第八讲

上次课：

*　电势能的引入　　$U(f)-U(i)=-\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$

能量的守恒与转化，电势能是相互作用能

*　两个点电荷的电势能　　$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

N 个点电荷体系的电势能　　$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i>j}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$

一对点电荷之间的电势能只数一次，相互作用

*　电势，一个电荷体的做功的能力　　$\varphi(f)-\varphi(i)=-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$

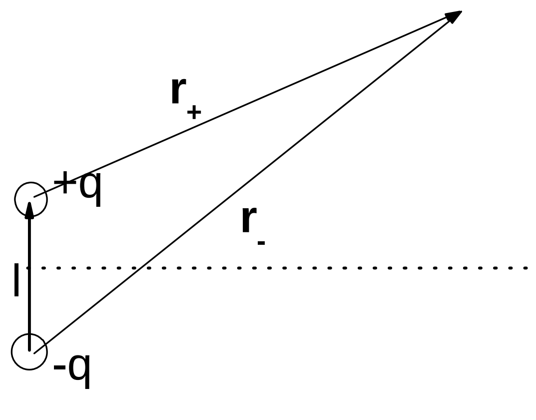
点电荷 q　　$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$

电荷体系　　$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$

连续　　$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

（5）举例

1．偶极子



$$\vec{P}=\vec{\ell}q$$

$+q$ 的位置 $(0,0,+\frac{\ell}{2})=\vec{r}_+$

$-q$ 的位置 $(0,0,-\frac{\ell}{2})=\vec{r}_-$

线性叠加原理

$$V(\vec{r})=V_+(\vec{r})+V_-(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_+|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{|\vec{r}-\vec{r}_-|}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_+|^{-1}=((\vec{r}-\vec{r}_+)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_+))^{-1/2}$$

$$=[r^2+r_+^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}_+]^{-1/2}\approx(r^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}_+)^{-1/2}$$

$$=\frac{1}{r}(1-\frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}_+}{r^2})^{-1/2}\approx\frac{1}{r}(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_+}{r^2})=\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_+}{r^3}$$

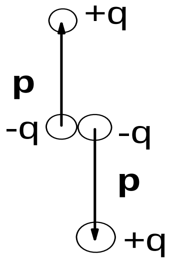
同理 $|\vec{r}-\vec{r}_-|^{-1}\approx\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_-}{r^3}$

$$V(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{r}+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_+}{r^3}-\frac{1}{r}-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}_-}{r^3}]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot(\vec{r}_+-\vec{r}_-)}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{\ell}q}{r^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{\rho}}{r^3}\sim\frac{1}{r^2}$$

2. 电四极子

定义：



$+q$ $(0,0,\ell)=\vec{r}_{+1}$ $-q$ $(0,0,0)=\vec{r}_{-1}$

$+q$ $(0,0,-\ell)=\vec{r}_{+2}$ $-q$ $(0,0,0)=\vec{r}_{-2}$

线性叠加原理 $V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_{+1}|}+\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_{+2}|}-\frac{2q}{r}]$

一阶近似结果为 0，必须仔细考虑高阶贡献

$\vec{r}$ 沿任意方向的结果很复杂，计算沿 Z 方向

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{q}{|Z-\ell|}+\frac{q}{|Z+\ell|}-\frac{2q}{Z}]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{2Zq}{Z^2-\ell^2}-\frac{2q}{Z}]$$

$$[Z^2-\ell^2]^{-1}=Z^{-2}[1-(\frac{\ell}{2})^2]^{-1}=\frac{1}{Z^2}(1+\frac{\ell^2}{Z^2})\approx\frac{1}{Z^2}+\frac{\ell^2}{Z^4}$$

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{2q\ell^2}{Z^3}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{Z^3}\qquad Q=2q\ell^2$$

