第二十六讲

复习：

① 磁场能密度 $u_B(\vec{r})=\dfrac{1}{2\mu_0\mu_r}\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2$

总磁场能 $U_B=\int u_B(\vec{r})d\vec{r}=\dfrac{1}{2}Li^2$

② 交流电

假设流过的电流为：$i(t)=i_m\sin(\omega t-\phi)$

则元件两端的电压：$\Delta V_{R,L,C}=X_{R,L,C}\cdot i_m\cdot\sin(\omega t-\phi+\Delta\phi_{R,L,C})$

$$X_R=R;\quad X_L=L\omega;\quad X_C=\frac{1}{\omega C}$$

$$\Delta\phi_R=0;\quad \Delta\phi_L=\frac{\pi}{2};\quad \Delta\phi_C=-\frac{\pi}{2}$$

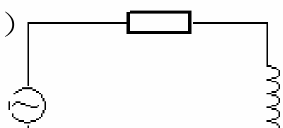
（3）*RLC* 串联电路

对一个复杂的交流电路，回头看 Kirchhoff 两个定律

第一 $\sum i=0$ ← 电荷守恒，交流电荷仍守恒！

第二 $\oint\Delta V=0$ ← $\oint\vec{E}_S\cdot d\vec{l}=0$ 静电场为保守场

交流条件下 ΔV 仍由 $\vec{E}_S$ 确定（成立条件：ω 不太大，似稳场）



电动力学中给出证明,交流电路中仍可应用此二定律，

只不过 $i,\Delta V$ 均为 t 的函数

以 RLC 串联电路为利来说明交流电路的解法：

1） 三角解法

(a) 只有一个电路, $i(t)$ 处处相同.

(b) $\oint\Delta V=0$ $\quad\varepsilon-\Delta V_R-\Delta V_L-\Delta V_C=0$

$$\varepsilon_m\sin(\omega t)=Ri_m\sin(\omega t-\phi)+X_Li_m\sin(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2})+X_Ci_m\sin(\omega t-\phi-\frac{\pi}{2})$$

$$=Ri_m\sin(\omega t-\phi)+(X_L-X_C)i_m\cos(\omega t-\phi)$$

$$=i_m\left[R\sin\omega t\cos\phi-R\cos\omega t\sin\phi+(X_L-X_C)\cos\omega t\cos\phi+(X_L-X_C)\sin\omega t\sin\phi\right]$$

$$=i_m\left\{\left[R\cos\phi+(X_L-X_C)\sin\phi\right]\sin\omega t+\left[(X_L-X_C)\cos\phi-R\sin\phi\right]\cos\omega t\right\}$$

求解此三角方程

$$(X_L-X_C)\cos\phi-R\sin\phi=0 \quad , \quad \varepsilon_m=i_m\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

可求出相位：

$$\tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R}=\frac{L\omega-\dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

可定义阻抗

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\sqrt{R^2+(L\omega-\frac{1}{C\omega})^2}$$

则 $$i_m=\frac{\varepsilon_m}{Z(\omega)}$$

$Z(\omega)$ 的物理意义：阻抗为广义电阻，有电阻的量纲，为此线路对此频率的交流电的“有效”阻碍能力。

ϕ 的物理意义： $\begin{cases}\varepsilon=\varepsilon_m\sin\omega t\\ i(t)=i_m\sin(\omega t-\phi)\end{cases}$

ϕ 为电压比电流的位相超前量

$$\left.\begin{array}{l}\phi>0,\ \text{整个电路为电感性的}\\ \phi<0,\ \text{整个电路为电容性的}\\ \phi=0,\ \text{整个电路为电阻性的}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\quad \phi=\tan^{-1}\frac{X_L-X_C}{R}$$

