

现代张量分析在连续介质力学中的若干应用*

谢锡麟

(复旦大学 力学与工程科学系, 上海, 200433, Email: xiexilin@fudan.edu.cn)

摘要: 本文将叙述 Euclid 空间上张量场分析、二维曲面 (Riemann 流形) 上的张量场分析的相关知识体系要点, 以及作为应用的可变形边界局部动力学有关研究的理论基础等。张量分析是我国著名力学家周培源先生常用的数学及力学分析方法, 亦谨以本位表示为前辈诚挚的仰慕之情。

关键词: 连续介质力学 ; Euclid 空间上张量场分析 ; 二维曲面上张量场分析 ; 涡量与涡动力学

1 引言

一般连续介质力学的理论体系, 引入初始物理构形以及当前物理构形, 对二者可再分别引入初始参数构形以及当前参数构形, 物理构形与参数构形之间的关系即为一般曲线坐标系, 数学上对应为有限维 Euclid 空间之间二个开集之间的微分同胚[1-2]。

*本研究受国家自然科学基金面上项目 (11172069), 上海市教委 2011 年上海高校本科重点教学改革项目的资助。

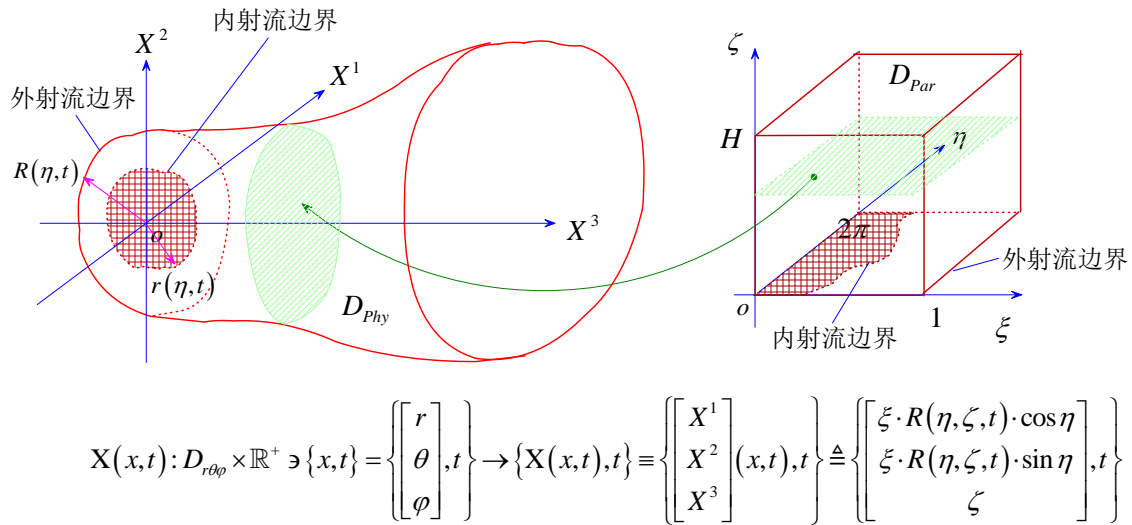


图 1 边界可作有限变形运动的射流其当前物理构形所对应曲线坐标系的选取

为研究边界的有限变形运动对介质运动的影响，我们对于当前物理构形引入显含时间的曲线坐标系，表现为时空空间中的微分同胚。通过构造适当的曲线坐标系可将物理空间中几何形态不规则且随时间变化的运动区域微分同胚至参数空间中的几何形态规则且不随时间变化的参数区域。如图 1 所示，对于研究出口边界可作有限变形运动的射流场，其当前物理构形显得极其复杂，但我们可以考虑如图所示的对应于当前物理构形的显含时间的曲线坐标系，使得当前参数构形不仅几何形态规则而且不随时间变化[3]。进一步将连续介质运动的控制方程按曲线坐标系的局部基展开就可获得定义于参数区域上的控制方程。特别地，可基于非完整系理论系统获得控制方程在一般单位正交系（非完整系）下的分量方程，也适用于按时均分解的湍流控制方程。我们亦可将把相关方法推广至张量梯度的多点表示形式。

以上所述，一定程度上归纳了现代张量分析在现代连续介质力学中有关应用的基本思想及方法。本文将叙述 Euclid 空间上张量场分析、二维曲面（Riemann 流形）上的张量场分析的相关知识体系要点，以及作为应用的可变形边界局部动力学有关研究的理论基础。

