\frac{p\pi z}{d})$$

由（6）式最后一式中可以看出，p 可以等于零，但 m 和 n 不能为零，结合课件中 TE 波的结论，m，n，p 三者之中只有一个可以等于 0。

接下来对TM_{mnp}的共振模式的简并度进行讨论：

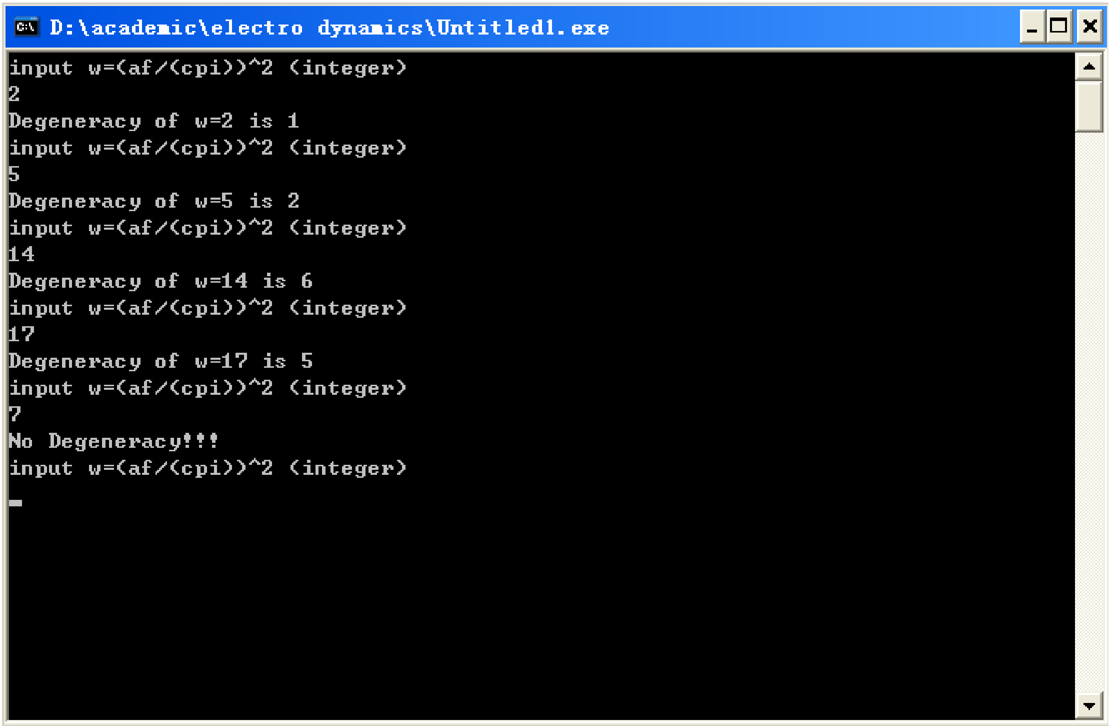
对于TM_{mnp}入射的谐振腔，其允许存在的频率为：

$$\omega = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}} \quad (7)$$

对于立方体谐振腔，$a = b = d$，（7）可改写为：

$$\omega = \frac{c\pi}{a}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \tag{8}$$

因此要求其简并度，需要以$(0,0,0)$为原点，以$\frac{\omega a}{c\pi}$为半径作球，第一象限在球面上的整数点的个数就是其简并度，类似态密度的计算。当然态密度的计算在 m，n，p 很小时很难计算，因此通过一个小程序，我们可以获得在某一个$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$值情况下获得对应频率是否是允许的频率，如果是，其简并度又是多少。部分运行结果如下：



选择$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$为 2 时，其简并度为 1，选择$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$为 5 时，其简并度为 2，选择$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$为 214 时，其简并度为 6，选择$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$为 17 时，其简并度为 5，选择$(\frac{\omega a}{c\pi})^2$为 7 时，其简并度为 0，也即对应不为允许的频率。以上结果与实际计算值完全一致。