第二十七讲

复习

- RLC 串联电路由两个物理量刻画：$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}=\dfrac{\varepsilon_m}{I_m}$， Z 为阻抗，$\tan\phi=\dfrac{X_L-X_C}{R}$

  刻画电路的电流与电压之间的幅值比值；ϕ为相角，刻画电路的交流特性（电感性的？电容性的？电阻性的？）

- 功率及有功功率：$\bar{P}=\dfrac{1}{T}\int_0^T P(t)dt=\varepsilon_{rms}I_{rms}\cos\phi=\vec{\varepsilon}_{rms}\cdot\vec{I}_{rms}$

$\cos\phi$ ------ 功率因数

- 共振： 基本特征 $I\to$ 极大值 ：$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

  定义共振峰的宽度 $\Delta\omega$，其边界为满足 $I(\omega)=I(\omega_0)/\sqrt{2}$ 的频率

（5）共振（续）

峰宽位置所满足的方程为：

$$(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2=R^2$$

等式左边改写为：

$$\frac{L}{C}\left[\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\omega L-\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot\frac{1}{\omega C}\right]^2=\frac{L}{C}\left[\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right]^2=\frac{L}{C}\left[\frac{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{\omega\omega_0}\right]^2$$

当$(\omega-\omega_0)^2<<\omega_0^2$时

$$\text{上式}\approx\frac{L}{C}\left[\frac{2\omega_0(\omega-\omega_0)}{\omega_0^2}\right]^2$$

则方程退化为

$$\left[\frac{2(\omega-\omega_0)}{\omega_0}\right]^2\approx\frac{C}{L}\cdot R^2$$

得二解：$\omega-\omega_0\approx\pm\dfrac{1}{2}\omega_0\sqrt{\dfrac{C}{L}}\cdot R=\pm\dfrac{1}{2}\omega_0/Q$

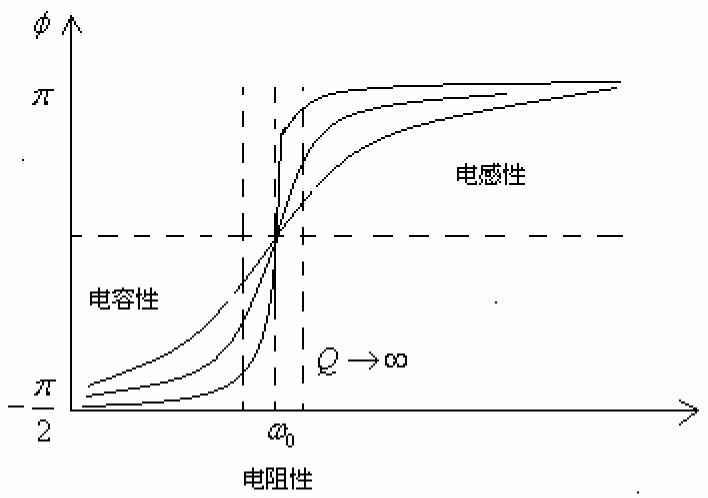
其中 $\boxed{Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ 为一无量纲的数，叫做品质因子（品质因数，Quality Factor）。看它的物理意义，

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\omega_0/Q\text{，}\quad \text{则：}\ Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Q 刻画了此谐振的选频的纯净程度。Q 大则谐振峰越尖锐，因而 ω_0 越易被选出来。将 Q 改写为：$Q=\frac{\sqrt{X_L X_C}}{R}$，则物理意义更明显---显然电阻越小电抗越大，Q 越大，则尖峰越尖；反之亦然。

共振的另一个普遍性质为电路的相位有 π 的跳跃：

根据：$\tan\phi=\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}$， 则低频时， 容抗占主导地位，电路显示电容性（$\phi<0$）； 高频时，感抗占主导地位，电路显示电容性（$\phi>0$）。通过共振时



必有一个 π 的相位跳跃。Q 越大，这个跳跃越象一个阶跃函数。

$$\boxed{I\to\infty\quad,\quad \phi\,(-\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2})\ \text{是共振的两个普遍特征}}$$

<u>（6）（谐振）电路中的能量转换</u>

前面提到 $\overline{P}=\varepsilon_{rms}i_{rms}\cdot\cos\phi=\overline{\frac{dQ}{dt}}$，即有功功率完全消耗在 R 上。但是考察瞬时功率：

$$\begin{cases} P_\varepsilon(t)=\varepsilon(t)i(t)=\varepsilon_m i_m\sin(\omega t)\sin(\omega t-\phi) \\ \dfrac{dQ}{dt}=i_m^2\sin^2(\omega t-\phi)\cdot R \end{cases}$$

$P_\varepsilon(t)\neq\dfrac{dQ(t)}{dt}$， 即电源瞬时输出功率$\neq$在电阻上瞬时消耗。根据能量守恒，$P_\varepsilon(t)-\dfrac{dQ(t)}{dt}$ 为电源瞬时作用于L,C的功率，其应等于 L，C 中单位时间能量的增长：

$$\boxed{P_\varepsilon(t)-\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{d\left[U_E(t)-U_B(t)\right]}{dt}\neq 0}$$