2 Euclid 空间上的张量场分析

◇ 曲线坐标系

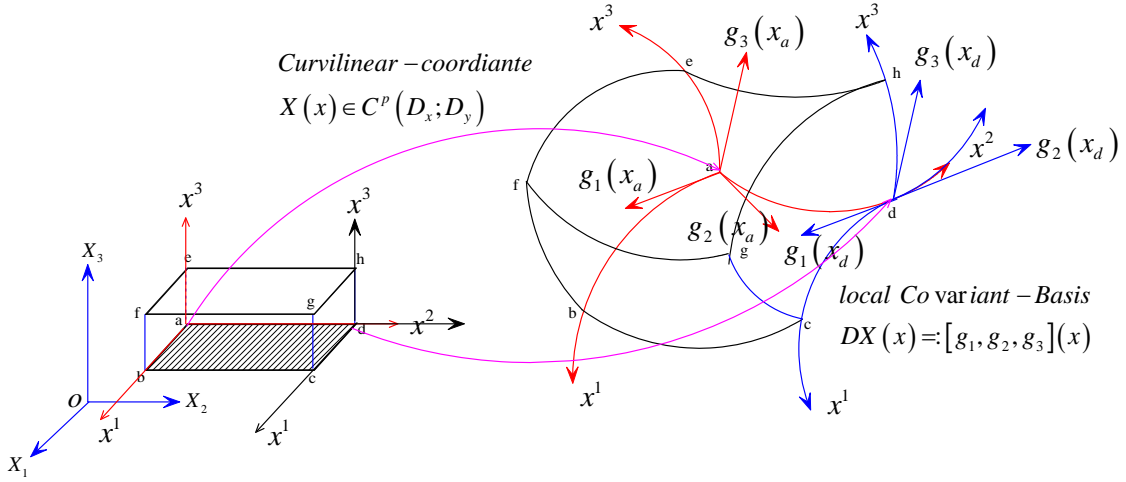


图 2 三维 Euclid 空间中一般曲线坐标系示意图

可基于有限维 Euclid 空间中微分同胚的映照理解曲线坐标系 $X(x) \in C^p(D_x, D_y)$ 。如图 2 所示，曲线坐标系的 Jacobian 矩阵的每列直接定义的局部协变基向量。按线性代数，即得对任一局部协变基 $\{g_i\}$ ，存在唯一的局部逆变基 $\{g^j\}$ ，满足 $(g_i, g^j)_{\mathbb{R}^3} = \delta_i^j$ 。以此，按有限

维 Euclid 空间中的微分学，即可引入 Christoffel 符号的定义： $\mathbb{R}^3 \ni \frac{\partial g_i}{\partial x^j}(x) =: \begin{cases} \Gamma_{js}^i g^s \\ \Gamma_{ji,s} g^s \end{cases}$ 。

◇ **张量函数空间的范数**

张量场一般定义如下所述：

$$\Phi(x): \mathbb{R}^m \supset \Omega \ni x \mapsto \Phi(x) \triangleq \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) \in T^3(\mathbb{R}^m)$$

此处，不失一般性以三阶张量为例。我们可以考虑建立张量赋范线性空间，亦即引入张量范数：

$$|\Phi|_{T^p(\mathbb{R}^m)} \triangleq \sqrt{\Phi \odot \Phi} = \sqrt{\Phi^{i_1 \dots i_p} \Phi_{i_1 \dots i_p}}, \quad \forall \Phi \in T^p(\mathbb{R}^m)$$

对于简单张量，则有： $|\xi \otimes \eta \otimes \zeta|_{T^3(\mathbb{R}^m)} = |\xi|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\eta|_{\mathbb{R}^m} \cdot |\zeta|_{\mathbb{R}^m}$ 。籍此，可基于一般赋范线性空间上的微分学研究张量场以及一般张量映照的相关性质。

◇ **张量场可微性**

按微分学，可估计因位置发生微小变化，而引起的张量的变化：

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + \square_l \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) \cdot h^l + o(|h|_{\mathbb{R}^m}) \in T^3(\mathbb{R}^m)$$

此处 $\square_l \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}(x) = \frac{\partial \Phi_{\cdot j}^{i \cdot k}}{\partial x^l}(x) + \Gamma_{ls}^i \Phi_{\cdot j}^{s \cdot k} - \Gamma_{lj}^s \Phi_{\cdot s}^{i \cdot k} + \Gamma_{ls}^k \Phi_{\cdot j}^{i \cdot s}$ ，即为一般定义的张量分量的协变

导数。进一步，可有：

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dx}(x)(h) &= [\square_l \Phi^{i \cdot k}_j(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k \otimes g^l(x)] \cdot [h^q g_q(x)] =: (\Phi \otimes \square)(x) \cdot H \\ &= [h^q g_q(x)] \cdot [\square_l \Phi^{i \cdot k}_j(x) g^l \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k] =: H \cdot (\square \otimes \Phi)(x) \end{aligned}$$

由此，张量场梯度可以认为是张量场导数的内蕴表达形式。

✧ **张量场方向导数**

基于张量场可微性，可以定义张量场方向导数：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \lambda \cdot \vec{l}_l) - \Phi(x)}{\lambda} = \square_l \Phi^{i \cdot k}_j(x) g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) := \frac{\partial \Phi}{\partial x^l}(x) \in T^3(\mathbb{R}^m)$$