2）图解法

求解三角方程 $A_1\sin\phi_i+A_2\sin\phi_2+......=B\sin\phi$

定义矢量 $\vec{A}=(A\cos\phi,A\sin\phi)$，则上述方程可写为：

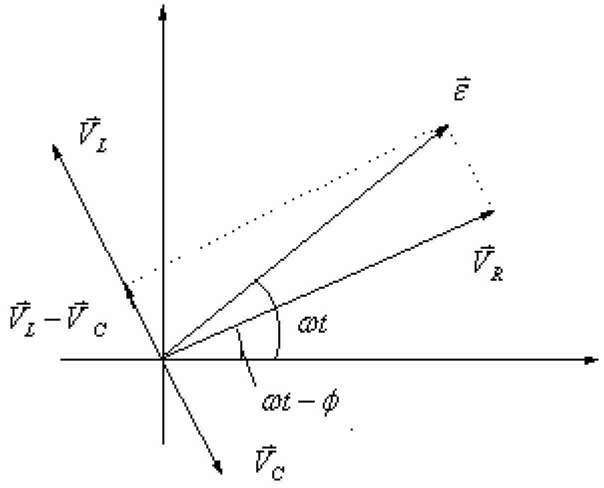
$$(\vec{A}_1+\vec{A}_2+...\vec{A}_N)_y=(\vec{B})_y\ ,$$

因而可进一步等价为求矢量方程：$\vec{A}_1+\vec{A}_2+...\vec{A}_N=\vec{B}$ 。

对现在的情况，可以将 V_R,V_L,V_C 用二维平面的矢量来表示。

$\left|V_{R,L,C}\right|$ 表示其矢量的模，相位表示矢量的方向

$$
\begin{cases}
V_R(t) = i_m R \sin(\omega t - \phi) \\
V_L(t) = i_m X_L \sin(\omega t - \phi + \dfrac{\pi}{2}) \\
V_C(t) = i_m X_C \sin(\omega t - \phi - \dfrac{\pi}{2})
\end{cases}
$$



$\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{V_R} + \overrightarrow{V_L} + \overrightarrow{V_C}$ 矢量相加

假设： $X_L > X_C$

$$
|\varepsilon| = i\sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^R} = iZ
$$

$\vec{\varepsilon}$ 的相位由外电动势定为 ωt 。

因此 $\vec{\varepsilon}$ 与 $\vec{i}$ （$\vec{V}_R$）的夹角为 ϕ。由矢量的运算可得：

$$
\left.
\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{X_L - X_C}{R} \\
Z &= \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}
\end{aligned}
\right\}
$$
完全一样的结果！！

对任何复杂的电路，都可以利用这两种方法，即图解法和三角法分别求解。

注意：R, L 的串并联的规律相同，C 与 R, L 的串并联的规律相反。

（4）功率及有功功率

任意一个交流电路 $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin(\omega t)$ $i(t) = i_m \sin(\omega t - \phi)$

电动势的输出功率（瞬时值）

$$
P(t) = \frac{dW}{dq}\cdot\frac{dq}{dt} = \varepsilon(t) i(t) = \varepsilon_m i_m \sin(\omega t)\sin(\omega t - \phi)
$$
$$
= \varepsilon_m i_m \sin(\omega t)\left[\sin(\omega t)\cos\phi - \cos(\omega t)\sin\phi\right]
$$

对交流电路来讲即时功率无意义，平均值更有意义：

$$
\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = i_m \varepsilon_m \overline{\sin^2(\omega t)} \cdot \cos\phi = \frac{1}{2}\varepsilon_m i_m \cos\phi
$$

$$
\frac{1}{T}\int_0^t \sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T \sin\omega t \cos\omega t dt = 0
$$

进一步将平均功率写成更物理的形式。先介绍物理量的均方根值（root-square-mean value, rms）。问题：如何刻画交流电的平均强度？交流电中的任意物理量的直接的时间平均值为 0：

$$\overline{\varepsilon(t)} = 0 \qquad \overline{i(t)} = 0$$

因此，不可以用平均值来刻画。 我们通过电动势的均方根值，或叫有效值来刻画。定义为: $\sqrt{\overline{(\varepsilon(t))^2}} = \varepsilon_{rms}$. 简单计算可得：

$$\varepsilon_{rms} = \sqrt{\varepsilon_m^2 \overline{\sin^2(\omega t)}} = \varepsilon_m \big/ \sqrt{2}$$

同理 $i_{rms} = i_m \big/ \sqrt{2}$

因此，平均功率可以写成：$\boxed{\overline{P} = \varepsilon_{rms} \cdot i_{rms} \cdot \cos\phi}$

注意到 $\varepsilon_m = i_m \cdot Z(\omega)$，因此，$\varepsilon_{rms} = i_{rms} \cdot Z$