一般来讲，电源与L,C一直进行着能量交换，只是一周期平均下来为 0。（有时$\varepsilon\to L$，有时$L\to\varepsilon$，有时$\varepsilon\to C$，有时$C\to\varepsilon$）

<u>谐振时，$\phi=0$</u>

$$\left.\begin{aligned} \overline{P_\varepsilon}&=\overline{\frac{dQ}{dt}} \\ P_\varepsilon(t)&=\frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\}\text{瞬 时 值 与 平 均 值 均 相 同}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\left[U_{\mathrm{E}}(t)-U_B(t)\right]}{dt}\equiv 0$$

谐振时，电源与L,C之间没有能量交换！电源瞬间的输出功率全给R！这给我们一个重要的启示：此时$L\Leftrightarrow C$之间可能有能量交换！考察 C，L 中储存的能量：

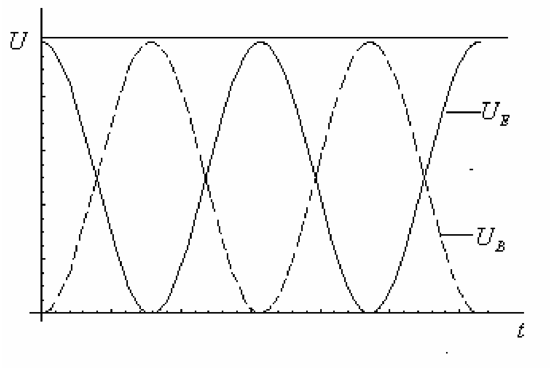
$$U_E(t)=\frac{1}{2}C\cdot\Delta V_C^2=\frac{1}{2}C\left[\frac{i_m}{C\omega_0}\sin(\omega_0 t-\frac{\pi}{2})\right]^2=\frac{1}{2}\frac{i_m^2}{C\omega_0^2}\cos^2(\omega_0 t)$$

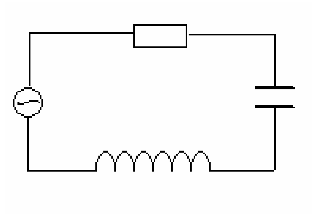
$$U_B(t)=\frac{1}{2}L\cdot i(t)^2=\frac{1}{2}Li_m^2\sin^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}Li_m^2\sin^2(\omega_0 t)$$

注意到$\dfrac{1}{C\omega_0^2}=\dfrac{1}{C}LC=L$，则

$$\boxed{U_E(t)+U_B(t)=\frac{1}{2}Li_m^2\quad\text{与时间无关！}}$$

电场能与磁场能的随时间的变化关系如下图所示：





谐振时的电流与电容上的电荷积累为：

$$\begin{cases} i(t) = i_m \sin(\omega t) \\ q(t) = -\dfrac{i_m}{\omega}\cos(\omega t) \end{cases}$$

由图可知，能量在L和C之间交换，视ε为无物！形象看来，电荷在LC之间振荡。q最大时，U_E最大，但此时i耗尽，$U_B=0$；反之，i开始增加时，U_B变大，但电荷开始减小，直到U_B最大时（i 最大），U_E为 0（q 耗尽）。周而复始，循环往复。显然，这个过程并没有外部激励源的参与。

事实上，注意到谐振时 $i_m = \dfrac{\varepsilon_m}{Z} = \dfrac{\varepsilon_m}{R}$ 即 $\varepsilon_m = i_m R$。

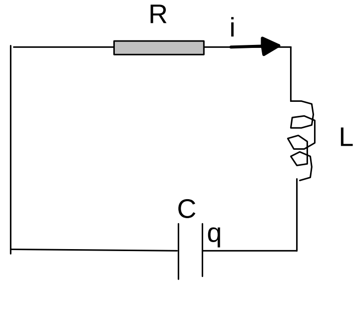
当$R \to 0$时，要得到相同的响应，所需的外部激励$\varepsilon_m \to 0$相应地变小。

理想条件下$R=0, \varepsilon=0$， i_m可以取任意值！意味着：

有了初扰动，电流（荷）可以在 LC 电路中无耗散得以ω_0持续振荡

（7）阻尼振荡：

理想的 LC 串联电路在谐振时即使无外电动势，只要有初始扰动，电流（荷）即可振荡下去。在非理想的情况总有电阻（电感的内阻，导线的内阻等），若仍没有外电动势驱动，情况会如何呢？考虑 RLC 串联电路，没有电动势，则根据 Kirchhoff 第二定律可得：$\Delta V_R + \Delta V_C + \Delta V_L = 0$，即



$$iR + i\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad 考虑到 i = \frac{dq}{dt},$$