由此，可基于形式运算，定义任意张量场的任意场论运算：

$$\square \circ - \Phi = \left(g^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \circ - \Phi \triangleq g^l \circ - \frac{\partial \Phi}{\partial x^l}(x)$$

✧ **场论恒等式推导基本要素**

一般 Euclid 空间中，场论恒等式的推导，可基于以下三方面要素：

① 置换符号同 Kroneck 符号之间的关系

$$\epsilon^{ijk} \cdot \epsilon_{ipq} = \delta_p^j \delta_q^k - \delta_p^k \delta_q^j = e^{ijk} \cdot e_{ipq}$$

此处 e^{ijk} 以及 δ_q^k 分别代表置换符号以及 Kronecker 符号； ϵ^{ijk} 为 Eddington 张量的逆变分量。

② Ricci 引理

$$\begin{cases} \frac{\partial \epsilon}{\partial x^l}(x) = \frac{\partial}{\partial x^l} (\epsilon^{ijk}(x) g_i \otimes g_j \otimes g_k(x)) = \nabla_l \epsilon^{ijk}(x) g_i \otimes g_j \otimes g_k(x) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x^l}(x) = \frac{\partial}{\partial x^l} (g_{ij}(x) g^i \otimes g^j(x)) = \nabla_l g_{ij}(x) g^i \otimes g^j(x) = 0 \end{cases}$$

亦即，Eddington 张量场 $\epsilon^{ijk}(x) g_i \otimes g_j \otimes g_k(x)$ 以及度量张量场 $g_{ij}(x) g^i \otimes g^j(x)$ 对所有的方向导数均为零。

③ 张量场分量之协变导数作用可以交换次序

$$\nabla_p \nabla_q = \nabla_q \nabla_p$$

本性质直接反映了 Euclid 空间或 Euclid 流形的基本几何特性。

✧ **非完整系理论基本要素**

① 完整系中定义的张量场梯度及其整体表示的不变性

$$\nabla \otimes \Phi(x) := \nabla_l \Phi^{i \cdot k}_j(x) g^l \otimes g_i \otimes g^j \otimes g_k(x) =: \nabla_{(\theta)} \Phi^{(\alpha) \cdot (\gamma)}_{(\beta)}(x) g^{(\theta)} \otimes g_{(\alpha)} \otimes g^{(\beta)} \otimes g_{(\gamma)}(x)$$

此处 $\nabla_{(\theta)} \Phi_{(\beta)}^{(\alpha)\cdot(\gamma)}(x) = C_{(\theta)}^l C_i^{(\alpha)} C_{(\beta)}^j C_k^{(\gamma)}(x) \cdot \nabla_l \Phi_{ij}^{i\cdot k}(x)$ 表示张量场梯度 $\nabla \otimes \Phi(x)$ 相对于非完整基 $\{g_{(\alpha)}\}$ 的张量分量。

② 非完整基中的相关运算定义

形式偏导数: $\partial_{(\theta)} := C_{(\theta)}^l \partial_l$

形式 Christoffel 符号:

$$\Gamma_{(\alpha)(\beta)}^{(\theta)}(x) := C_k^{(\theta)} C_{(\alpha)}^i C_{(\beta)}^j(x) \cdot \Gamma_{ij}^k(x) - C_{(\alpha)}^i C_{(\beta)}^j(x) \cdot \frac{\partial C_j^{(\theta)}}{\partial x^i}(x)$$

形式协变导数 (亦即张量场梯度相对于非完整基的分量):

$$\nabla_{(\theta)} \Phi_{(\beta)}^{(\alpha)\cdot(\gamma)}(x) := \partial_{(\theta)} \Phi_{(\beta)}^{(\alpha)\cdot(\gamma)}(x) + \Gamma_{(\theta)(\mu)}^{(\alpha)} \Phi_{(\beta)}^{(\mu)\cdot(\gamma)} - \Gamma_{(\theta)(\beta)}^{(\mu)} \Phi_{(\mu)}^{(\alpha)\cdot(\gamma)} + \Gamma_{(\theta)(\mu)}^{(\gamma)} \Phi_{(\beta)}^{(\alpha)\cdot(\mu)}$$

实际理论分析或数值分析中, 完整基为正交基, 而非完整基为其单位正交基化。由此, 可得在非完整的单位正交基中, 形式偏导数、形式 Christoffel 符号以及形式协变导数为:

$$\partial_{(\theta)} := C_{(\theta)}^l \partial_l = \frac{1}{\sqrt{g_{(\theta\theta)}}} \partial_\theta$$

$$\Gamma_{(\alpha)(\beta)}^{(\theta)}(x) = \Gamma_{(\alpha)(\beta),(\theta)} =: \Gamma \langle \alpha\beta\gamma \rangle, \text{ 有: } \Gamma \langle \alpha\beta\alpha \rangle = -\Gamma \langle \alpha\alpha\beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \cdot \frac{\partial \ln \sqrt{g_{\alpha\alpha}}}{\partial x^\beta}$$

$$\nabla \langle \theta \rangle \Phi \langle \alpha\beta\gamma \rangle(x) := \partial_{(\theta)} \Phi \langle \alpha\beta\gamma \rangle(x) + \Gamma \langle \theta\mu\alpha \rangle \Phi \langle \mu\beta\gamma \rangle + \Gamma \langle \theta\mu\beta \rangle \Phi \langle \alpha\mu\gamma \rangle + \Gamma \langle \theta\mu\gamma \rangle \Phi \langle \alpha\beta\mu \rangle$$