单极 q $\quad V\sim\frac{1}{r}$ $\quad E\sim\frac{1}{r^2}$

偶极 P $\quad V\sim\frac{1}{r^2}$ $\quad E\sim\frac{1}{r^3}$

四极 Q $\quad V\sim\frac{1}{r^3}$ $\quad E\sim ?\frac{1}{r^?}$

$$V=AV_q+BV_P+CV_Q+......$$

$$\downarrow$$

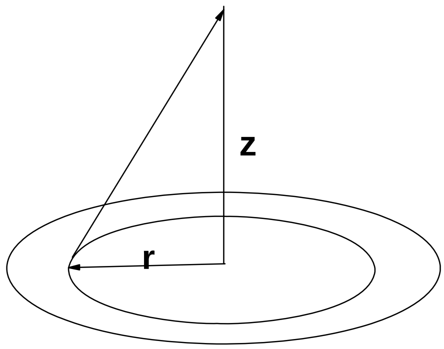
高阶 delay 快

3．荷电圆盘 R $\quad Q=\pi R^2\sigma$

解：

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$V(Z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{2\pi rdr\cdot\sigma}{\sqrt{Z^2+r^2}}$$



$$=\frac{1}{4\varepsilon_0}\int\frac{\sigma dr^2}{(r^2+Z^2)^{1/2}}=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}2\sqrt{r^2+Z^2}\Big|_{\sigma}^{R}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{R^2+Z^2}-\sqrt{Z^2}]$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{R^2+Z^2}-|Z|]$$

$$Z>>R$$

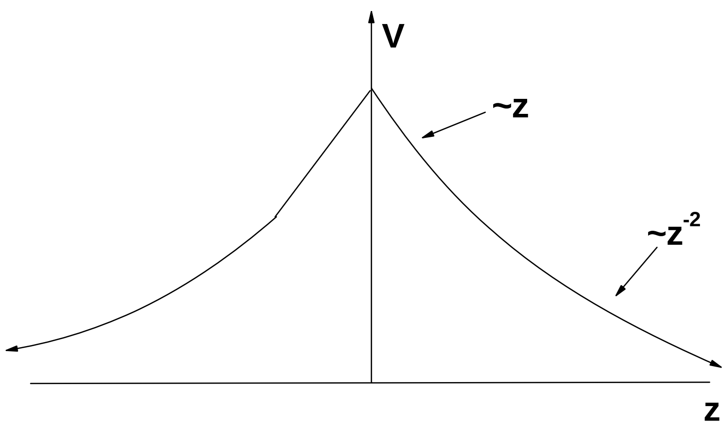
$$(Z^2+R^2)^{1/2}=[Z^2(1+(\frac{R}{Z})^2]^{1/2}\approx|Z|[1+\frac{1}{2}(\frac{R}{Z})^2]$$

$$V(Z)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{R^2}{Z^2}=\frac{\pi R^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 Z^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 Z^2}$$

$$R>>Z$$

$$(R^2+Z^2)^{1/2}=R[(1+(\frac{Z}{R})^2]^{1/2}\approx R[1+\frac{1}{2}\frac{Z^2}{R^2}]\approx R+\frac{Z^2}{2R}\approx R$$

$$V(Z)\approx\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(R-|Z|)$$



（**6**）电势$\Rightarrow$电场

$$\varphi(\vec{r}_A)-\varphi(\vec{r}_B)=-\int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_A}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

一维

$$\varphi(Z_A)-\varphi(Z_B)=-\int_{Z_B}^{Z_A}E_Z(Z)\cdot dZ$$

当　$Z_A-Z_B=\Delta Z\to 0$ 时

$$\varphi(Z_B+\Delta Z)-\varphi(Z_B)\approx -E_Z(Z_B)\cdot\Delta Z$$

$$E_Z(Z_B)\approx-\frac{\partial\varphi(Z_B)}{\partial Z}=-\frac{\varphi(Z_B+\Delta Z)-\varphi(Z_B)}{\Delta Z}\Bigg|_{\Delta Z\to 0}$$

$\{E_Z \to d\vec{\ell}=dZ,\varphi(\vec{r}+\Delta Z),\vec{r}\to\varphi(\vec{r})\}$

三维　任何方向的电场　积分 path // 该方向

$$E_Z(x,y,z)=-\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial Z}$$

$$E_X(x,y,z)=-\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial X}\qquad E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

