第二十讲

上次课

☆ 磁场的基本定理

① $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_s \vec{j}\cdot d\vec{s}$ → 安培环路定理（磁场有旋）

注意条件：I 稳恒 $\oint d\vec{l}$ 闭合 $\iint_s$ 完整。

② $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$ → 高斯定理（磁场无源）

☆ 环路定理的应用（对称性+B-S 定理+高斯定理磁场的非零分量）

第 32 章：运动电荷及载流导线在磁场中的形为

电流产生磁场，磁场又作用于电流。电流来源于运动电荷。上一章我们建立了由电流计算磁场的基本理论，并计算了不同的电流分布产生的磁场。这一章，我们将计算有了一个静磁场后，它又是如何作用到处于磁场中的电流及运动电荷的。

（一）洛仑兹力：

电流来源于运动电荷，因此磁场不仅对处于其中的电流其作用，对处于场中的运动电荷也同样有力的作用 --- 洛仑兹力。

安培定律：$\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} = \vec{j}d\Omega \times \vec{B} = Nq\vec{v} \times \vec{B}$

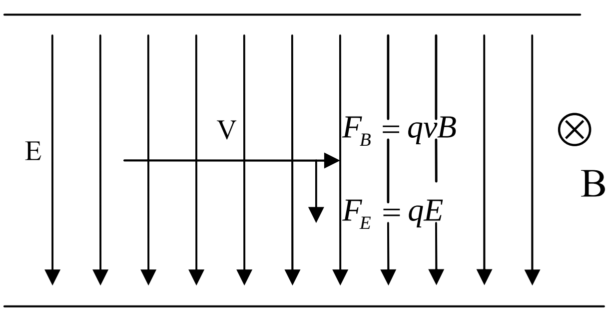
若空间只有单个电荷（$N = 1$），则其在磁场中的受力为：$\vec{F}_B = \vec{v} \times \vec{B}$

<u>磁场只对运动电荷有力，对静止电荷无作用（磁力的特点）</u>

然而电场对电荷（无论静止还是运动）总有作用，因此若空间同时还有电场，则总力为：

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

这个力我们称为洛仑兹力！Lorentz 力的应用：速度选择器



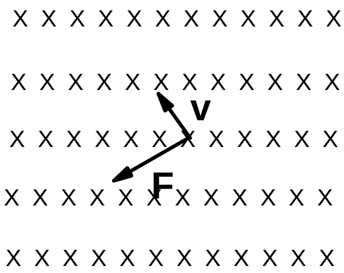
有两块极板，中间存在相互垂直的电场及磁场。一束带电粒子通过此器件，当速度满足$v = E/B$时,，电场力与磁场力相互抵消，可以通过。不然，被偏转。

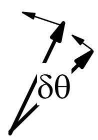
（二）带电粒子在磁场中的运动

带电粒子在磁场中受到洛仑兹力的作用，运动行为相当丰富。下面分 4 种情况由浅入深的讨论。

① 均匀磁场，且方向垂直于运动表面（最简单）

假设带电粒子在 xy 平面内运动，均匀磁场 B 平行于 Z。则$\vec{v} \perp \vec{B}$，





受力$\overline{F} = q\vec{v} \times \overline{B}$ （没有电场），故$|$F$|$=qvB, 方向永远垂直于速度方向。很明显，磁力使 q 作圆周运动。计算其运动方程：

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\overline{e_\phi} \qquad \dot{\theta} = \frac{v}{r}$$

$$a = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = v\dot{\theta} = \frac{v^2}{r} = \frac{qvB}{m}$$

回旋半径 $\boxed{r = \frac{mv}{qB}}$ 初速度大 则半径大

磁场大 则半径小

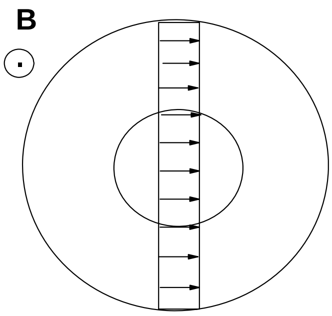
角速度 $\boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}}$，运动频率$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}}$