湍流研究中, 经常需要对相关物理量进行时均分解, 并且根据实际问题往往需要对非 Cartesian 坐标系中的 Navier-Stokes 方程等分量方程进行时间分解, 以获得平均量方程以及脉动量方程等[4]。对此, 可以先明确:

$$\overline{\Psi \circ -(\square \otimes \Phi)} = \overline{(\bar{\Psi} + \psi) \circ -(\square \otimes (\bar{\Phi} + \varphi))} = \bar{\Psi} \circ -(\square \otimes \bar{\Phi}) + \overline{\psi \circ -(\square \otimes \varphi)}$$

此处, $\Psi = \bar{\Psi} + \psi$, $\Phi = \bar{\Phi} + \varphi$ 表示二个任意张量场的时均分解, $\bar{\Psi}$ 和 $\bar{\Phi}$ 为时间平均量, ψ

和 φ 为瞬时量。以上结论获得, 基于 $\overline{\varphi \circ -(\square \otimes \bar{\Phi})} = \bar{\varphi} \circ -(\square \otimes \bar{\Phi}) = 0$ 。按以上结论, 结合非完整系理论, 易于获得一般非完整的单位正交系下的分量方程。

◇ 张量的二点形式表示及其基本微分学运算

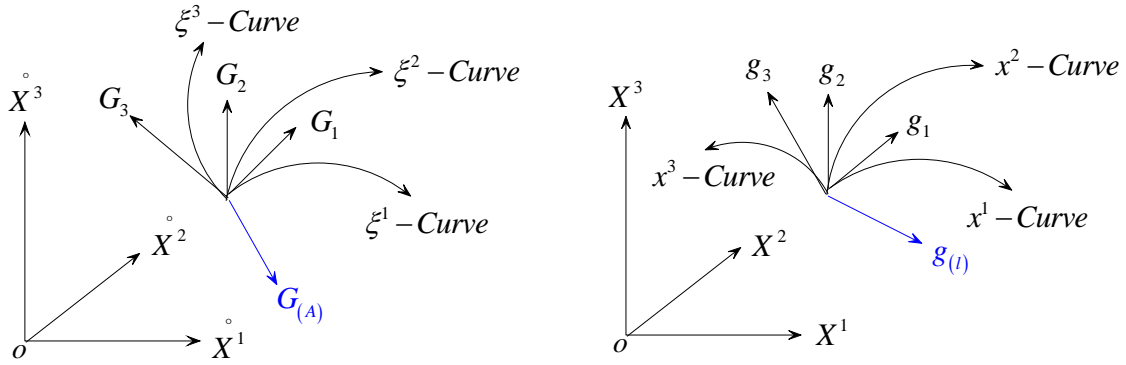


图 3 初始物理构形以及当前物理对应曲线坐标系所诱导的局部基示意图

一般连续介质理论，常引入初始物理构形及其曲线坐标系 $\overset{\circ}{X} = \overset{\circ}{X}(\xi) \in C^p\left(\overset{\circ}{V}_\xi, \overset{\circ}{V}\right)$ ，以

及当前物理构形及其曲线坐标系 $X(x) \in C^p\left(\overset{t}{V}_x, \overset{t}{V}\right)$ ；由此，不同的曲线坐标系则可以诱导独

立的局部基，如 $\{G_A(\xi)\}$ 及 $\{g_i(x)\}$ ，如图 3 所示。

对任意张量，如其表达式中构成简单张量的不同向量来源于不同的基，如：
 $\Phi(\xi, x, t) = \Phi_{jB}^{iA}(\xi, x, t) g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes G_A(\xi) \otimes G^B(\xi)$ ，则可引入全偏导数的定义，
并可得其计算式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x^l}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x^l} [\Phi(\xi(x, t), x, t)] = \frac{\partial \Phi}{\partial x^l}(\xi(x, t), x, t) + \frac{\partial \xi^L}{\partial x^l}(x, t) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \xi^L}(\xi(x, t), x, t) \\ &= \left[\nabla_l \Phi_{jB}^{iA}(\xi(x, t), x, t) + \frac{\partial \xi^L}{\partial x^l}(x, t) \cdot \overset{\circ}{\nabla}_L \Phi_{jB}^{iA}(\xi(x, t), x, t) \right] \\ &\quad g_i(x, t) \otimes g^j(x, t) \otimes G_A(\xi) \otimes G^B(\xi) \\ &=: \square_l \Phi_{jB}^{iA}(\xi(x, t), x, t) g_i(x, t) \otimes g^j(x, t) \otimes G_A(\xi) \otimes G^B(\xi) \end{aligned}$$

