关于均匀电场中介质球的极化

为什么均匀电场中极化的介质球的极化电荷对球外区域电场贡献严格等效于一个放在原点的偶极子？

由本征函数展开法可以得到在充满均匀电场$\overrightarrow{E_0}$的介电常数为ε_1的空间中放一个介电常数为ε_2半径为R的介质球，此系统电势分布为：

$$\varphi_{int} = -E_0 \mathrm{r}\cos\theta + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta$$

$$\varphi_{ext} = -\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 \mathrm{r}\cos\theta$$

那么极化电荷对球外区域贡献为

$$\varphi_p = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_0 \frac{1}{r^2}\cos\theta = \left(4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_0\right)\frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

这相当于一个放在原点的电偶极子，电偶极矩为

$$p = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_0$$

进一步可得到介质球内的电场强度为

$$\overrightarrow{E_{int}} = -\frac{\partial \varphi_{int}}{\partial \mathrm{z}}\hat{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}} = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}\overrightarrow{E_0}$$

考虑球外为真空，$\varepsilon_1 = \varepsilon_0$的情况

介质球内为均匀场，故整个介质球被均匀极化，极化强度为

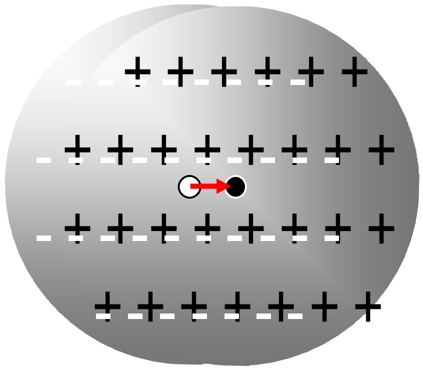
$$\vec{\mathrm{P}} = \chi\varepsilon_0 \overrightarrow{E_{int}} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_0}\overrightarrow{E_0} = \left(4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} R^3 E_0\right) \Big/ \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

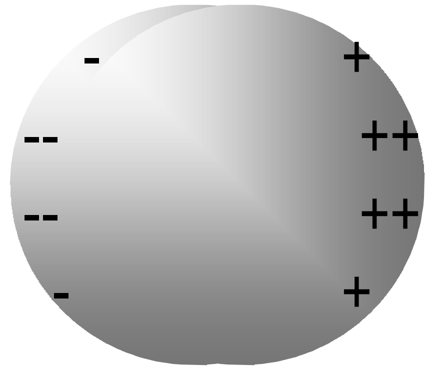
极化强度正好是单位体积电偶极子电偶极矩。此电偶极矩是大量微观的分子、原子极化产生的电偶极子效果的叠加，虽然它们的位置各不相同，但它们的叠加效应一定等效于一个位于球心的偶极子。下面来证明此结论。

假设介质球的极化是线性、均匀的，在均匀外电场中，每个电中性分子、原子的正负电荷中心产生位移，且大小相同。因此宏观来看，整个介质球的正负电荷中心也产生了同样的变化。左图显示的是正负电荷中心位移的情形，正负电荷球的电荷体密度大小相同；右图显示的是所有正负电荷叠加的效果，中间的正、负电荷抵消相，在球的表面处有面电荷分布。

此时计算球外区域电场、电势，都可以把介质球看成两个均匀带电球的球外的电场、电势的总和。显然，均匀带电球的外部电场、电势与球的电荷集中在球心的情况是等价的。因此介质球外的电场、电势严格等价于处于两个带电中心的点电荷的效果，即处于球心的电偶极子。

另外，由此极化等效模型，可以得到介质球表面极化电荷密度分布。由于极化引起的电荷





中心位移是原子尺度之下的，因此右图中正、负电荷球中间抵消剩下的部分可认为是处在宏观无限薄的面内，即原来正比于体积的电荷量被记为面内分布。电荷分布由θ处的体积来估计，即按照cos θ分布：

$$\sigma_p = \sigma_m \cos\theta$$

$\sigma_m = \rho l$，ρ为等效的体电荷密度，l为正负电荷中心的位移。在$\theta = \pm\pi/2$处$\sigma_p = 0$；在$\theta = 0$处$\sigma_p = \sigma_m$；在$\theta = \pi$处$\sigma_p = -\sigma_m$；

对比极化强度矢量的性质得出的极化电荷面分布：

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\cos\theta$$

结果一致。

0519041 朱海

2008-4-11