$\{E_X \to \varphi(\vec{r}+\Delta x),d\vec{\ell}=dx,\vec{r}\to\varphi(\vec{r})\}$

$$\Downarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})$$

$\vec{r}$ 的方向与 $d\vec{\ell}$ 的方向不必一样，无关系；$\vec{E}$ 的方向与求导的方向相同 $\vec{E}//\hat{n}$，

$$|E|=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

$$\varphi(\vec{r})\to\varphi(\vec{r}+\vec{n})\qquad \vec{n}=\delta\vec{x}+\delta\vec{y}$$

(7) 举例

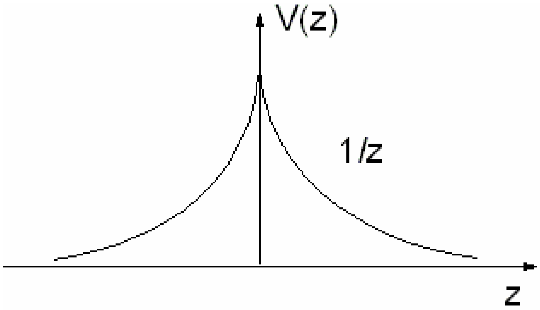
例 1：由带电圆盘的电势，求周围电场。圆盘半径为 R，电荷密度为 σ 。

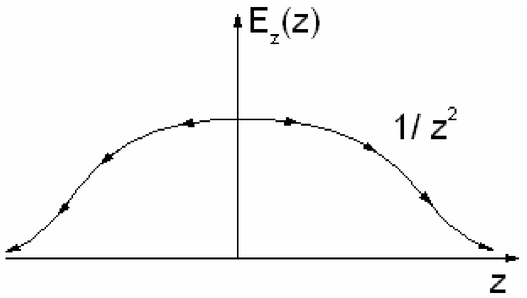
解：$V(Z)=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}[\sqrt{R^2+Z^2}-|Z|]$

$$E_Z(Z)=-\frac{\partial V(Z)}{\partial Z}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}[-\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}+\frac{|Z|}{Z}]$$

$$|Z|\to 0 \qquad E_Z(Z)\Rightarrow\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{|Z|}{Z} \quad \text{均匀电场}$$

$$|Z|\to\infty \qquad E_Z(Z)\Rightarrow\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 Z^2}$$





$V(z)\sim z$ 曲线 $E_z(z)\sim z$ 曲线

注意：我们求得了盘中心线上的电势$V(Z)$，由电势可以求得$E_Z(Z)$，但我们不能讲$E_x(Z)=0 \quad E_y(Z)=0$，因为我们只知道中线上的电势$V(0,0,Z)$，要知道$E_X(Z)$必须知道$V(X,0,Z)$。

<u>**例 2**</u>：由偶极子的电势$V\Rightarrow E$

解：
$$V(\vec{r})\Rightarrow\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

——偶极子全空间的电势，由此可以看出由电势求电场的好处

假设$\vec{P}\,//\,\hat{Z}$

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Pz}{r^3}$$

因为$\vec{E}=-\nabla V(\vec{r})$，以计算$\hat{Z}$方向为例

$$E_z(\vec{r})=-\frac{\partial}{\partial z}V(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}+\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Pz}{r^4}\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}]$$

我们检查几个极限情形

$\vec{r}=(0,0,z)\quad E_z(0,0,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^3}]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{z^3}$

$\vec{r}=(x,0,0)\; E_Z(x,0,0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}[-\frac{1}{x^3}+\frac{0}{x^5}]=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}$

与直接求解所得电场相比完全一致。

已知全空间的电势！任意位置的电场 $\vec{E}(\vec{r})$，任意方向的分量均可求得，由电场直接求解要麻烦许多！

偶极子的电场 $|E|\sim\frac{1}{r^3}$

$|E|\sim|\nabla V|$，求导的结果是级数+1------General law!