此处，全协变导数具有表达式：

$$\square_l \Phi_{jB}^{iA} = \nabla_l \Phi_{jB}^{iA} + \frac{\partial \xi^L}{\partial x^l}(x) \cdot \overset{\circ}{\nabla}_L \Phi_{jB}^{iA},$$

式中

$$\nabla_l \Phi_{jB}^{iA} := \frac{\partial \Phi_{jB}^{iA}}{\partial x^l} + \Gamma_{ls}^i \Phi_{jB}^s A - \Gamma_{lj}^s \Phi_s^i A, \text{ 可称对应当前构形的协变导数；}$$

$\overset{\circ}{\nabla}_L \Phi_{jB}^{iA} := \frac{\partial \Phi_{jB}^{iA}}{\partial \xi^L} + \Gamma_{LS}^A \Phi_{jB}^{iS} - \Gamma_{LB}^S \Phi_{jS}^{iA}$, 可称对应初始构形的协变导数。

◇ 张量二点形式表示下的非完整系理论

类比于一般非完整系理论, 可以将相关思想及方法推广至张量的二点表示形式。首先, 按非完整系定义张量梯度; 其次, 按坐标变化规则确定非完整系下的分量; 然后, 推导得非完整基下的协变导数计算式。

$$\begin{aligned} \square \otimes \Phi &= \square_l \Phi_{jB}^{iA}(\xi, x) g^l(x) \otimes g_i(x) \otimes g^j(x) \otimes G_A(\xi) \otimes G^B(\xi) \\ &= \square_{(l)} \Phi_{(j)(B)}^{(i)(A)}(\xi, x) g^{(l)}(x) \otimes g_{(i)}(x) \otimes g^{(j)}(x, t) \otimes G_{(A)}(\xi) \otimes G^{(B)}(\xi) \end{aligned}$$

此处, $\square_{(l)} \Phi_{(j)(B)}^{(i)(A)} = \nabla_{(l)} \Phi_{(j)(B)}^{(i)(A)} + \frac{\partial \xi^{(L)}}{\partial x^{(l)}} \cdot \overset{\circ}{\nabla}_{(L)} \Phi_{(j)(B)}^{(i)(A)}$,

式中 $\frac{\partial \xi^{(L)}}{\partial x^{(l)}} = C_R^{(L)} C_{(l)}^R \frac{\partial \xi^R}{\partial x^l}(x, t)$, $G^{(L)} =: C_R^{(L)} G^R$, $g^l = C_{(l)}^t g^{(l)}$ 。

对于完整系为正交基, 非完整系为单位正交基情形, 则有:

$$\square \langle l \rangle \Phi \langle ijAB \rangle = \nabla \langle l \rangle \Phi \langle ijAB \rangle + \frac{\partial \xi^{(L)}}{\partial x^{(l)}} \cdot \overset{\circ}{\nabla} \langle L \rangle \Phi \langle ijAB \rangle$$

式中

$$\frac{\partial \xi^{(L)}}{\partial x^{(l)}} = \frac{\sqrt{G_{LL}}}{\sqrt{g_{ll}}} \frac{\partial \xi^L}{\partial x^l}(x, t)$$

$$\nabla \langle l \rangle \Phi \langle ijAB \rangle = \frac{1}{\sqrt{g_{ll}}} \frac{\partial \Phi \langle ijAB \rangle}{\partial x^l}(\xi, x, t) + \Gamma \langle lsi \rangle \Phi \langle sjAB \rangle + \Gamma \langle lsj \rangle \Phi \langle isAB \rangle$$

$$\overset{\circ}{\nabla} \langle L \rangle \Phi \langle ijAB \rangle = \frac{1}{\sqrt{G_{LL}}} \frac{\partial \Phi \langle ijAB \rangle}{\partial \xi^L}(\xi, x, t) + \overset{\circ}{\Gamma} \langle LSA \rangle \Phi \langle sjSB \rangle + \overset{\circ}{\Gamma} \langle LSB \rangle \Phi \langle ijAS \rangle$$

上述理论应很适合一般连续介质运动的 Lagrange 刻画。按郭仲衡著《非线性弹性理论》[2], 基于 Lagrange 观点求解连续介质有限变形动力学的基本方法, 归纳如下:

① 质量守恒: $\rho(\xi, t) |F|(\xi, t) = \overset{\circ}{\rho}(\xi)$, 此处 $\overset{\circ}{\rho}(\xi)$ 为初始密度分布。

② 动量守恒: $\overset{\circ}{\rho} \cdot a(\xi, t) = \overset{\circ}{\rho} \cdot f_m + \tau \cdot \square = \overset{\circ}{\rho} \cdot f_m + (F \cdot T) \cdot \square$,

此处 $\tau = t \cdot (|F| F^{-*})$, $T = F^{-} \cdot t \cdot (|F| F^{-*})$ 分别为 Piola-Kirchhoff 第一、第二类应力张量。