利用上式可将平均功率写成更物理的形式：

$$\boxed{\overline{P} = \frac{\varepsilon_{rms}{}^2}{Z}\cos\phi}$$

从上式可以清楚的看到$\cos\phi$的物理意义。与直流电相比，关系式$\varepsilon_m = i_m \cdot Z(\omega)$显示 Z 好像起着与 R 一样的功能，然而平均功率的表达式显示功率的最大可能值是由 Z 决定，能否达到这个最大的可能值是由$\cos\phi$决定。从这个意义上讲，$\cos\phi$又被定义为功率因数。Z,ϕ是描述一个电路性质的两个重要参数，缺一不可。

注意能量在R上的平均耗散

$$\overline{\frac{dQ}{dt}} = \overline{i^2}R = i_{rms}^2 \cdot R = i_{rms} \cdot \frac{\varepsilon_{rms}}{Z} \cdot R = \varepsilon_{rms} i_{rms} \cdot \cos\phi$$

因此 $\overline{P} = \frac{d\overline{Q}}{dt}$

结论：外电动势对体系做的“有用功”全在电阻上耗散（平均意义），在L,C上没有“平均”意义上的做功。

分析：

a) 提高功率因数有什么方法？

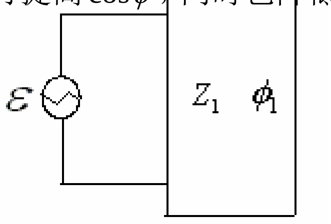
$$\left|X_L - X_C\right| \text{变小} \Leftarrow \quad \cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

通常电路是电感性的，可以串联一些电容提交功率因数。

b) 提高功率因数的意义？（Z,ϕ 是电路的两个重要参数）

① $\overline{P}=\varepsilon_{rms}\cdot i_{rms}\cdot\cos\phi=\dfrac{\varepsilon_{rms}^2}{Z}\cos\phi$

给定发电机的电动势，通常 R 给定，减少电抗即可提高 $\cos\phi$，同时也降低 Z，从而提高 $\overline{P}$，从发电机中更有效得到能源。

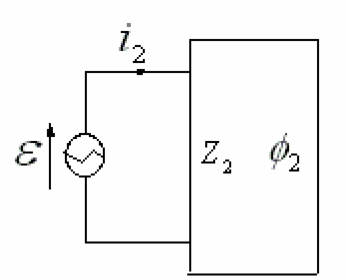


② 给定发电机的最大输出功率 P_e

假设两用户都可用足（通过调整 Z）

$$P_e=\varepsilon i\cos\phi\Rightarrow i=\frac{P_e}{\varepsilon\cdot\cos\phi}$$

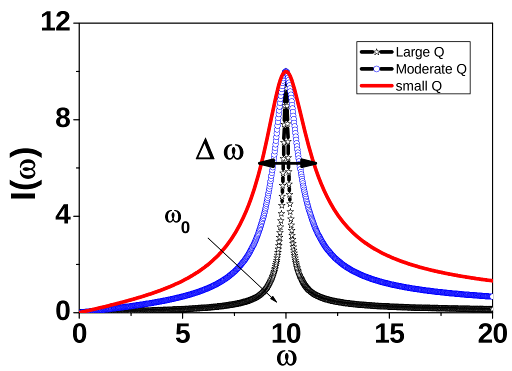
品质因子高的用户 i 小，输电线的电耗就小!!!



（5）共振（Resonance）

共振是非常重要的物理概念。考虑一个简单的 RLC 串联电路，则在给定外加电动势的情况下，电路的响应为：

$$i=\frac{\varepsilon}{Z}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}$$



阻抗 Z 是 ω 的函数

当 $\omega L=\dfrac{1}{\omega C}\Rightarrow\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}=\omega_0$ 时，$Z=R$ 为最小值，$i=\dfrac{\varepsilon}{R}$ 达到极大值！

此时我们称回路达到谐振。在 $\omega\to 0,\infty$ 两个极限下，i 都趋于 0，典型的曲线如上图所示。我们看到不同的条件下，曲线的锋有瘦有胖，如何刻画峰的质量？

品质因子（Q，Quality Factor）

首先定义峰的半宽：i_m 到最大值的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时的宽度带宽 $\Delta\omega$。则峰的半宽的边界对应的频率满足：

$$Z(\omega)=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}=\sqrt{2}R$$

简化为： $(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2=R^2$

习题：P. 842, Problems, 12

P. 858, Problems, 2, 4, 6