比如四极子 $V\sim\frac{1}{r^3}\qquad E\sim\frac{1}{r^4}$

有兴趣的同学试求解 $E_x(\vec{r})\quad E_y(\vec{r})$，比较与直接求电场的不同。

等势面

（1）．定义

$V(\vec{r})$ 是电势的空间分布，$V(\vec{r})$=常数 的位置定义了一个等势面

三维分布 $\rightarrow$ 面
二维分布 $\rightarrow$ 线
一维分布 $\rightarrow$ 点

（1） 两个等势面不可能相交

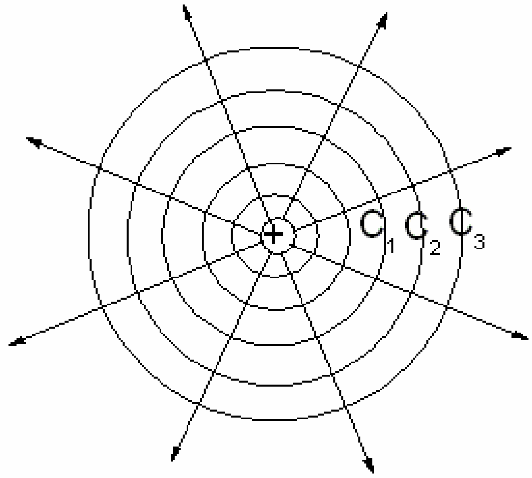
若 $V(\vec{r})=C_1$，$V(\vec{r})=C_2$，则 $V(\vec{r})=?$

（2）每个等势面应当是连续的，否则电场在边缘处没有定义。

点电荷的等势面

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}=C_1$$

$$r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 C_1}=\text{常数}$$



$C_{i+1} - C_i = \Delta C = 常数$，等差数列

两相邻等势面

$$r_i - r_{i+1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{C_i} - \frac{1}{C_{i+1}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{常数}{C_i C_{i+1}}$$

（r_i 大，C_i 小，Δr 大）

$r \to 0$ 等势面密；$r \to \infty$ 等势面疏

（2）、等势面与电力线之间的关系

$\vec{E} = -\nabla V$ 求导 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

亦可分成 $\frac{\partial}{\partial P}\hat{P} + \frac{\partial}{\partial n}\hat{n}$

$\hat{P}$ 是在等势面上的单位矢量 $(\hat{P}_1 \perp \hat{P}_2)$，$\hat{n}$ 是 $\perp$ 等势面的单位矢量

$\vec{E}_{P_1} = -\frac{\partial}{\partial P_1}V = 0$，即在等势面上无论如何走都是相等的。

$$E_w = -\frac{\partial}{\partial n}V = -\frac{V(i+1) - V(i)}{r_{i+1} - r_i} = -\frac{C_{i+1} - C_i}{r_{i+1} - r_i}$$

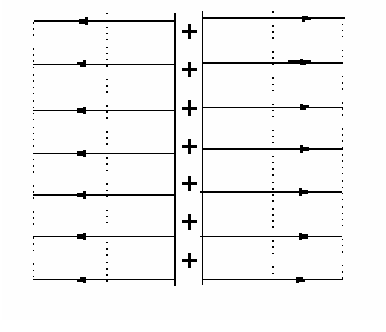
即 E_w 等于电势差/两等势面距离差。

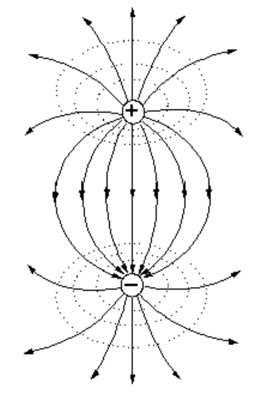
（1） 电场 $\vec{E}$ 的方向沿电势 V 下降的方向

（2） $\vec{E} \perp$ 等势面。

<u>等势面与电力线相生相克，得到一个即可得到另一个。</u>

举例：





（3）导体的等势面

回忆导体的静电平衡条件：

（1） $\vec{E}_{in}=0 \quad \rho_{in}=0$

（2） 表面 $E_{\parallel}=0$

（3） $E_{\perp}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$E_{\parallel}=0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\text{导体表面是一个等势面}}$ $\qquad \Delta V=\int \vec{E}_{\parallel}\cdot d\vec{\ell}=0$

$\vec{E}_{in}=0 \quad \Rightarrow$ $\boxed{\text{整个导体是一个等势体}}$

在导体内：$V(a)-V(b)=\int \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=0$

习题：

P654 Questions：4，9，16，20，24

P658-660 Problems： 4，6，8，10，12，14，18