Note2 by Yinghan Fu 0570071 对介质中能量守恒的思考

介质中的能量守恒为：

$$\int_V \vec{j}_f \cdot \vec{E} d\tau = -\oint_s (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{H})d\tau \quad (1)$$

右边扣除真空中的相应项 $-\frac{1}{\mu_0}\oint_s (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)d\tau$，等于 $-\oint_s (\vec{E}\times\vec{M})\cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\vec{P}\cdot\vec{E} - \vec{M}\cdot\vec{B})d\tau$，对于这一项，我认为并非极化与磁化对场能的贡献，而是电场对极化与磁化电流做功的表现，现证明如下：

对于能量守恒：

$$\int_V \vec{j}\cdot\vec{E} d\tau = -\frac{1}{\mu_0}\oint_s (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)d\tau \quad (2)$$

在介质中，$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_p + \vec{j}_m$，其中，$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$，$\vec{j}_m = \nabla\times\vec{M}$，将其带入(2)，得到：

$$\int_V (\vec{j}_f + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla\times\vec{M})\cdot\vec{E} d\tau = -\frac{1}{\mu_0}\oint_s (\vec{E}\times\vec{B})\cdot d\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)d\tau \quad (3)$$

因为 $\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的线性关系，$\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{P}\cdot\vec{E}}{\partial t}$。又因为 $(\nabla\times\vec{M})\cdot\vec{E} = \nabla\cdot(\vec{M}\times\vec{E}) + (\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{M} = \nabla\cdot(\vec{M}\times\vec{E}) + (-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t})\cdot\vec{M}$，得到：

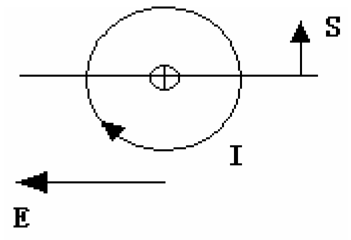
$$\int_V (\vec{j}_p + \vec{j}_m)\cdot\vec{E} d\tau = \oint_s (\vec{E}\times\vec{M})\cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}(\vec{P}\cdot\vec{E} - \vec{M}\cdot\vec{B})d\tau \quad (4)$$

其中利用了 $\vec{M}$ 与 $\vec{B}$ 的线性关系，于是便证明了一开始提出的观点。对于该结果作如下讨论：

从(4)可以清楚地看出，介质中能量守恒公式的改变来自于电场对极化与磁化电流的做功。而这种改变的电磁不对称性来自于极化电流与磁化电流的不对称性，$\frac{1}{2}$ 因子来自于 $\vec{M}$ 与 $\vec{B}$，$\vec{P}$ 与 $\vec{E}$ 的线性关系。至于极化，磁化引起的场能与能流的改变已经贡献在 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 的改变中。下面解释一下(4)式中右边的每一项的物理图像：

$$\oint_s (\vec{E}\times\vec{M})\cdot d\vec{S}$$

假设在 V 的边界面上存在一个磁偶极子,如下图:



$\vec{E}$ 不断对 $\vec{I}$ 做功，由于两个矢量点积为正的部分在界面内，$\vec{E}$ 的做功对边界内的能量只有正贡献，好像在边界上不断有能量流入，其方向与 $-\vec{E}\times\vec{M}$ 的方向是一致的。

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\vec{P}\cdot\vec{E}d\tau$$

这一项很简单，就是电场对极化电流的做功。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\vec{M}\cdot\vec{B}d\tau$$

对于边界内的一个磁偶极子与向量 $-\nabla\times\vec{E}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\nabla\times\vec{E}_k$ 来说，发现磁偶极子与感生电场(有旋场)的轴矢量若平行，就意味着感生电场对磁偶极子的环电流做功。这一项的来源就是感生电场对内部磁化电流做的功。