③ 能量守恒: $\dot{\Sigma} = \tau : \dot{F} = T : \dot{E}$, 此处 Σ 为初始构形中单位体积的内能, E 为 Almansi 应力张量。

能量守恒结合本构关系, 可以确定动量守恒中的 Piola-Kirchhoff 第一类、第二类应力张量的表达形式, 可由变形梯度表示。由此, 求解连续介质运动的 Lagrange 刻画, 应该就是求解运动 $x = x(\xi, t)$, 因为无论是变形梯度, 还是应力都可以由此计算。

对上述过程, 我们可以考虑在非完整的单位正交系中展开相关方程。如对于变形梯度, 可具有形式:

$$F = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}(\xi, t) g_i \otimes G^A = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^A}(\xi, t) \sqrt{g_{ii}} \sqrt{G^{AA}} e\langle i \rangle \otimes e\langle A \rangle =: F \langle iA \rangle e\langle i \rangle \otimes e\langle A \rangle$$

此处设初始物理构形以及当前物理构形中局部均为完整的正交基, 然后施行非完整的单位正变化过程。

3 二维曲面 (Riemann 流形) 上的张量场分析

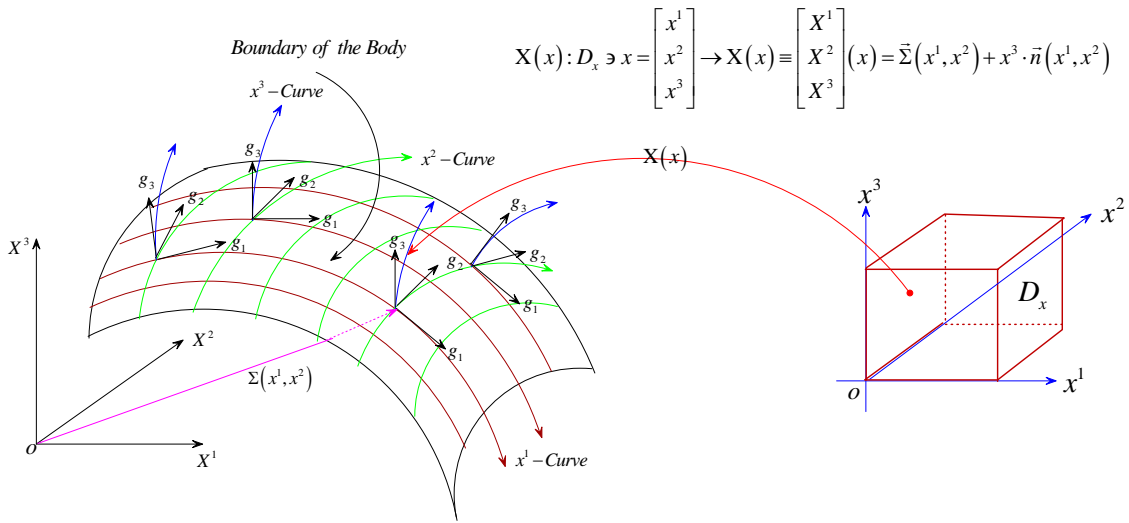


图 4 二维曲面上标架及其基此构建的半正交三维坐标系示意图

◇ 曲面上局部标架

如图 4 所示, 一般三维 Euclid 空间中曲面的向量值映照表示如下:

$$\Sigma(x_\Sigma) : \mathbb{R}^2 \supset D_\Sigma \ni x_\Sigma = \begin{bmatrix} x_\Sigma^1 \\ x_\Sigma^2 \end{bmatrix} \mapsto \Sigma(x_\Sigma) \triangleq \begin{bmatrix} X_\Sigma^1 \\ X_\Sigma^2 \\ X_\Sigma^3 \end{bmatrix} (x_\Sigma) \in \mathbb{R}^3$$

此处 D_Σ 为曲面参数域。由此，向量值映照的 Jacobian 矩阵，可定义局部基向量（协变基及逆变基）以及由此构成的切空间：

$$T_x \Sigma = \text{span} \left\{ g_i(x) \triangleq \frac{\partial X}{\partial x^i}(x) \right\}_{i=1}^{m-1} = \text{span} \left\{ g^i(x) \mid (g_j, g^i) = \delta_j^i \right\}_{i=1}^{m-1}$$

◇ **曲面第一、第二基本形式**

可定义曲面第一、第二基本不变量

$$\begin{cases} A = [g_{ij}] = \left[\left(\frac{\partial X}{\partial x^i}(x), \frac{\partial X}{\partial x^j}(x) \right) \right] \in PSym \\ B = [b_{ij}] = \left[\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^i \partial x^j}(x), n(x) \right) \right] \in Sym \end{cases}$$