尽管初速度不一定，但角速度及回旋频率不与初速度有关！
只与磁场有关，磁场大，则转得快！

② 回旋加速器

注意到f与速度无关，可以利用此性质做回旋加速器，装置示意图如下图所示。均匀磁场垂直纸面，在中间有两个极板接在交变电源的两端。

(i) t =0, 电荷被中间电场加速，得到初速度v_0；



(ii) 离开右极板后在磁场的作用下做圆周运动，半径为 $r_0=\dfrac{mv_0}{qB}$，此过程中磁场不做功，动能不增加；

(iii) 半个周期后到达右极板，此时若能将原电场恰好反转， 则电荷再次被电场加速，速度变成 v_1；

(iv) 离开左极板后，以半径 $r_1=\dfrac{mv_1}{qB}$，继续回旋，磁场不做功，动能不增加。

……

直到 $r_N>R$ 加速完毕，电荷飞离加速器。

<u>能实现这个加速功能的主要原因是</u>

（1） $\omega=\dfrac{qB}{m}$，即电场的交变频率与回旋频率一致，又称为共振条件 ---

否则带电粒子被回旋回来时不能被有效加速；

（2） 而回旋频率 ω 不依赖于回旋速度 v！（否则电场的频率要一直随回旋速度的变化而变化！）

最终的最大速度可由回旋加速器的最大半径决定：

飞离前的回旋半径大致为：$r_{\max}\approx R$

则最大速度为：$v_{\max}=\dfrac{qBr_{\max}}{m}\approx\dfrac{qBR}{m}$

最高所得的动能为：$K_{\max}=\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2=\dfrac{1}{2}(qBR)^2/m$

这是一个很有意思的结论，整个过程中 B 不做功，加速都是有电场完成的，但最后的能量由 B 决定！仔细考察其中的奥秘，发现虽然加速的确是由电场完成的， 但电场越大，每次半径变化就越大（正比于速度差），

因此被加速的次数相应变小：$N=\dfrac{R}{\Delta r}=\dfrac{qBR}{m}\dfrac{1}{\Delta v}\propto\dfrac{1}{E}$。而电场做的总功为 $W\sim NEd\sim const.$，与电场值无关。

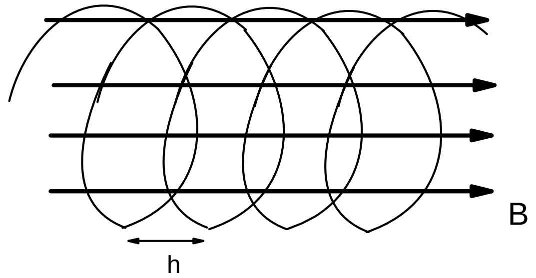
③ 速度不垂直与磁场

(1) 均匀磁场

将运动速度分解成平行/垂直分量：$\vec{v}=\vec{v}_{\parallel}+\vec{v}_{\perp}$

则洛仑兹力为： $\overline{F}=q\vec{v}\times\overline{B}=q\overline{v_{\perp}}\times\overline{B}$，仅与 $\vec{v}_{\perp}$ 相关，且不沿着磁场方向。

因此电荷在 $\overline{B}$ 的方向以速度 $v_{\parallel}$ 做匀速运动， 同时，



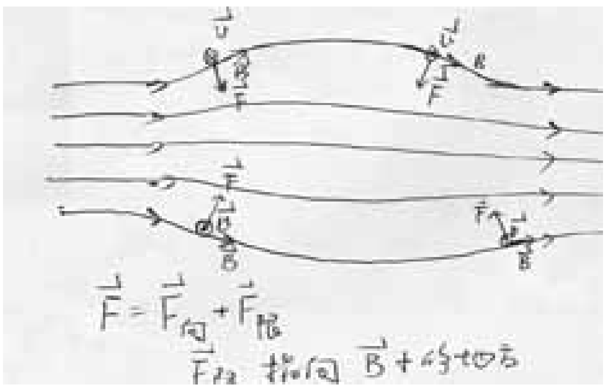
在 $\perp\overline{B}$ 的平面内做回旋运动，回旋半径为 $r=\dfrac{mv_{\perp}}{qB}$。

这种运动称为螺旋运动 spiral

螺距 $h=v_{\parallel}T=\dfrac{\partial\pi m}{qB}v_{\parallel}$，即电荷螺旋一周向前运动的距离。

(2) 非均匀磁场（磁镜）

在非均匀磁场中电荷的运动行为更丰富，考虑如图所示的非均匀磁场



电荷在作螺旋运动时，不仅受到向心力 $\vec{F}_{向}$，支持其在垂直磁场的表面内作圆

周运动，而且存在一个平行于 z 方向的力的分量 $\vec{F}_{限}$，其方向指向低场（磁力线较稀疏的地方），阻止继续向高场运动。

结论：带电体作螺旋运动，被限制在低场处，象个瓶子（磁瓶）

习题：P746,　Problems, 2，4, 6, 10