因此，
$$\boxed{L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0}$$

$L=0$ 回到RC回路，$C=\infty$（电容连通） 回到LR回路。

解上面这种齐次微分方程有个技巧。所有的齐次方程的通解为：

$\tilde{q}(t)=q_m\exp(\tilde{\alpha}t)=q_m e^{-\alpha t}e^{i\omega' t}$，其中 $\tilde{\alpha}=-\alpha+i\omega'$ 一般为复数。我们可以先假设 $q(t)$ 为复数，最后求得结果后再取其实部或虚部即可（因方程是线性）。将 $\tilde{q}(t)=q_m\exp(\tilde{\alpha}t)$ 代入方程可得：

$$L\tilde{\alpha}^2+R\tilde{\alpha}+\frac{1}{C}=0,$$

解这个 2 次方程可得：

$$\tilde{\alpha}=\frac{-R\pm\sqrt{R^2-4\frac{L}{C}}}{2L}$$

我们现在考虑电阻远远小于电抗的情况，$R<<\sqrt{\frac{L}{C}}$，则两个根

$$\tilde{\alpha}=-\frac{R}{2L}\pm i\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$$

因此： $\alpha=\dfrac{R}{2L}$ ， $\omega'=\pm\sqrt{\omega_0^2-(\dfrac{R}{2L})^2}$ 。

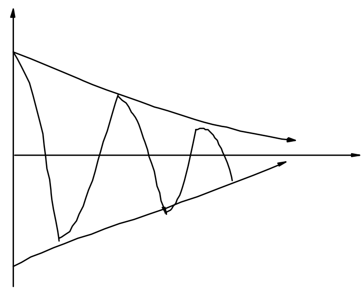
可由此解出电荷电流随时间的变化关系：

$$q(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{q}(t)\right]=q_0e^{-\alpha t}\cos\omega' t$$

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}=-\omega' q_0e^{-\alpha t}\sin\omega' t$$

得到结论 $\boxed{\text{没有 }\varepsilon\text{ 的条件下，}LRC\text{ 回路的电流是阻尼振荡}}$

振荡频率 ω' 相对于共振频率有平移（因为阻尼的影响）。
振荡的衰减时间为 $\tau=1/\alpha=2L/R$



理想条件下 $R\to 0$，解为：

$\omega'=\omega_0$，$\tau\to\infty$，即电流（荷）无衰减地以共振频率振荡下去。此结论与前期由受迫振动推出的完全一致。

思考：最一般的解的形式应为 $\tilde{q}(t)=Ae^{-\alpha t}e^{i(\omega' t+\phi)}$，其中 A,ϕ 两个参数应由初始条件 $q(t=0)=q_0, i(t=0)=i_0$ 给出。求解此时的电荷，电流随时间的变化，并讨论能量的转化 --- 初始能量是否完全转化成热能？

第 38 章：麦克斯韦方程组与电磁波

理想 LC 电路中能量没有耗散，是否真的永不停息地振荡下去？电磁场究竟能否脱离源（电荷，电流）而存在？光的本质又是什么？所有这些问题都是 Maxwell 建立其伟大的方程组之前人们所不了解的。

（一）回顾

让我们回想已学到的电磁学的知识：

静电场 $\oint \vec{E}_S \cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0$ 　　静磁场 $\oint \vec{B}_S \cdot d\vec{s} = 0$

$\oint \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} = 0$ 　　$\oint \vec{B}_S \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$

电磁感应： $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$ （动态场）

↓ ↓

$$\oint \vec{E}_K \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

感应电场 $\vec{E}_K$ 与静磁场 $\vec{B}_S$ 类似，均为有旋无源场，满足高斯定理：

$$\oint \vec{E}_K \cdot d\vec{s} = 0$$

静电场与感应电场均可作用于电荷，因此可统一定义空间的总电场为：

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_K}$$

则总电场满足的高斯定理及环路定理为：

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint \vec{E}_S \cdot d\vec{s} + \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint \vec{E}_S \cdot d\vec{\ell} + \oint \vec{E}_K \cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

即：

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q/\varepsilon_0}$$

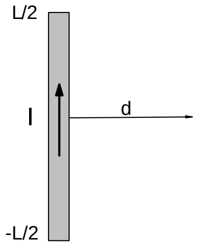
$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

考虑磁场。磁场随时间变化时仍为无源场:

$\boxed{\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{s}=0}$ 仍成立（因为没有磁单极）

但安培定律是否成立 $\oint\!\!\oint \vec{B}_S\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$ ？ 需打一个大大的问号！

$\boxed{\text{不妨看一个例子}}$ 假设长度为 L 的导线中有电流 I，在与棒垂直的线上距离导线d处的磁场可以解得：



$$B_\phi=\frac{\mu_0 I}{4\pi d}\frac{L}{(\frac{L^2}{4}+d^2)^{\frac{1}{2}}}$$ （33 章 page1754）

计算环绕此导线的一个安培环路上的积分为：

$$\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=B\cdot 2\pi d=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{L}{(L^2/4+d^2)^{\frac{1}{2}}}\neq\mu_0 I$$ ，安培定理不成立！

仔细分析 只有 $L\to\infty$ 时 $\oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I$ 才正确！

$\boxed{\text{什么原因使得安培定理不成立？}}$

习题：P. 843, Problems, 13, 15, 16
P. 859, Problems, 8
思考题（选作）