现以矩阵形式表示。基于线性代数中，同时对角化的结论，亦即：

$$\forall \begin{cases} A \in PSym \\ B \in Sym \end{cases}, \exists G \text{ 非奇异, s.t. } \begin{cases} G^T A G = I_2 \\ G^T B G = [\lambda_1, \lambda_2]^T \end{cases}$$

可定义 Gauss 曲率 $K_G \triangleq \lambda_1 \lambda_2$ 以及平均曲率 $H \triangleq \lambda_1 + \lambda_2$

◇ **曲面局部标架运动方程**

按一般 Euclid 空间上的微分学，可有：

$$\begin{cases} \frac{\partial g_i}{\partial x^j}(x) := +\Gamma_{ji}^k(x) g_k(x) + b_{ji}(x) n(x) = \Gamma_{ji,k}(x) g^k(x) + b_{ji}(x) n(x) \\ \frac{\partial g^i}{\partial x^j}(x) := -\Gamma_{jk}^i(x) g^k(x) + b_j^i(x) n(x) \\ \frac{\partial n}{\partial x^j}(x) := -b_{ji}(x) g^j(x) = -b_j^i(x) g_i(x) \end{cases}$$

此处 $b_j^i := g^{ik} b_{jk}$, $\Gamma_{jk}^i := \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^j}, g^i \right)_{\mathbb{R}^3}$, $\Gamma_{jk,i} := \left(\frac{\partial g_k}{\partial x^j}, g_i \right)_{\mathbb{R}^3}$

按张量赋范线性空间上的微分学，基于上述曲面局部标架运动方程，我们可以获得定义于曲面之上的张量场沿曲面坐标线的偏导数：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\Phi^i_{.j} g_i \otimes g^j + \Phi^3_{.j} n \otimes g^j + \Phi^i_{.3} g_i \otimes n \right](x) \\
 &= \left[\frac{\partial \Phi^i_{.j}}{\partial x^i}(x) g_i \otimes g^j + \Phi^i_{.j} \frac{\partial g_i}{\partial x^i}(x) \otimes g^j + \Phi^i_{.j} g_i \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(x) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\partial \Phi^3_{.j}}{\partial x^i}(x) n \otimes g^j + \Phi^3_{.j} \frac{\partial n}{\partial x^i}(x) \otimes g^j + \Phi^3_{.j} n \otimes \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(x) \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\partial \Phi^i_{.3}}{\partial x^i}(x) g_i \otimes n + \Phi^i_{.3} \frac{\partial g_i}{\partial x^i}(x) \otimes n + \Phi^i_{.3} g_i \otimes \frac{\partial n}{\partial x^i}(x) \right]
 \end{aligned}$$

本文未涉及连续介质几何形态为曲面（二维 Riemann 流形）的有限变形理论，对此可参阅文献[5]，涉及更为系统的二维 Riemann 流形上的张量场分析。

4 可变形边界局部动力学有关研究的理论基础

利用图 4 所示的基于曲面的半正交坐标系，我们可开展涡量与涡动力学观点下，自身可作有限变形的运动的曲面（固体壁面）上的局部动力学行为。相关理论结果，希望建立相关力学机制同几何特性之间的关系。

◇ 壁面应力

$$t_n|_{\Sigma} = \left[-p|_{\Sigma} + \lambda \cdot \theta|_{\Sigma} + 2\mu \cdot \frac{\partial V_3}{\partial x^3}|_{\Sigma} \right] n + \mu \left[\frac{\partial V_i}{\partial x^3}|_{\Sigma} + \frac{\partial V_3}{\partial x^i}|_{\Sigma} + \frac{2b_i^j \cdot V_j}{\Sigma}|_{\Sigma} \right] g^i$$

流固耦合项 非均匀性项 几何—速度耦合项

对于常感兴趣的壁面切应力，现其可分解为流固耦合项、壁面自身运动速度的非均匀项以及壁面几何与壁面速度耦合项。按实际计算流体动力学（CFD），可以获得上述三项的时域信号，对其进行 Fourier 变换可获得时域信息；由此可基于 Parseval 等式研究此三项的能量对比关系。

◇ 壁面涡量法向梯度

参照吴介之等关刚性壁面上涡量法向梯度的分析过程（按《涡动力学引论》中所述）[6]，可以获得边界可作有限变形运动的相关结论。现主要需处理的对象为： $(\nabla \otimes \omega) \cdot n$ 。

利用关系式（可直接计算）：

$$n \cdot \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \times (n \times S) \right) = \left(n \times \overset{\Sigma}{\nabla} \right) \cdot (n \times S) = b_i^j (n \cdot S) + \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot S = H (n \cdot S) + \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot S$$

此处 S 可为任意仿射量， $H = b_i^j$ 为曲面平均曲率。

对于 $(\nabla \otimes \omega) \cdot n$ ，先有：

$$(\nabla \otimes \omega) \cdot n = \overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) + \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} n - \omega \cdot \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes n \right)$$

考虑到:

$$0 = \nabla \cdot \omega = \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot \omega + n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x^3} \Rightarrow n \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x^3} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x^3} = -\overset{\Sigma}{\nabla} \cdot \omega$$

可得:

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \omega) \cdot n &= \overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) - \left[\left(\overset{\Sigma}{\nabla} \cdot \omega \right) n + \omega \cdot \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes n \right) \right] = \overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) - \overset{\Sigma}{\nabla} \cdot (\omega \otimes n) \\ &= - \left(n \times \overset{\Sigma}{\nabla} \right) \cdot \left[(n \times \omega) \otimes n \right] + \overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) + H(\omega \cdot n)n \end{aligned}$$

可见, 相对于刚性壁面情形, 边界的变形运动所引入的影响为: $\overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) + H(\omega \cdot n)n$ 。进一

步考虑 $\omega \cdot n = \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \times V + n \times \frac{\partial V}{\partial x^3} \right) \cdot n = \left(\overset{\Sigma}{\nabla} \times V \right) \cdot n$, 也完全由曲面自身运动决定, 不直接涉及流

固耦合。需指出, 可考虑将 $\overset{\Sigma}{\nabla}(\omega \cdot n) + H(\omega \cdot n)n$ 作为边界变形运动对边界涡量法向梯度的影响, 但对比的对象仍是“假想的边界刚性而壁面涡量为现有 ω 的流动”。

上述分析基于曲面半正交坐标系。对实际应用上而言, 此坐标系可能仅在曲面的附件区域存在, 然而在分析上却十分有用。此外, 实际计算所用的曲线坐标系可能并非曲面半正交

系。对此, 考虑相关结论所涉及的切平面上的梯度算子 $\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes \Phi$:

$$\overset{\Sigma}{\nabla} \otimes \Phi = \left(\overset{\Sigma}{\nabla} + n \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \otimes \Phi - n \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = \nabla \otimes \Phi - n \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} = \nabla \otimes \Phi - n \otimes (n \cdot \nabla \otimes \Phi)$$

由于三维欧氏空间中梯度算子的整体形式(内蕴表示)不依赖于坐标系的实际选取, 故上式最后一式适用于任何坐标系的实际计算。由此, 对实际计算中所采用的曲线坐标系, 考虑其

局部基 $\{g_\gamma\}_{\gamma=1}^3$ 同曲面上局部基 $\{g_1, g_2, g_3 = n\}$ 之间的转化关系, 可有:

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \Phi &= \nabla_\gamma \Phi_{\cdot\beta}^\alpha g^\gamma \otimes g_\alpha \otimes g^\beta \\ &= \nabla_\gamma \Phi_{\cdot\beta}^\alpha \left\{ \left[\left(g^\gamma, g^r \right) g_r + (g^\gamma, n)n \right] \otimes \left[\left(g_\alpha, g^s \right) g_s + (g_\alpha, n)n \right] \otimes \left[\left(g^\beta, g^t \right) g_t + (g^\beta, n)n \right] \right\} \end{aligned}$$

上述处理也应适用其它形式的 $\overset{\Sigma}{\nabla}$ 运算。

5 有关讨论

我们注重学习、教学与研究的互为融合，上述知识体系的建立与发展直接成为教学路径“基于现代张量分析的连续介质力学理论及其在流体力学中实践”的主要教学内容。教师通过课程向学生叙述已经自身提炼的知识体系，而由学生通过数值实验等具体实践以验证相关思想及方法的正确性及有效性，并且实践了理论联系实践的过程。

参 考 文 献

- 1 郭仲衡. 《张量分析(理论和应用)》. 科学出版社, 1988
- 2 郭仲衡. 《非线性弹性理论》. 科学出版社, 1980.
- 3 谢锡麟, 陈瑜. 当前物理构形对应之曲线坐标系显含时间的有限变形理论. 中国科技论文在线, 2012.
- 4 赵学端. 《粘性流体力学》. 机械工业出版社, 1983
- 5 谢锡麟, 陈瑜, 史倩, 傅渊. 限制于一般运动曲面上的连续介质的有限变形理论. 中国科技论文在线, 2012.
- 6 吴介之, 马晖扬, 周明德. 《涡动力学引论》. 国防工业出版社, 1993.

Some applications of modern tensor analysis in mechanics of continuous mediums

XIE Xi-lin

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai, 200433.

Email: xiexilin@fudan.edu.cn)

Abstract: In this paper some essential aspects of the knowledge of tensor field analysis in Euclidian space, tensor field analysis in two-dimensional surface are presented. And some theoretical fundaments on the study of the dynamics on the deformable boundary are denoted in the point of view of vorticity and vortex dynamics. It is well-known that tensor analysis was the usually utilized mathematical and mechanical analysis tools by Prof. ZHOU Pei-Yuan one of the distinguished national masters in mechanics and physics, therefore we would like to take the present paper as the commemoration to our pioneer Prof. ZHOU Pei-Yuan.

Key words: Mechanics of continuous medium; Tensor field analysis in Euclidian space; Tensor field analysis in two-dimensional surface; Vorticity and vortex dynamics.